On avait :

$E = 200x_1 + 600x_2$ limite x_2

(1) $x_3 = 80 - x_1 - x_2 \quad \Rightarrow \quad 80$

(2) $x_4 = 30 - x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad \infty$

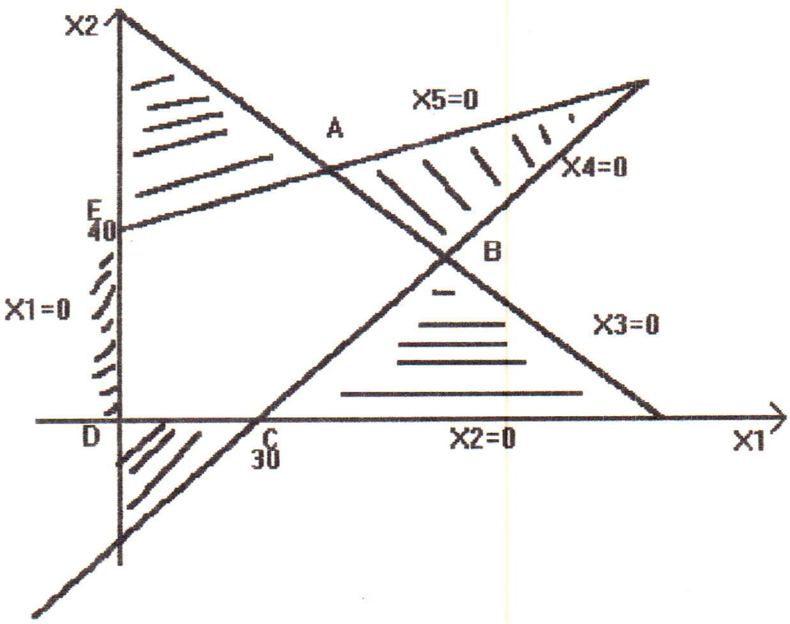
(3) $x_5 = 160 + x_1 - 4x_2 \quad \Rightarrow \quad 40$ On prend la plus petite

Jusqu'à quelle valeur peut on augmenter la variable x_2 tout en gardant la variable x_1 nulle, sans qu'aucune autre variable ne devienne négative ?
Selon la première équation, on ne peut augmenter x_2 que jusqu'à 80 puisque tout autre accroissement rendrait x_3 négatif.

Selon la 2ème équation, on pourrait augmenter x_2 indéfiniment, x_4 ne deviendra jamais négative car x_2 est affecté d'un coefficient positif. Selon l'équation 3, on ne peut augmenter x_2 que jusqu'à la valeur 40 sans rendre la variable x_5 négative.

Equation	Limite pour x_2
(1) $x_3 = 80 - x_1 - x_2$	80
(2) $x_4 = 30 - x_1 + x_2$	∞ puisque coef. de x_2 positif
(3) $x_5 = 160 + x_1 - 4x_2$ si $x_2 = 40$ alors $x_5 = 0$ alors x_5 devient variable nulle et x_2 variable de base (inversion SIMPLEX)	40 **

On choisit la limite la plus petite, car toute valeur plus élevée rendrait x_5 négatif. Ainsi si on prenait $x_2 = 80 \Rightarrow x_5$ deviendrait négatif et la contrainte (3) n'est plus respectée.



Ainsi on devrait se déplacer de D vers E. En gardant $x_1 = 0$ et en augmentant la valeur de x_5 jusqu'à ce que x_5 devient nul, nous nous déplaçons sur l'axe vertical et nous atteignons le point E. Au point E, et $x_5 = 0$.

Si nous exprimons x_2 dans l'équation (3) en fonction de x_1 et x_5, nous obtenons :

(3) $4x_2 = 160 + x_1 - x_5$

$x_2 = 40 + \frac{x_1}{4} - \frac{x_5}{4}$

(1) $x_3 = 80 - x_1 - \left(40 + \frac{x_1}{4} - \frac{x_5}{4}\right)$

(2)

Remplaçons x_2 par sa valeur dans E (1) et (2).

