MODELISATION EN RECHERCHE OPERATIONNELLE (R.O.)

L'essence de l'activité de R.O est dans la construction et l'utilisation des modèles. Un modèle est une représentation simplifiée de quelque chose de réel ; ceci implique qu'un modèle est toujours, nécessairement une représentation qui est en soi moins que parfaite.

Pourquoi un modèle et pas la réalité elle-même ?
La raison est économique : pour économiser du temps, de l'argent ou toute autre commodité ; des fois c'est le souci de préserver l'objet réel, des fois la réalité est tellement complexe qu'un modèle est nécessaire pour la saisir, comprendre et communiquer avec les autres.

Le processus de modélisation peut être représenté de la manière suivante :

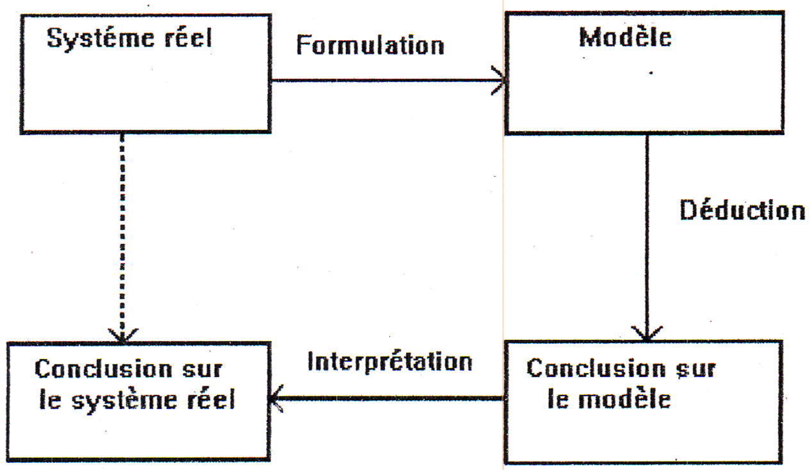


Fig. 1 : Démarche de modélisation

1- Formulation du problème

Une erreur courante consiste à chercher des solutions avant d'avoir identifié clairement le problème et ses causes. Comme on dit la pire décision est la bonne décision prise sur un faux problème.

Contrairement aux exemples simplifiés que l'on trouve dans les manuels pédagogiques les problèmes réels de gestion sont définis de façon vague et imprécise. L'existence d'un problème se fait sentir par des dysfonctionnements fonctionnels ou organisationnels entraînant une baisse de performance de l'entreprise.

2- Formalisation du problème

C'est la transcription du problème réel en un langage mathématique (système d'équation, algorithme etc.) ex : maximiser la production d'un article x tout en tenant compte des contraintes de budget, des contraintes de disponibilité de matière première et des capacité des machines.

La première étape nécessite un ensemble de décisions interreliées en ce qui concerne les aspects du système réel à incorporer dans le modèle et les aspects qui peuvent être ignorés. Quels postulats et hypothèses doivent être faits, prémisses.

> *« La portion de réalité inclue dans un modèle doit être telle que la plupart des variables contenues dans cette portion doivent expliquer de manière satisfaisante la réalité » (T. Kuhn)* ». The Scientific paradigm.

La prise en considération de variables essentielles et l'omission de variables irrelevantes nécessitent une certaine perception sélective qui ne peut être faite par aucun algorithme. L'étape de formulation est subjective dans la mesure où différents chercheurs peuvent proposer différents modèles ; mais tous doivent être d'accord que les conclusions découlent des postulats. Comme il n'y a pas moyen de prouver qu'un modèle n'a pas omis certains facteurs importants, il y a matière à discussion sur la relevance des conclusions pour le système réel.

