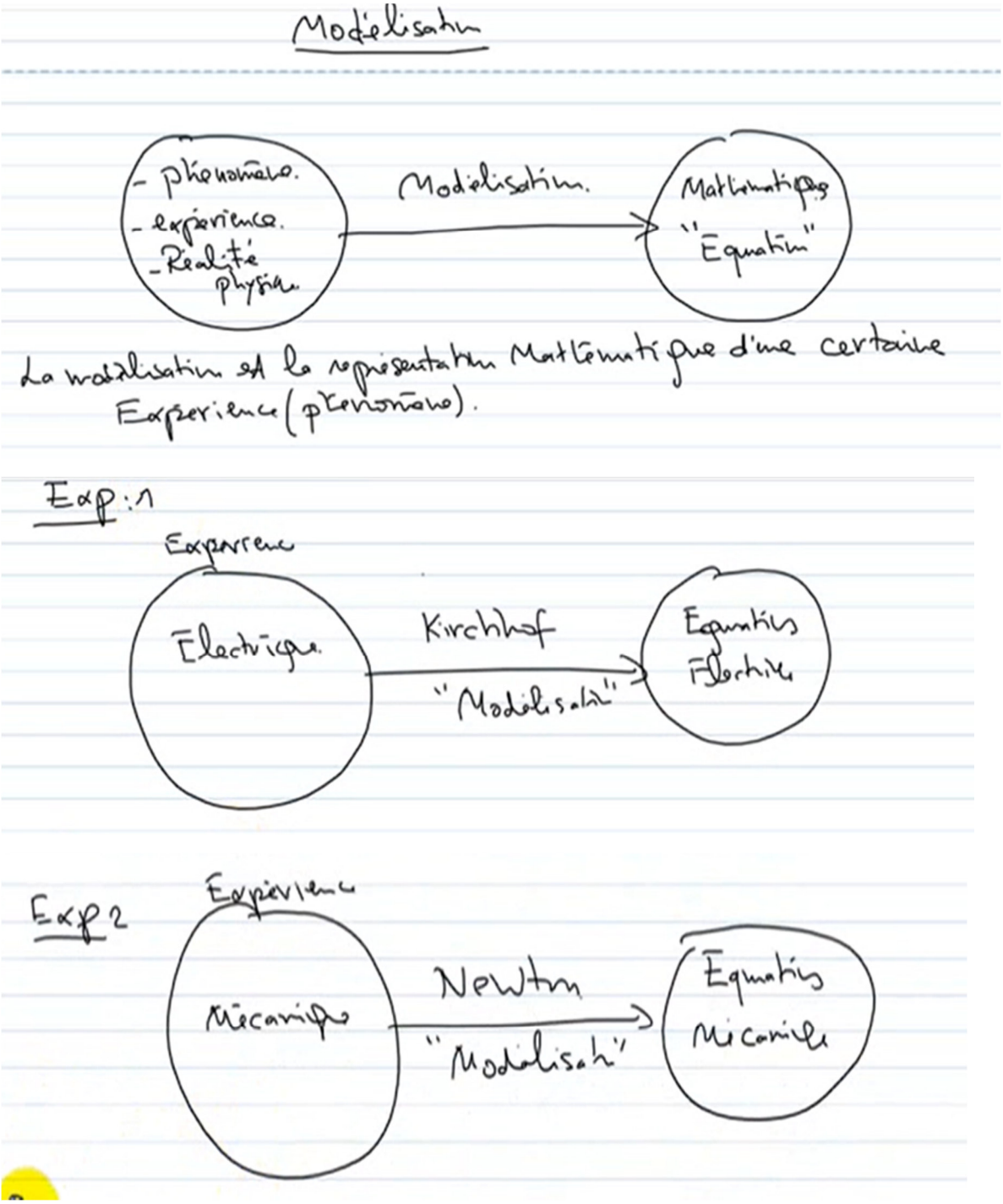
Chapitre 1

Modélisation

I. Généralités



Rq : Les équations obtenues par modélisation sont généralement de types différentielles :

Eq. Diff 2ème ordre : $\ddot{y} + a\dot{y} + by = cu$

$\dot{y} = y' = \frac{dy}{dt}$

$\ddot{y} = y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$



y : sortie ou le résultat de l'expérience.

u : l'entrée de l'expérience

a, b, c : paramètres

Si l'expérience est du 1er ordre : $\dot{y} + ay = bu$

(sortie) = (Entrées)

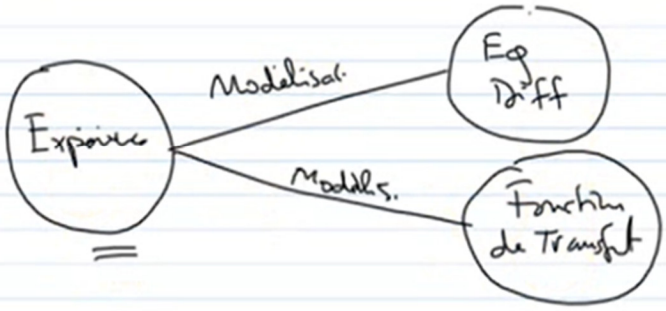
$\dot{\dot{\dot{\dot{y}}}} = y^{(n)}$: la nième dérivée de y

Eq Diff d'ordre n :

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + b_{m-2} u^{(m-2)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

Fonction de transfert:

Un Modèle peut être aussi donné par une autre forme appelée fonction de Transfert:



Soit l'eq Diff suivante.