$E = 200x_1 + 600x_2$

$E = 200x_1 + 600\left(40 + \frac{x_1}{4} - \frac{x_5}{4}\right)$

$= 200x_1 + 24000 + 150x_1 - 150x_5 =$

$$\boxed{E = 350x_1 - 150x_5 + 24000}$$

(1) $x_3 = 80 - x_1 - x_2$

$= 80 - x1 - \left(40 + \frac{x_1}{4} - \frac{x_5}{4}\right)$

$= 80 - x_1 - 40 - \frac{x_1}{4} + \frac{x_5}{4}$

$$\boxed{x_3 = 40 - \frac{5}{4}x_1 + \frac{x_5}{4}}$$

(2) $x_4 = 30 - x_1 + x_2$

$x_4 = 30 - x_1 + \left(40 + \frac{x_1}{4} - \frac{x_5}{4}\right)$

$= 30 - x_1 + 40 + \frac{x_1}{4} - \frac{x_5}{4}$

$$\boxed{x_4 = 70 - \frac{3}{4}x_1 - \frac{x_5}{4}}$$

On obtient :

$E = 24000 + 350x_1 - 150x_5$

(11) $x_3 = 40 - \frac{5}{4}x_1 + \frac{x_5}{4}$

(22) $x_4 = 70 - \frac{3}{4}x_1 - \frac{x5}{4}$

(33) $x_2 = 40 + \frac{x_1}{4} - \frac{x_5}{4}$

D'après ces équations :

- Nous sommes au sommet E (0,40)

$x_1 = 0$, puisque x1 est placé à droite du signe d'égalité,

$x_2 = 40$, soit la valeur de la constante contenue dans l'équation 33, les variables de droite étant nulles.

C'est une solution possible. Les variables de base sont non-négatives $x_3 = 40$; $x_4 = 70$ et $x_2 = 40$

La valeur de E est de 240000 soit la valeur de la constante contenue dans l'équation, puisque les valeurs de x1 et x5 sont nulles au sommet du polygone.

Ce n'est pas une solution optimale car dans l'équation E le coefficient de x_1 est positif, il faut ~~aussi~~ ainsi augmenter la valeur de cette variable, chercher jusqu'où on peut augmenter la valeur de x_1 sans rendre les autres variables négatives en gardant x_5 nul.

Equations	limites pour x_1
(11) $x_3 = 40 - \frac{5}{4} x_1 + \frac{1}{4} x_5$	32
(22) $x_4 = 70 - \frac{3}{4} x_1 - \frac{x_5}{4}$	93,33
(33) $x_2 = 40 + \frac{x_1}{4} - \frac{x_5}{4}$	∞

En maintenant $x_5 = 0$ on ne peut augmenter x_1 que jusqu'au point où x_3 devient nul, cette condition est imposée par la contrainte (11) où x_1 atteint sa plus grande limite possible, soit 32.

$\frac{5}{4} x_1 = 40 - x_3 + \frac{1}{4} x_5$

(11) $x_1 = 32 - \frac{4}{5} x_3 + \frac{1}{5} x_5$

Remplaçons x_1 par sa valeur dans les autres équations :