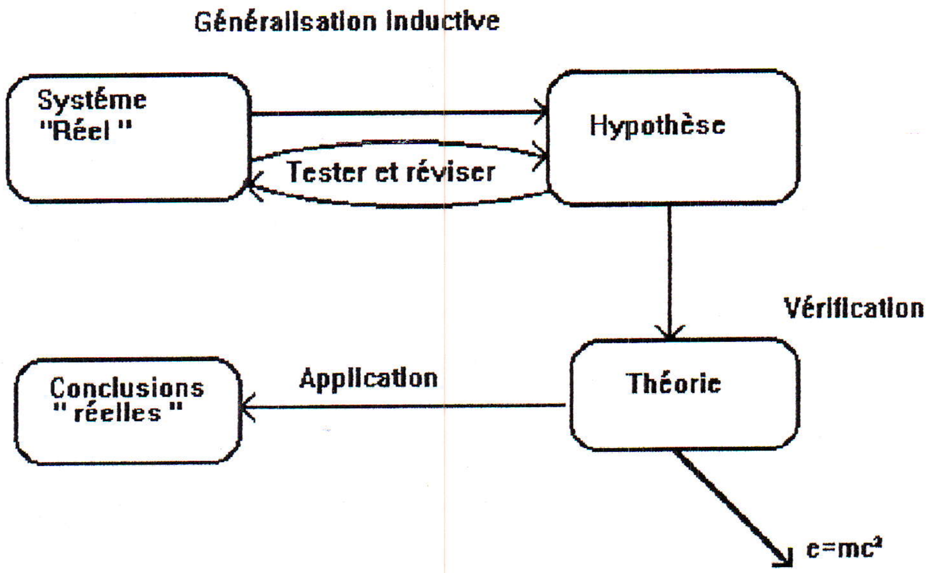
La chose la plus importante à retenir dans la figure 1 est que les liens entre le modèle et le système qu'il représente sont dans le meilleur des cas des liens plausibles d'association et qu'on ne peut jamais remplacer la réalité par un modèle où prouver un modèle.

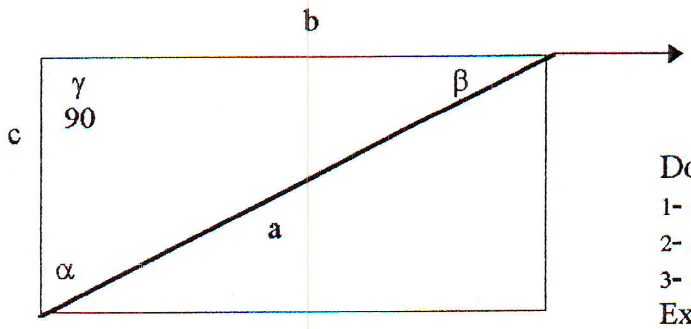
La démarche consistant à tester que le modèle fonctionne est appelée validation ; ainsi le terme validation est la plus faible que preuve ; valider est plus faible que prouver.

Par contraste, les sciences naturelles utilisent une méthode scientifique empirique. Ici la première étape est le développement d'hypothèse obtenu par induction après un temps d'observation. A ce niveau, on expérimente pour tester l'hypothèse. Si les résultats expérimentaux sont en contradiction avec l'hypothèse , cette dernière est révisée et retestée, le cycle continue jusqu'à ce qu'une hypothèse vérifiée ou théorie est obtenue.

Le résultat de la démarche est quelque chose appelée communément vérité ou connaissance ou loi de la nature. Contrairement aux conclusions de modèles, les théories sont des postulats vérifiables indépendamment sur des matières réelles.

Les modèles sont inventés et les théories sont découvertes.





c= ? en fonction de a et b

Hypothèse

$\alpha+\beta= \gamma$

Données du problème :

1- a > c

2- a > b

3- a < c+b

Exprimer a en fonction de b et c

Solution : $a^2=b^2+c^2$

3. Les principes de modélisation

Après avoir établi un cadre général de ce qu'on appelle modélisation, on aborde maintenant une orientation sur la formulation de principes généraux dans la modélisation.

1- On ne construit pas un modèle complexe quand un modèle simple suffit. Les gens aiment étaler leurs connaissances ou pensent qu'un problème difficile nécessite un modèle complexe.
($E=mc^2$) $\Rightarrow$ small is beautiful

2- Eviter de fignoler le problème pour qu'il épouse la technique.

Beaucoup de professionnels de R.O ont la manie à déformer ou distordre la réalité pour qu'on puisse lui appliquer des outils ou des techniques qu'on préfère utiliser. Un expert en programmation linéaire tend à concevoir tous les problèmes comme des problèmes d'optimisation ; un mathématicien à vouloir mettre en équation, un psychologue à ... enfin chacun à voir le monde sous des verres déformants.