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = C\,u(t)$$

N.B : Eq. Diff est une modélisation dans le domaine temporel(t).

F.T. : est une modélisation dans le Domaine fréquentiel(s)



t : temps
S : fréquence

$x(t) \longrightarrow \mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$

$X(s)$ est la transformée de Laplace de $x(t)$

$$\mathcal{L}\left(\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + b\,y(t)\right) = \mathcal{L}\left(c\,u(t)\right)$$

Condition Initiale Nulle.

$\mathcal{L}(\ddot{y}(t)) = s^2 Y(s)$ $\quad \mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = sY(s)$ $\quad \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} + a\,\mathcal{L}(\dot{y}(t)) + b\,\mathcal{L}\{y(t)\} = c\,\mathcal{L}\{u(t)\}$$

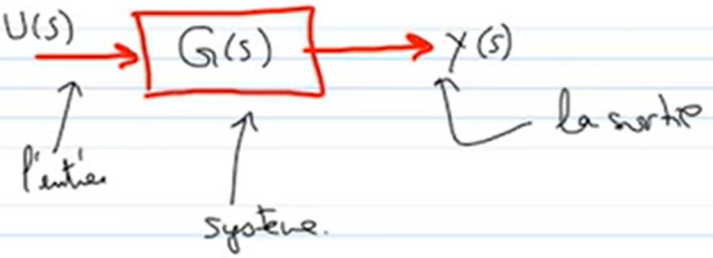
$$s^2 Y(s) + a\,s\,Y(s) + b\,Y(s) = c\,U(s)$$

$$Y(s)\left[s^2 + as + b\right] = c\,U(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c}{s^2 + as + b}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c}{s^2 + as + b}$$

$G(s)$: Fonction de Transfert

$$Y(s) = G(s)\,U(s)$$

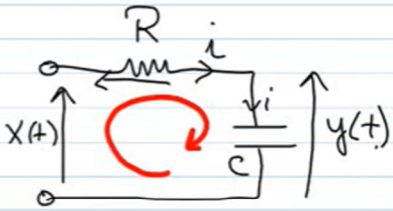


II. Modélisation Electrique

1. Circuit Electrique RC

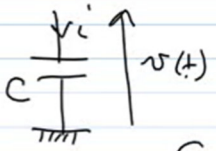
Exp1 : Loi de Kirchhof

$$\begin{cases} x(t) = Ri + y(t) & (1) \\ y(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt & (2) \end{cases}$$



Entrée : $x(t)$
Sortie : $y(t)$





$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$

fusionner les équations (1) et (2) en 1 seule Eq. Diff

Eliminer i de (1) : en utilisant (2) $\Leftrightarrow$ calculer i de (2) puis le remplacer dans (1)

(2) $y(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \Leftrightarrow Cy(t) = \int i(t)dt$

$\rightarrow \dot{C}y(t) = \dot{\int} i(t)dt$

$C\dot{y}(t) = i(t) \rightarrow \boxed{i(t) = C\dot{y}(t)} \quad (3)$

(3) dans (1)

on a $x(t) = Ri + y \Rightarrow x(t) = RC\dot{y} + y$

$$\frac{RC\dot{y} + y}{RC} = \frac{x(t)}{RC} \Rightarrow \boxed{\dot{y} + \frac{1}{RC}y = \frac{1}{RC}x(t)}$$

Eq. Diff

le circuit RC a été modélisé par une eq. Diff du 1er ordre.

$$\dot{y} + \frac{1}{RC} y = \frac{1}{RC} x(t)$$

$\dot{y}$: Sortie ; $x(t)$: l'entrée

pour trouve la Fct de Transfert : on applique la T.L. avec C.I. = 0

$$\mathcal{L}\left\{\dot{y} + \frac{1}{RC} y\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{RC} x(t)\right\}$$

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} \qquad Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$$

$$sY(s) + \frac{1}{RC} Y(s) = \frac{1}{RC} X(s)$$

$$Y(s)\left[s + \frac{1}{RC}\right] = \frac{1}{RC} X(s)$$

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\text{Sortie}}{\text{Entre}} \quad \text{Dans le plan S}$$

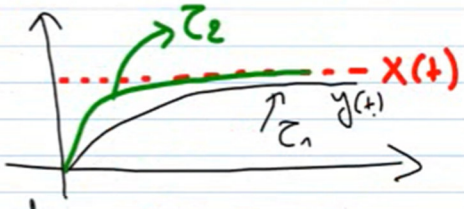
$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1/RC}{s + \frac{1}{RC}}$$

Fct. De transfert du Circuit R.C

Soit $\tau = RC$ la constante du temps [sec]

τ est un temps

$\tau_2 < \tau_1$

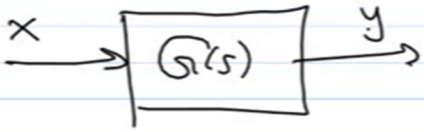


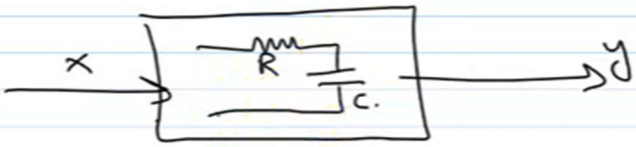
Si τ est très petite $\Rightarrow$ le système est plus rapide

$$G_1(s) = \frac{1/\tau}{s + \frac{1}{\tau}} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

avec τ la constante du temps.