$E = 24000 + 350\, x_1 - 150\, x_5$

$E = 24000 + 350\,(32 - \frac{4}{5} x_3 - + \frac{1}{5} x_5) - 150\, x_5$

$= 24000 + 11200 - 280\, x_3 + 70\, x_5 - 150 x_5$

$\boxed{E = 35200 - 280\, x_3 - 80\, x_5}$

(22) $x_4 = 70 - \frac{3}{4} x_1 - \frac{1}{4} x_5$

$= 70 - \frac{3}{4}(32 - \frac{4}{5} x_3 + \frac{1}{5} x_5) - \frac{1}{4} x_5$

$= 70 - 24 + \frac{3}{5} x_3 - \frac{3}{20} x_5 - \frac{1}{4} x_5$

$-\frac{3}{20} - \frac{5}{20} = -\frac{8}{20} = -\frac{2}{5}$

$\boxed{(22)\ x_4 = 46 + \frac{3}{5} x_3 - \frac{2}{5} x_5}$

(33) $x_2 = 40 + \frac{1}{4} x_1 - \frac{1}{4} x_5$

$x_2 = 40 - \frac{1}{4} (32 - \frac{4}{5} x_3 + \frac{1}{5} x_5) - \frac{1}{4} x_5$

$= 40 + 8 - \frac{1}{5} x_3 + \frac{1}{20} x_5 - \frac{1}{4} x_5$

$$\boxed{(33)\ x_2 = 48 - \frac{1}{5} x_3 - \frac{1}{5} x_5}$$

On obtient $E = 35200 - 280 x_3 - 80\, x_5$

$$\boxed{(111)\ x_1 = 32 - \frac{4}{5} x_3 + \frac{1}{5} x_5}$$

$$\boxed{(222)\ x_4 = 46 + \frac{3}{5} x_3 - \frac{2}{5} x_5}$$

$$\boxed{(333)\ x_2 = 48 - \frac{1}{5} x_3 - \frac{1}{5} x_5}$$

D'après ces équations, nous sommes au sommet (32, 48)

- La solution est possible et optimale, tous les coefficients de l'équation E sont négatifs.

Nous savons que l'équipe de poterie doit produire 32 unités et celle du cuivre 48 unités.

$E = 200\, x_1 + 600\, x_2$

$= 200 \times 32 + 600 \times 48 = 6400 + 28800$

$E = 35200$

CHAPITRE 2

LA METHODE SIMPLEX

Nous allons commencer par illustrer la méthode du simplex dans le cas d'un problème de maximisation (le même problème traité par la méthode graphique). Le but du chapitre n'est pas de rendre le lecteur expert dans l'application d'un certain nombre de règles, mais plutôt de continuer à développer la compréhension des modèles linéaires ainsi que leurs méthodes de solution.

MAX E = 2 x1 + 6 x2

avec (1) x1 + x2 $\leq$ 80

(2) x1 - x2 $\leq$ 30

(3) 4x2 - x1 $\leq$ 160

On introduit des variables d'écart

(1) x1 + x2 + x3 = 80

(2) x1 - x2 + x4 = 30

(3) 4x2 - x1 + x5 = 160

On exprime ensuite les variables d'écart en fonction des variables nulles x1 et x2 à l'origine :

Max E = $0 + 2x_1 + 6x_2$

(1) x3 = 80 - x1 - x2

(2) x4 = 30 - x1 +x2

(3) x5 = 160 + x1 - 4x2

ainsi les variables de base sont égales aux constantes à l'origine (x1=x2=0)

Représentons le problème sous forme du tableau simplex

	Constantes	x1	x2
E	0	2	6
x3	80	- 1	- 1
x4	30	- 1	+ 1
x5	160	1	- 4

La méthode solution à suivre comprend neuf étapes :

① Localisation de l'élément pivot qui se fait en deux étapes :

* choisir dans la rangée de la fonction objective E, le plus grand coefficient positif (6)

→ à ce coefficient correspond La colonne de l'élément pivot en gras souligné

* Considérons les éléments négatifs de la colonne choisie, établir les ratios en valeur absolue entre la constante et l'élément négatif. La rangée de l'élément pivot Correspond au ratio dont la valeur est la plus petite et l'élément pivot se situe à la rencontre de la colonne pivot avec la rangée pivot.

en gras souligné

	Constantes	x1	x2	
E	0		6	$\left\lvert \frac{80}{-1} \right\rvert = 80$
x3	80		- 1	
x4	30		1	
x5	160		- 4	$\left\lvert \frac{160}{4} \right\rvert = 40$

↳ on exprime X_2 en fonction des autres variables

X_2 : variable de base

② Les variables identifiant la rangée et la colonne pivot se remplacent mutuellement.