3- La phase de déduction en modélisation doit être conduite rigoureusement. Les raisons à ceci sont qu'on veut être sûr que si les conclusions du modèle sont inconsistantes avec la réalité, alors l'erreur est au niveau des hypothèses de travail c'est-à-dire si la déduction n'a pas été faite rigoureusement, le modèle ne peut pas montrer si c'est une erreur extérieure de formulation ou une erreur intérieure de logique (déduction).

4- Un modèle doit être validé avant son application :
Il faut tester le modèle contre des standards (normes) raisonnables d'applicabilité.
Une méthode utilisée est le « test rétrospectif » c'est-à-dire si le modèle est conçu pour faire des prévisions des ventes mensuelles d'un produit on pourrait le tester en utilisant les chiffres du passé et voir si les ventes produites par le modèle concordent avec la réalité.

5- Un modèle ne doit pas être pris au pied de la lettre littéralement (on ne doit pas oublier qu'un modèle n'est après tout qu'un modèle).
Ce principe est respecté quand le modèle est relativement simple, mais dès que le modèle est très sophistiqué, très élaboré et complexe, on oublie ce principe. Par exemple : si on développe un modèle de l'économie, qu'on y met un nombre important de variables, de relations et interactions entre elles, qu'on dépense beaucoup de temps et d'argent dans ce modèle, dans ce cas, il est très facile de croire que le modèle reproduit la réalité surtout pour les gens qui sont très impliqués dans le modèle :

- ils sont incapables de voir le problème qu'à travers ce modèle.
- ce danger croît au fur et à mesure que le modèle devient vaste et sophistiqué (problème qui se pose en simulation).

6- Un modèle ne peut pas être mieux que les informations qu'on y met dedans.
GIGO - Quelque soit la qualité du modèle, ce dernier ne peut reconnaître ou corriger les déficiences des input data.

7- Un modèle ne peut remplacer les décideurs.
Le problème le plus fréquemment rencontré est le fait de penser que la R.O offre une solution optimale libre de toute subjectivité et de toute erreur.

IV. LA PROGRAMMATION LINEAIRE

La Recherche Operationnelle est une approche scientifique moderne des problemes complexes qui se presentent dans la direction et le management des grands systemes composes d'hommes, de machines, de materiaux et d'argent dans l'industrie, le commerce, le gouvernement et la defense. Elle se caracterise par le developpement de systemes scientifiques, incorporant la mesure de facteurs de probabilites et de risques, qui permettent de prevoir et comparer les consequences des alternatives de decisions strategiques. Son but est d'aider le management a determiner ses actions et ses strategies." (P. Simon)

La demarche suivie dans cette approche peut se resumer comme suit

1) formulation exacte du probleme reel (par oppos. probl. logic)

2) formalisation du probleme reel en un probleme de logique

3) resolution du probleme de logique avec des methodes math.

4) transposition des solutions mathematiques sur le probleme reel

Exemple

Une menuiserie-ebenisterie s'est specialisee dans la production de deux articles:

1) un article de menuiserie du batiment: cadres pour portes
2) un article d'ebenisterie : meuble de bibliotheque

le schema ci-apres donne les details des couts, des revenus, et des contraintes rencontrees

	cadres	biblio.	capacites mensuelles (heures)
revenu (DA)	1000	3000	
couts directs	700	2500	
revenu marginal	300	500	
temps de prod. en heure/piece dans US	1	2	170
MO	1	1	150
VE	0	3	180

US=usinage, MO=montage, VE=vernissage

Pour la production de 1 cadre de porte, il faut 1H d'US+ 1H de MO
" " " d'1 meuble bibliotheque, il faut 2H d'US + 1H de MO + 3H de VE

QUESTION

Quelle est le programme (meilleure combinaison) de production qui maximise le revenu marginal ?