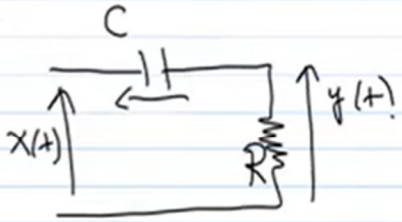
2. Circuit Electrique CR

Expl : Circuit CR

$$X(t) = \frac{1}{C}\int i\,dt + y \quad -(1)$$

$$y = Ri \quad -(2)$$

Combiner (1) et (2) pour déduire l'éq Diff du Circuit :



de (2) $\rightarrow i = \frac{y}{R}$ et je le remplace dans (1) :

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{1}{C}\int \frac{y}{R}\,dt + \dot{y} \qquad (x+y)^{\cdot} = \dot{x} + \dot{y}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{RC}y + \dot{y} \Rightarrow \boxed{\dot{y} + \frac{1}{RC}y = \dot{x}(t)}$$ Eq. Diff du circ CR.

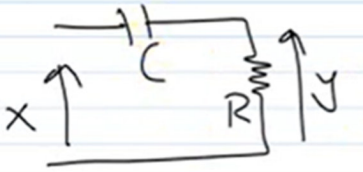
F.T. : on prend le laplacien de l'eq Diff trouvée

$$SY(s) + \frac{1}{RC}Y(s) = SX(s)$$

$$Y(s)\left[S + \frac{1}{RC}\right] = SX(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{S}{S + 1/RC}$$

on pose $\tau = RC \Rightarrow$

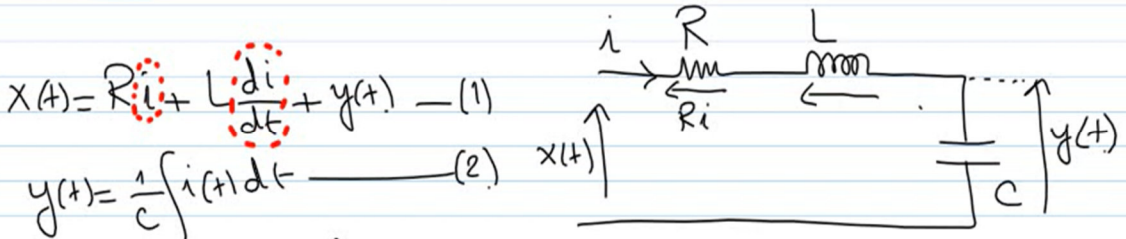
$$G(s) = \frac{S}{S + \frac{1}{\tau}} = \frac{\tau S}{\tau S + 1}$$



$$\Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{\tau S}{\tau S + 1}}$$

3. Circuit Electrique RLC

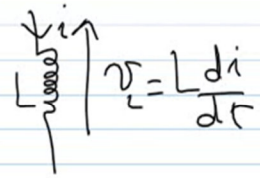
Exp3 : Circuit Electrique RLC



$$x(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + y(t) \quad (1)$$

$$y(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \dot{y}(t) = \frac{i(t)}{C} \Rightarrow i(t) = C\dot{y}(t) \quad (3)$$



$$(3) \text{ dans } (1) \Rightarrow x(t) = RC\dot{y} + LC\ddot{y}(t) + y(t)$$

$$\frac{di}{dt} = C\ddot{y}(t)$$

$$LC\ddot{y} + RC\dot{y} + y = x(t)$$

$$\frac{di}{dt} = C\ddot{y}(t)$$

$$\frac{LC\ddot{y} + RC\dot{y} + y}{LC} = \frac{x(t)}{LC}$$

$$\ddot{y} + \frac{RC}{LC}\dot{y} + \frac{1}{LC}y = \frac{1}{LC}x(t) \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{y}(t) + \frac{R}{L}\dot{y} + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}x(t)}$$

Sortie

l'entrée

$$S^2 Y(s) + \frac{R}{L} S Y(s) + \frac{1}{LC} Y(s) = \frac{1}{LC} X(s)$$

$$Y(s)\left[S^2 + \frac{R}{L} S + \frac{1}{LC}\right] = \frac{1}{LC} X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{S^2 + \frac{R}{L} S + \frac{1}{LC}}$$

Fct. transfert du circuit RLC

N.B : un circuit RLC est représenté par une équation différentielle du 2ème ordre.

Si la variable de Laplace est en puissance de "2" alors l'ordre du système est "2"

Forme normalisée d'un système du 2ème ordre :

Forme normalisée d'un système du 2ème ordre :

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 x$$ eq. Diff. Norm

$$S^2 Y(s) + 2\xi\omega_n S Y(s) + \omega_n^2 Y(s) = \omega_n^2 X(s)$$

$$Y(s)\left[S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2\right] = \omega_n^2 X(s)$$

ξ : coefficient d'amortissement (frottement)

ω_n : pulsation naturelle

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\omega_n^2}{S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2}$$