(x2 remplace x5)

	Constantes	x1	x5
E			
x3			
x4			
x2			-4

③ L'élément pivot est remplacé par son inverse multiplicatif.

	Constantes	x1	x5
E			
x3			
x4			
x2			$\boxed{-\frac{1}{4}}$

④ Les autres éléments de la rangée de l'élément pivot sont divisés par la valeur absolue de l'élément pivot, soit $|-4| = 4$ RAB

	Constantes	x1	x5
E			
x3			
x4			
x2	40	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

⑤ Les autres éléments de la colonne de l'élément pivot sont divisés par la valeur algébrique de l'élément pivot soit - 4. CVAL

	Constantes	x1	x5
E			$-\frac{3}{2}$
x3			$\frac{1}{4}$
x4			$-\frac{1}{4}$
x2	40	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

⑥ Pour tous les autres éléments du tableau, nous appliquons la formule :

$$\text{Nouvel élément} = \text{ancien élément} - \left(\frac{\text{produit des 2 coins}}{\text{élément pivot}} \right)$$

Nous formons un rectangle dont deux des sommets opposés sont l'élément pivot et l'élément considéré. Les deux autres coins sont ceux dont le produit est mentionné dans la formule. Les éléments encerclés dans notre cas restent à être modifiés.

	Constantes	x1	x5
E	0	2	6
x3	80	- 1	- 1
x4	30	- 1	+ 1
x2	160	1	- 4

Si nous voulons remplacer 0 qui est la constante de la ~~E.O.E.~~ Fonction Objectif E.

$$\text{Nouvel élément} = 0 - \left[\frac{160 \times 6}{-4} \right] = 240$$

Si nous voulons remplacer -1, qui est en position (x3, x1)

$$= -1 - \frac{[1 \times -1]}{-4} = -1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$$

On obtient le tableau suivant :

	Constantes	x1	x5
E	240	$\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$
x3	40	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$
x4	70	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
x2	40	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

⑦ Vérifions si la solution obtenue est possible.

* Une solution est possible si toutes les valeurs des constantes dans le tableau sont non négatives, dans notre cas la solution est possible (220, 40, 70 et 40 sont toutes positives).

⑧ Vérifions si la solution obtenue est optimale? La solution est optimale si dans la rangée de la fonction objective tous les coefficients des variables sont négatives.

Ce n'est pas le cas.

	Constantes	x1	x5
E	240	$\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$

⑨ On repète les huit étapes précédentes, jusqu'à l'obtention d'une solution optimale.

Déterminer un nouveau pivot

①

	Constantes	x1	x5
E	240	$\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$
x3	40	$\boxed{-\frac{5}{4}}$	$\frac{1}{4}$
x4	70	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
x2	40	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

$\left|\frac{40}{-5/4}\right| = 32$

$\left|\frac{70}{-3/4}\right| = 93{,}33$

Les variables identifiant la rangée et la colonne de l'élément pivot se remplacent mutuellement et ainsi de suite pour les 9 étapes. Après deux itérations, nous obtenons

	Constante	x3	x5
E	352	$-14/5$	$-4/5$
x1	~~30~~ 32	$-\frac{4}{5}$	$1/5$
x4	46	$3/5$	$-2/5$
x2	48	$-1/5$	$-1/5$

~~et ainsi de suite pour toutes les 9~~

Cette solution est possible puisque toutes les valeurs de la colonne des constantes sont positives et elle est optimale puisque tous les coefficients dans la rangée de la fonction objectif E sont négatifs.

Ainsi la valeur optimale de E est de 352 lorsque $x_1 = 32$ et $x_2 = 48$