SOLUTION

Si X est le nombre de cadres et Y le nombre de bibliotheques a fabriquer, nous voulons maximiser le revenu marginal

1. Maximiser la fonction OBJECTIF : R = 300X + 500Y

2. A cote de cela, nous avons des restrictions techniques imposees par les capacites techniques de l´atelier de menuiserie/ebenisterie.

```
Ainsi au niveau de l´usinage   1X + 2Y =< 170
      au niveau du montage     1X + 1Y =< 150
      au niveau du vernissage       3Y =< 180
```

de meme que nous devons avoir des restrictions de non-negativite c.a.d X >= 0 et Y >= 0

En regle generale les problemes d´optimisation utilisant plus de trois variables necessitent l´utilisation d´un ordinateur. Dans notre cas, nous n´utilisons que deux variables, ce qui nous permet d´approcher le probleme graphiquement

```
     Y (biblio)
    /|\
     |
  120|
     |
  100|                o
     |+                  o <---X + Y =150
   80|      +               o
     |           +             o                 3Y = 180
   60|...............+.........o...............
     |  X + 2Y = 170----->+       o
   40|                        +      o
     |                                +   o
   20|                                    +o
     |                                        o+
     |__________________________________________o_____+____\ X
                     50            100           150   170 /cadres
```

La solution graphique donne une valeur de X = 130 cadres de porte et une valeur Y = 20 bibliotheques. Ces deux valeurs combinees donnent un revenu marginal R = 49.000 DA.

CHAPITRE 2

PROGRAMMATION LINEAIRE

Les problèmes de programmation linéaire concernent l'utilisation ou l'allocation de ressources limitées : travail, matériel, machine, capital de la « meilleure » manière possible pour minimiser des coûts ou maximiser un profit. (Cette allocation de ressources se fait entre des activités en concurrence les unes avec les autres de façon à atteindre au mieux un certain objectif).

Le terme programmation linéaire définit des problèmes qui remplissent les conditions suivantes :

1- Les variables de décisions rencontrées dans les problèmes sont non négatives (positives ou zéro).

2- Le critère pour sélectionner les meilleures valeurs pour les variables de décision peut être décrit par une fonction linéaire, c'est-à-dire une fonction mathématique du 1er ordre. La fonction CRITERE est appelée fonction OBJECTIF.

3- Les règles opératoires du processus (exemple : limitation de ressources) peuvent être exprimées sous forme d'équations linéaires ou inégalités linéaires. Cet ensemble d'équations ou inégalités est appelé CONTRAINTES.

EXEMPLE :

Dans un atelier d'arisanat, on veut planifier le travail des équipes afin de retirer un profit optimal. Le chef d'atelier décide de former deux équipes : l'une fera de la poterie et l'autre des incisions sur cuivre. On désire connaître le nombre d'articles que produira chaque équipe.

La totalité de la production de l'atelier est achetée par un magasin d'artisanat, lequel revend les objets. L'entente convenue entre eux limite le nombre total d'objets produits par l'atelier à un maximum de 80 articles par jour. D'autre part, quelque soit le maximum des objets que produit l'atelier, le magasin exige que les articles de poterie n'excèdent pas les articles de cuivre de plus de 30 objets. La production d'un article de poterie requiert 1 heure- homme ,celle d'un article de cuivre demande 4 heures- homme. La disponibilité des articles limite toutefois le temps alloué aux articles de cuivre comparativement aux temps alloués aux articles de poterie à un maximum de 160 heures -homme par jour. Le profit net que réalise l'atelier d'artisanat par unité est de 200 DA pour la poterie et 600 DA pour le cuivre.

x_1 : nbre d'articles de poterie à produire par jour
x_2 : nbre d'articles de cuivre à produire par jour.

Nous voulons maximiser le profit du magasin d'artisanat.
$E = 200x_1 + 600x_2$

Le problème comprend des contraintes que nous pouvons exprimer sous forme d'inégalités.

1ère contrainte : le nombre total d'objets produits par jour ne doit pas dépasser 80 articles d'où

(1) $x_1 + x_2 \leq 80$

2ème contrainte : quelque soit le maximum des objets, le nombre d'articles de poterie n'excède pas celui des articles de cuivre de plus de 30 objets.