F.T. Normalisée

III. Modélisation Mécanique

1. Système masse sans frottements

Exp4 : Système Mécanique

Déterminer l'eq Diff : Loi de Newton

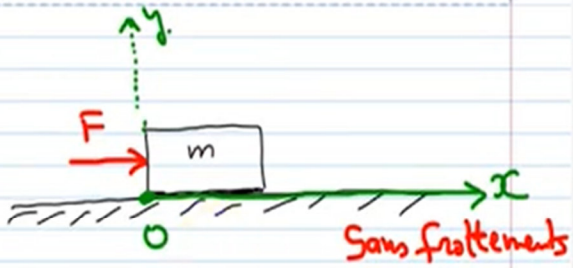
$\sum$ Forces externes = m x accélération

mouvement seulement sur l'axe x $\Rightarrow$

$$\sum F_x = m a_x \qquad a_x = \ddot{x}$$

$$\downarrow \qquad F_x = F$$

$$F = m\ddot{x}$$



$$F(t) = m\ddot{x} \longrightarrow T.L. \Rightarrow \mathcal{L}\{F(t)\} = \mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\}$$

$$F(s) = m s^2 X(s)$$

$F(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$

$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$

$$G(s) = \frac{\text{Sortie}}{\text{entrée}} = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2}$$

x : représente la réponse (sortie) lorsque on lui applique en force à l'entrée (F)

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{ms^2} = \frac{1/m}{s^2}}$$

① Système est du 2ème ordre

② Système Double-intégrateur
(possède Deux pôles à l'origine)

une fonction de transfert d'1 intégrateur Simple est : $\frac{1}{S}$

" " " " " Double " : $\frac{1}{S^2}$

2. Système masse avec frottements

Exp5:

La force générée par un frottement

$F_f = -f \times \text{vitesse}$

$= -f \cdot v = -f \cdot \dot{x}$

f: coefficient de frottement



$\sum F_{ext} = m\ddot{x}$

$F(t) - f\dot{x} = m\ddot{x}$

$m\ddot{x} + f\dot{x} = F(t)$



$$m\ddot{x} + f\dot{x} = F(t) \Rightarrow \boxed{\ddot{x}(t) + \frac{f}{m}\dot{x}(t) = \frac{1}{m}F(t)}$$ Eq. Diff

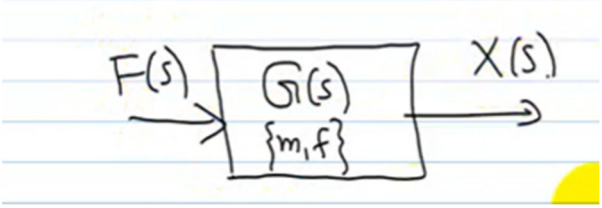
F.T. : Laplacien

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{x} + \frac{f}{m}\dot{x}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{m}F(t)\right\} \qquad C.I. = 0$$

$$X(s)\left(S^2 + \frac{f}{m}S\right) = \frac{1}{m}F(s) \Rightarrow \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1/m}{S^2 + \frac{f}{m}S}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{1/m}{S^2 + \frac{f}{m}S}}$$

Rq : La fonction de transfert contient les paramètres du système (m, f)



3. Système masse - ressort

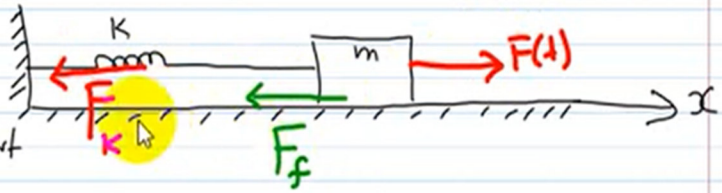
Exp6 :

F_f : force de frottement

F_k : force de rappel du ressort

f : Coefficient de frottement

K : Coefficient du ressort

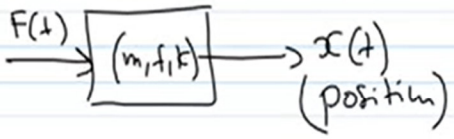


$$\sum F_{ext} = m\ddot{x} \rightarrow F(t) - F_f - F_k = m\ddot{x}$$

$$F(t) - f\dot{x} - Kx = m\ddot{x} \rightarrow m\ddot{x} + f\dot{x} + Kx = F(t)$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{f}{m}\dot{x}(t) + \frac{K}{m}x(t) = \frac{K}{m}\frac{F(t)}{K}$$

$2\xi\omega_n$ $\quad \omega_n^2$ $\quad \omega_n^2$



$$X(s)\left[s^2 + \frac{f}{m}s + \frac{K}{m}\right] = \frac{1}{m}F(s)$$

$$F = K \cdot x \qquad x = \frac{F}{K}$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{f}{m}s + \frac{K}{m}}$$

$$G(s) = \frac{1/m}{s^2 + \frac{f}{m}s + \frac{K}{m}}$$

4. Système masse – ressort-amortisseur

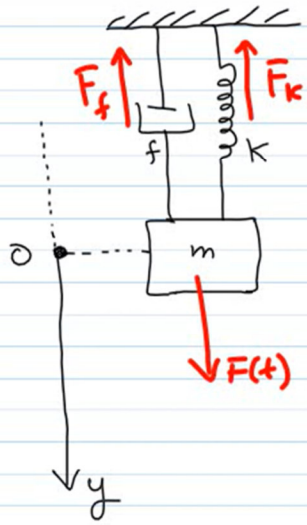
Exp7 :

$\bar{F}_f$: Force de l'amortisseur $= f\,\dot{x}$

y : Déplacement vertical de m (sortie)

l'amortisseur joue le même rôle que les frottements naturels (générateur de frottement)

y(t) : Déplacement vertical



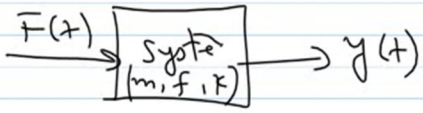
$$\sum \bar{F}_{ext} = m\,\ddot{y}$$

$$F(t) - \bar{F}_k - \bar{F}_f = m\,\ddot{y}$$

$$F(t) - Ky - f\dot{y} = m\ddot{y} \rightarrow m\ddot{y} + f\dot{y} + Ky = F(t)$$

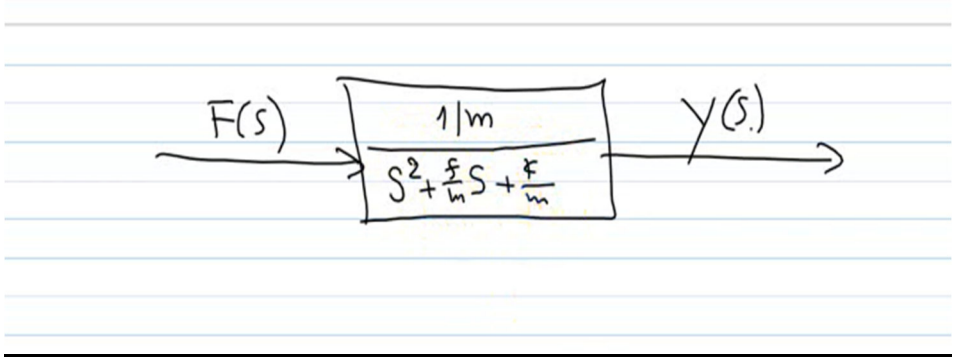
$$\ddot{y} + \frac{f}{m}\dot{y} + \frac{K}{m}y = \frac{1}{m}F(t)$$

$2\xi\omega_n$ $\quad \omega_n^2$



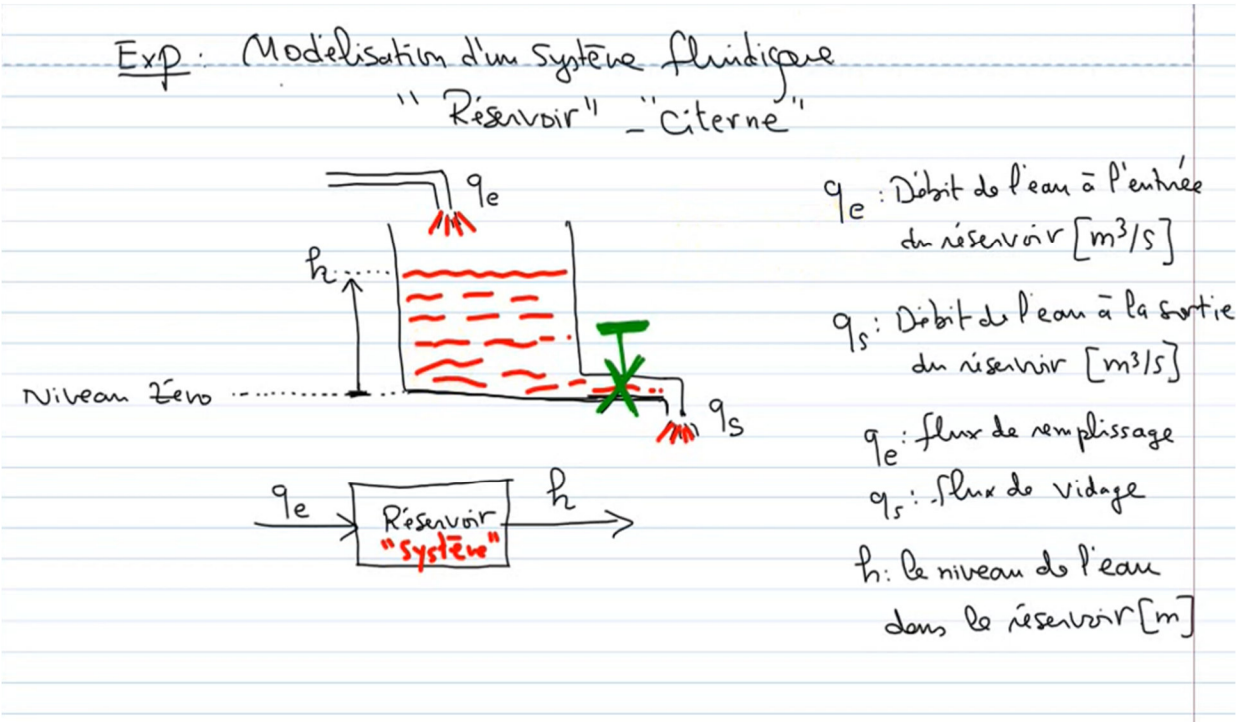
$$Y(s)\left(s^2 + \frac{f}{m}s + \frac{K}{m}\right) = \frac{1}{m}F(s) \rightarrow$$

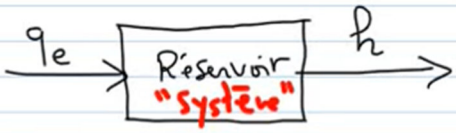
$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{f}{m}s + \frac{K}{m}}$$



IV. Modélisation Fluidique

Système réservoir





Système → Réservoir

Entrée → q_e

Sortie → h : hauteur de l'eau

Données : sont les informations (paramètres) du réservoir

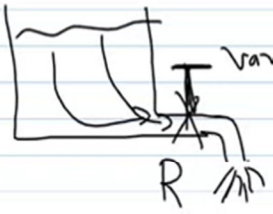
1) la surface de la section du réservoir : A $[m^2]$