(2) $x_1 \leq x_2 + 30 \Rightarrow x_1 - x_2 \leq 30$

3ème contrainte : La production d'un article de poterie exige 1 h -homme, celle d'un article de cuivre 4 h. La disponibilité des artisans limite l'écart de temps entre les articles de cuivre et celui de la poterie à 160 h

(3) $4x_2 \leq x_1 + 160 \Rightarrow 4x_2 - x1 \leq 160$

On ne doit pas omettre non plus une contrainte commune à tous les problèmes ; la contrainte de non négativité ⇒ on ne peut produire un nombre négatif d'objets $x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

A - Solution graphique

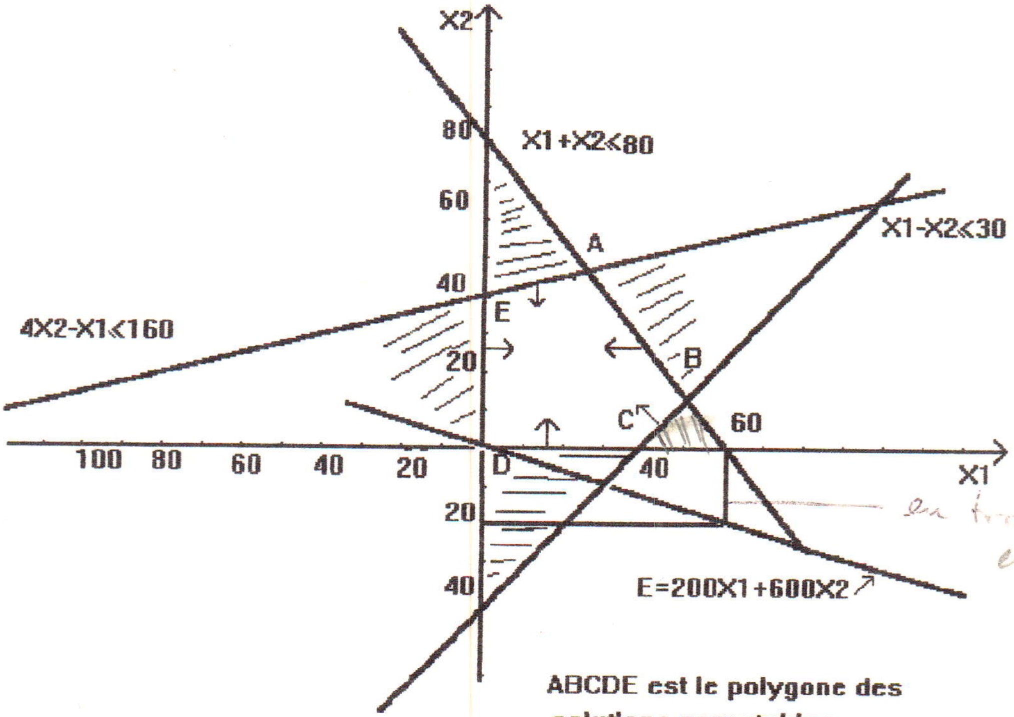
(1) $x_1 + x_2 \leq 80$

(2) $x_1 - x_2 \leq 30$

(3) $4x_2 - x_1 \leq 160$

F.O.E. = $200x_1 + 600x_2$

	x_1	x_1	x_2	x_1
(1)	0	80	0	80
(2)	0	-30	0	30
(3)	0	40	0	-160



ABCDE est le polygone des solutions acceptables

La méthode graphique ne peut malheureusement pas être appliqué à des problèmes ayant plus de deux variables.

Signification de X4

B- L'approche algébrique

Elle peut traiter des problèmes qui ont deux ou plus de variables. Elle est un pont entre la méthode du simplex et la méthode graphique.

La première étape consiste à transformer les inéquations en équations et pour ce faire, nous ajoutons une variable d'écart, non négative dans les inéquations. Ces variables d'écart n'engendrent pas de profit ou de coût et leur coefficient dans la fonction objective est nul. Ainsi :