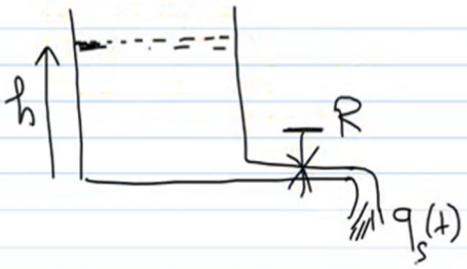
2) Résistance de la vanne



si le réservoir est un cylindre

A : surface : de la base





$q_s \propto h, R$

$$q_s = \frac{h}{R}$$

Le volume de l'eau dans le réservoir $V = A.h$ varie suivant le remplissage ou le vidage :

$$q_e - q_s = \frac{dV}{dt} \Rightarrow \quad q_e - q_s = \frac{d\,Ah}{dt}$$

Réservoir cylindrique (A : Constante πr^2)

$$q_e - q_s = A\frac{dh}{dt} \qquad \frac{dh}{dt} = \dot{h}$$

$$q_e - \frac{h}{R} = A\dot{h} \longrightarrow \text{Eq. Diff}$$

$$A\dot{h} + \frac{1}{R}h = q_e$$

q_e ← l'entrée

h ↑ sortie

$$\dot{h} + \frac{1}{RA}h = q_e$$

Eq. Diff 1ère ordre.

$$SH(s) + \frac{1}{RA} H(s) = \frac{1}{A} \Phi_e(s)$$

$$H(s) \left[s + \frac{1}{RA} \right] = \frac{1}{A} \Phi_e(s)$$

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

$$\Phi_e(s) = \mathcal{L}\{q_e(t)\}$$

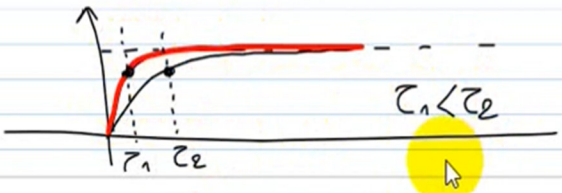
$$\frac{\text{Sortie}}{\text{entrée}} = \frac{H(s)}{\Phi_e(s)} = \frac{1/A}{s + \frac{1}{RA}} = \frac{\frac{1}{A}}{\frac{RAs+1}{RA}} = \frac{R}{RAs+1}$$

$$G(s) = \frac{R}{RAs+1}$$

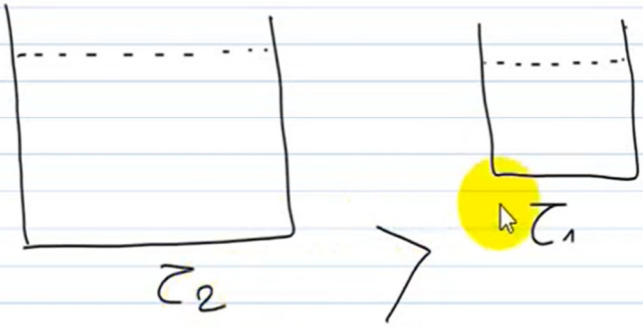
$$\boxed{G(s) = \frac{R}{RAs+1}}$$

$RA = \tau$: la constante du temps du système.

τ : nous donne une information sur la vitesse de la réponse du système



Système avec τ_1 est plus rapide que celui avec τ_2 $(\tau_1 < \tau_2)$

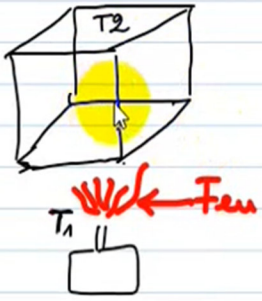


V. Modélisation Thermique

principe : Si on échauffe un corps ⟹ il emmagasinera l'énergie en fonction linéaire de température ($\varphi = aT$) avec laquelle on l'échauffe.

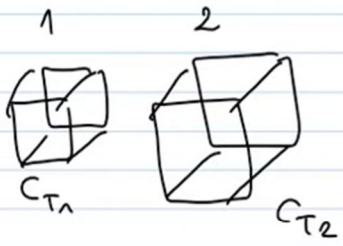
Stockage d'énergie de l'échauffement

Energie Emmagasinée : φ [Joule]



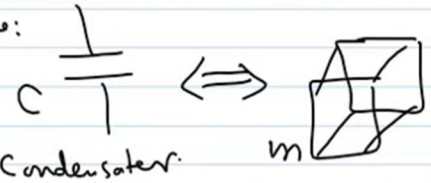
$\varphi = C_T T_2$

C_T : capacité thermique



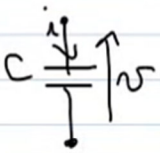
Corps 2 absorbe plus d'énergie que le corps 1 $\Rightarrow C_{T_2} > C_{T_1}$

Analogie Electronique et mécanique :



Condensateur :
C : Capacité à recevoir des charges électriques

C_T : capacité de recevoir de l'énergie de l'échauffement



Condensateur

$q = C v$ $\longleftrightarrow$

q
C
v

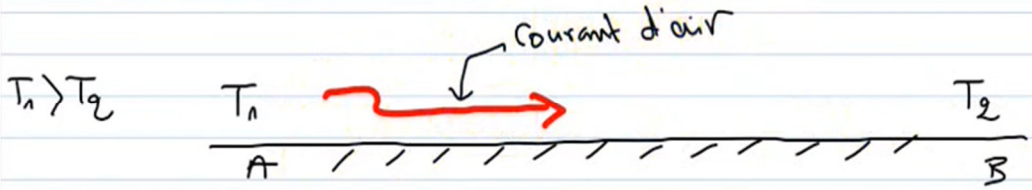
Corps chauffé

$Q = C_T T_2$

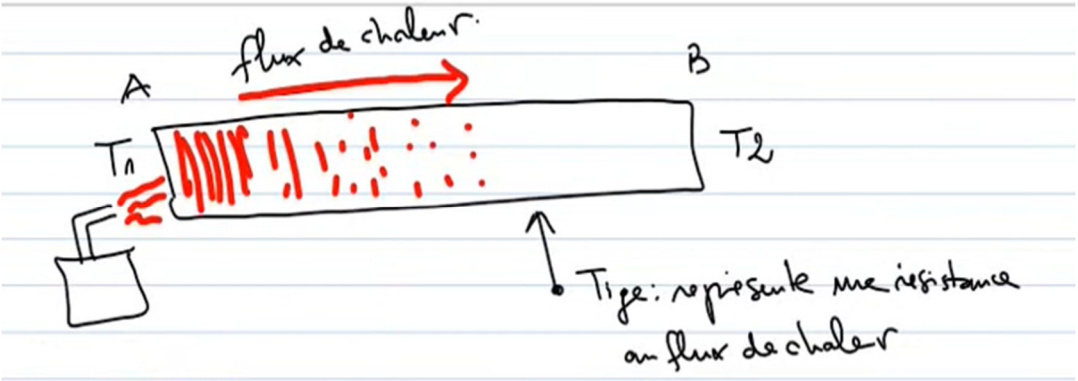
Q
C_T
T_2

principe 2 : Ecoulement (Flux) de l'énergie sous température différentielle

"Résistance"



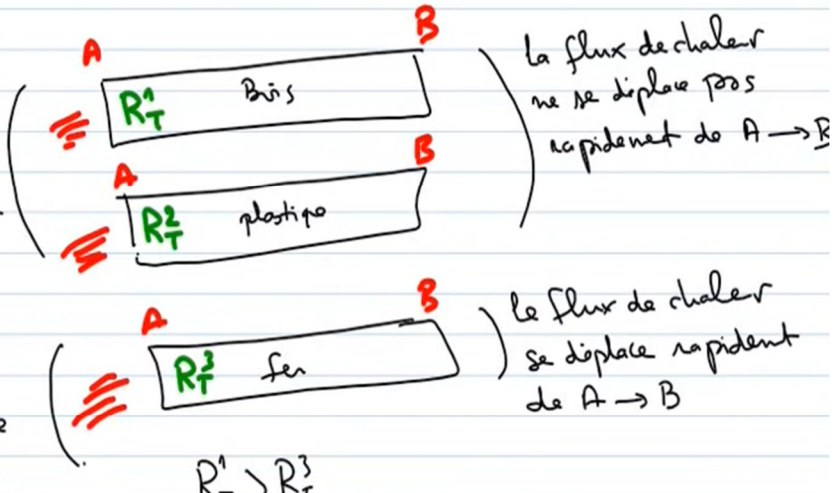
la chaleur (Energie) se déplace toujours de la zone la plus chaude vers la zone froide.



Résistance du bois et du plastique à la propagation de la chaleur est plus élevée que celle du fer.

On parle de résistance thermique (pas résistance électrique). R_T

R_T : résistance à la propagation de la température.

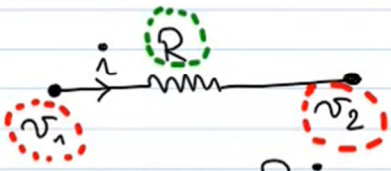


$R_T^1 > R_T^3$

$R_T^2 > R_T^3$

analogie avec le cas électrique :

Electrique.

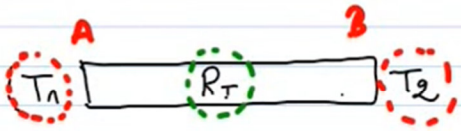


$$v_1 - v_2 = R\, i$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$v_1 - v_2 = R \frac{dq}{dt}$$