200 600

$E = 2x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

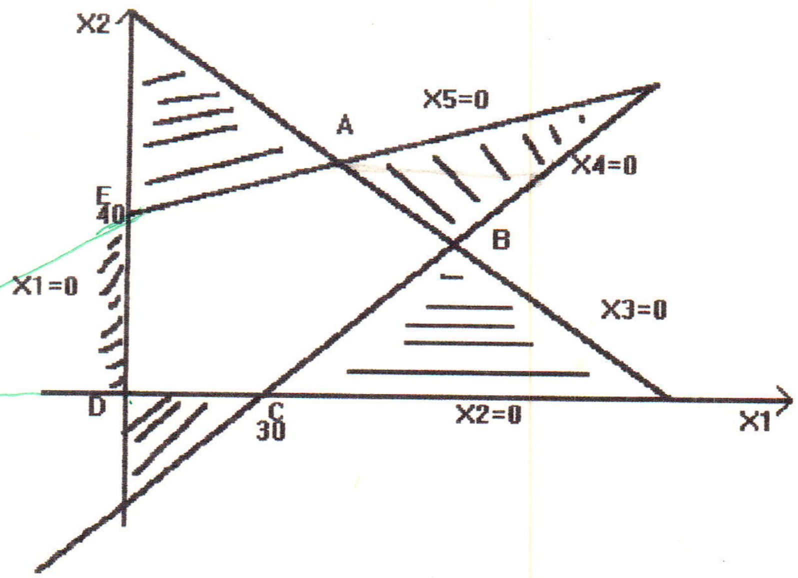
(1) $x_1 + x_2 + x_3 = 80$ (x_3 : nombre d'objets non fabriqués pour atteindre 80)

(2) $x_1 - x_2 + x_4 = 30$ (x_4 : nombre d'objets de poterie non fabriqués pour atteindre 30)

(3) $x_1 - 4x_2 + x_5 = 160$ (x_5 : nombre d'heures non allouées à l'équipe du cuivre pour atteindre l'écart maximal de 160).

Les variables d'écart x_3, x_4, x_5 ne peuvent être négatives et à la limite, elles sont nulles. Traçons sur un graphe les valeurs limites des inégalités. La valeur limite d'une contrainte est atteinte lorsque la variable qu' elle contient est nulle.

Le graphe indique que la région possible est un polygone convexe; chaque côté du polygone est formé par une contrainte limite. Les autres côtés sont les axes vertical et horizontal pour lesquels $x_1=0$ et $x_2=0$.



Considérons la contrainte $x_1+x_2+x_3=80$, nous savons qu'au sommet A les coordonnées sont (32,48). Substituons $32+48+x_3 = 80 \Rightarrow x_3 = 0$, si nous allons vers la droite jusqu'à ce que $x_1 = 48$ par exemple, nous atteignons le point (48, 48). Nous avons alors $48+48+x_3 = 80 \Rightarrow x3 = -16$.

Cela par définition n'est pas possible car une variable d'écart négative implique que l'inégalité n'est pas respectée.

Un sommet de la région possible est un point pour lequel deux variables sont égales à zéro.

Au point A : $x_3 = 0$ et $x_5 = 0$
Au point B : $x_3 = 0$ et $x_4 = 0$
Au point C : $x_2 = 0$ et $x_4 = 0$ ~~non~~
Au point D : $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ ~~non~~
Au point E : $x_1 = 0$ et $x_5 = 0$ ~~non~~

Nous commençons par l'origine (0, 0) et nous écrivons les équations en fonction des deux variables nulles, à droite du signe d'égalité. Les trois autres variables sont appelées variables de base et sont placées à gauche du signe =.

(1) $x_3 = 80 - x_1 - x_2$
(2) $x_4 = 30 - x_1 + x_2$
(3) $x_5 = 160 + x_1 - 4x_2$

Nous admettons par convertion que les variables à droite du signe d'égalité sont nulles. La solution d'un problème de programmation linéaire est un sommet de la région possible ; un sommet étant caractérisé par deux variables nulles (ex : D ; $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$.
Remplaçons dans (1) ; (2) et (3) $\Rightarrow x_3 = 80, x4 = 30 ; x_5 = 160$ et E = 0

Nous résolvons par itération, c'est-à-dire en tendant progressivement vers l'optimum. Ce processus comporte trois étapes :
1- Vérifier si l'origine est une solution optimale
2- Sinon indiquer dans quelle direction on devra se déplacer.
3- Vérifier jusqu'où peut-on se déplacer sans rendre les autres variables négatives.

1- Un sommet n'est pas optimal si, dans la fonction objective E une des variable est affectée d'un coefficient positif.
2- La direction vers laquelle on doit se déplacer est indiquée par le plus grand coefficient positif contenu dans la fonction objective E.
3- Cette variable est augmentée jusqu'à ce qu'une des trois variables devienne nulle. Ainsi la variable nulle devient variable de base et la variable de base devient variable nulle. Nous avons alors atteint un autre sommet de la région possible.