thermique



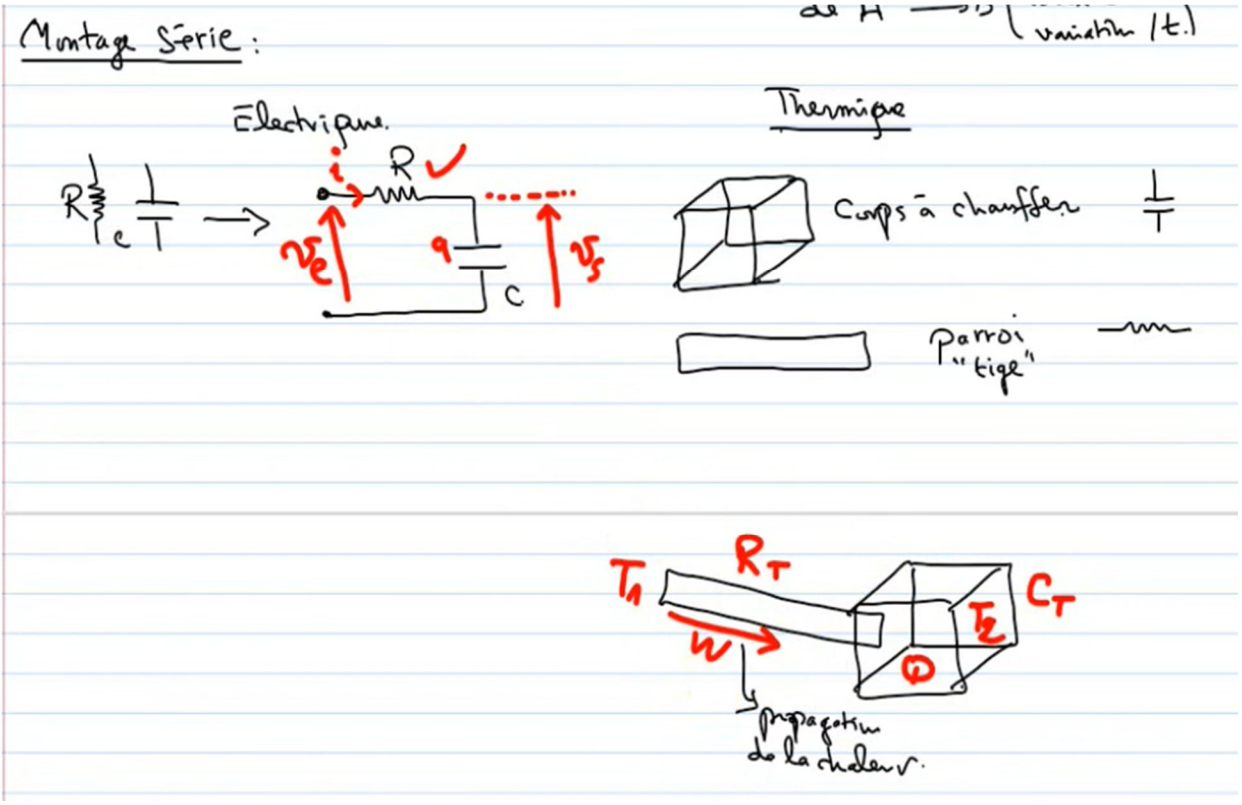
$$T_1 - T_2 = R_T \frac{d\varphi}{dt}$$

$$= R_T W$$

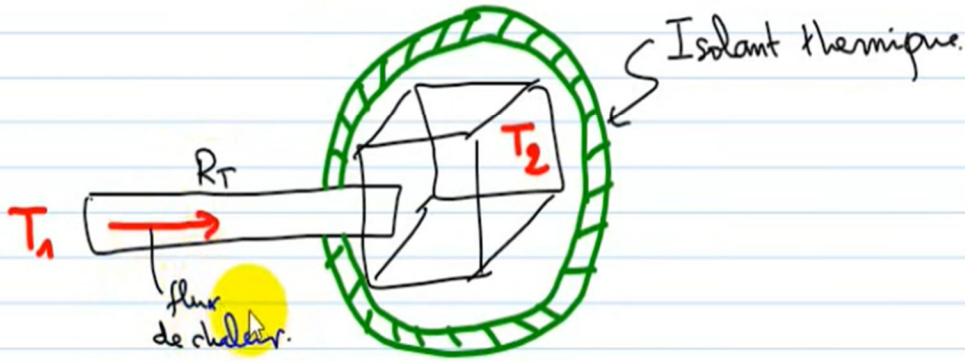
Dérivée de l'énergie = puissance [W]

$$T_1 - T_2 = R_T W$$

i ⟶ W : vitesse avec laquelle l'énergie de chaleur propage de A ⟶ B (taux de variation / t.)



Le principe de tous système thermique est de stocker l'énergie sans la perdre.



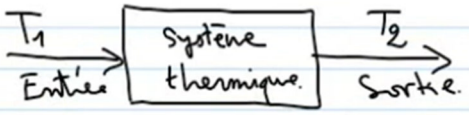
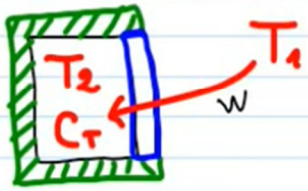


Schéma réel :



$$\varphi = C_T T_2 \quad -(1)$$

$$T_1 - T_2 = R_T \frac{d\varphi}{dt} \quad -(2)$$

(1) dans (2) $\Rightarrow$ $T_1 - T_2 = R_T \frac{d(C_T T_2)}{dt} = R_T C_T \frac{dT_2}{dt}$ $\Rightarrow$ $T_1 - T_2 = R_T C_T \dot{T}_2$

$$R_T C_T \dot{T}_2 + T_2 = T_1$$

$$R_T C_T \dot{T}_2 + T_2 = T_1 \Rightarrow \boxed{\dot{T}_2 + \frac{1}{R_T C_T} T_2 = \frac{1}{R_T C_T} T_1}$$

T_2 : sortie, T_1 : entrée

Eq. Diff du système thermique

$$S T_2(s) + \frac{1}{R_T C_T} T_2(s) = \frac{1}{R_T C_T} T_1(s)$$

$$T_2(s) = \mathcal{L}\{T_2(t)\}$$

$$T_2(s)\left[S + \frac{1}{R_T C_T}\right] = \frac{1}{R_T C_T} T_1(s)$$

$$\Rightarrow \quad G_1(s) = \frac{T_2(s)}{T_1(s)} = \frac{1/R_T C_T}{s + \frac{1}{R_T C_T}} = \frac{1}{R_T C_T s + 1}$$

poser : $R_T C_T = \tau$: constante du temps thermique

$$\boxed{G_1(s) = \frac{1}{\tau s + 1}}$$