CHAPITRE 1

Rappels mathématiques sur les nombres complexes (NC)- Nombres complexes en électrotechnique

1.1 Introduction

Les nombres complexes est un outil mathématique qui nous permettra de traiter et d'étudier des circuits électriques aussi complexes que possible d'une façon purement algébrique.

1.2 Forme cartésienne (ou forme algébrique)

La forme cartésienne (ou algébrique) est une façon de représenter un nombre complexe :
Soit un nombre complexe $\underline{Z}$ tel que $\underline{Z}$= a+bj
a : partie réelle
b : partie imaginaire
j : le nombre imaginaire tel que : j^2=-1
Un nombre complexe est **réel** si la **partie imaginaire est nulle**.
Un nombre complexe est **imaginaire pur** si la **partie réelle est nulle**.

Exemple1: Si $\underline{Z}$= -4 Alors $\underline{Z}$ est un nombre complexe réel
Si $\underline{Z}$= 5j Alors $\underline{Z}$ est un nombre complexe purement imaginaire

1.3 NC conjugués, Module et argument

- Soit un nombre complexe $\underline{Z}$ =a+bj ; le conjugué de $\underline{Z}$ est noté par : $\underline{Z}^* = a - bj$
- Le module d'un nombre complexe $\underline{Z}$= a+bj est $|\underline{Z}| = Z = \sqrt{a^2+b^2}$ il est réel, positif ou nul
- L'argument d'un nombre complexe est un angle que l'on peut exprimer en degré ou en radian (180°= π radian) et il est donné par Arg($\underline{Z}$)=$arctg(\frac{b}{a})$

Remarque :

Si **a= 0**	alors	**Arg($\underline{Z}$)=**$\frac{\pi}{2}$	pour **b>0**	ou	**Arg($\underline{Z}$)=**-$\frac{\pi}{2}$	pour **b <0**
Si **b= 0**	alors	**Arg($\underline{Z}$)=0**	pour **a>0**	ou	**Arg($\underline{Z}$)=** π	pour **a <0**

Exemple2: pour $\underline{Z}$= -4+5j

- Le conjugué de $\underline{Z}$ est $\underline{Z}^* = -4 - 5j$
- Le module de $\underline{Z}$ est $|\underline{Z}| = \sqrt{(-4)^2+5^2}$=**6.**4
- L'argument de $\underline{Z}$, **est Arg($\underline{Z}$)=**$arctg(\frac{5}{-4})$**=128.66°**

1.4 Opérations arithmétiques sur les Nombres Complexes

1.4.1 Addition et Soustraction

Les parties réelles s'additionnent (ou se soustraient) et Les parties imaginaires s'additionnent (ou se soustraient).

Soient deux nombres complexes $\underline{Z}_1$=a+bj et $\underline{Z}_2$= a'+b'j

Addition: $\underline{Z}_1+\underline{Z}_2$= a+jb+a'+b'j= (a+a') + j(b+b')

Soustraction $\underline{Z}_1-\underline{Z}_2$= a+jb-(a'+b'j)= (a-a') + j(b-b'j)

Exemple3: Soient deux nombres complexes $\underline{Z}_1$=2+3j et $\underline{Z}_2$= -4+5j

Alors $\underline{Z}_1+\underline{Z}_2$= (2-4) + j(3+5) = -2+8j

Et $\underline{Z}_1-\underline{Z}_2$ = (2+4) + j(3-5) = 6-2j

1.4.2 Multiplication d'un nombre réel et d'un nombre complexe

Soient un nombre réel k et un nombre complexe Z=a+bj. Alors La multiplication de k par Z donne : k Z=k x (a+jb)= ka+kbj

Exemple4: Soient k=2 et $\underline{Z}$= -4+5j

k. $\underline{Z}$= 2(-4) + 2. 5j= -8+10j

1.4.3 Multiplication de deux nombres complexes

Soient deux nombres complexes $\underline{Z}_1$=a+bj et $\underline{Z}_2$=a'+b'j. Alors La multiplication de deux nombres complexes nécessite la connaissance des propriétés suivantes :

$$j \times j = -1 \text{ et } \frac{1}{j} = -j$$

La multiplication donne $\underline{Z}_1$ x $\underline{Z}_2$ = (a+jb) x (a'+b'j) = a.a'+ a. b'j+ jb .a' –bb'

= (aa'-bb')+j(ab'+ba')

Exemple 5 : Soient $\underline{Z}_1$=2+3j et $\underline{Z}_2$= -4+5j

$\underline{Z}_1$x$\underline{Z}_2$= (2x(-4)) +2x5j + 3jx(-4)+3jx5j

= -8+10j -12j -15=(-8-15)+j(-12+10)=-23-2j

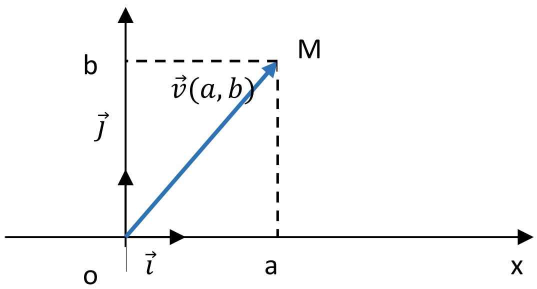
1.5 Représentation géométrique

Un nombre complexe peut être représenté par un point ou un vecteur dans le plan des nombres complexes.

Soit un repère orthonormé $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

à tout nombre complexe $\underline{Z}$ = a + jb , on peut associer :

- le point M (a,b) , point image de $\underline{Z}$: $\overrightarrow{OM} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$

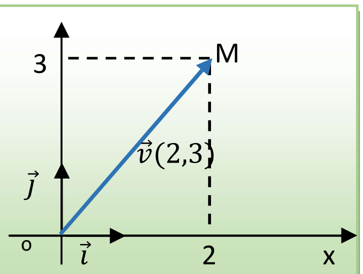


- le vecteur $\vec{v}\binom{a}{b}$, vecteur image de $\underline{Z}$: $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$

On dit alors que M (ou v) a pour affixe le nombre complexe $\underline{Z}$

Exemple 6 : Soit un nombre complexe $\underline{Z}$= 2 + 3j

Le point image est M (2, 3);$\underline{Z}$ est l'affixe de M.
Le module $|\underline{Z}|$ est la distance du point O au point M= $\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$.



1.6 Forme trigonométrique (forme polaire)

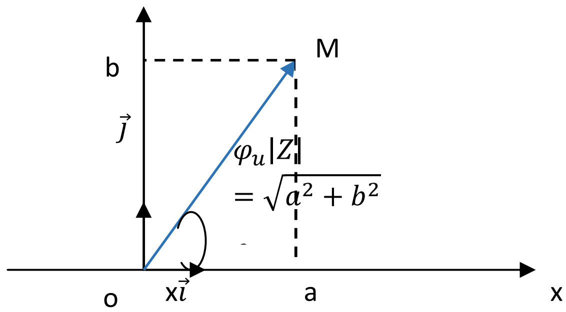
La forme trigonométrique est une autre façon de représenter un nombre complexe, il s'agit de le représenter par un module et un argument :

Soit le nombre complexe $\underline{Z}$=a+bj

Arg($\underline{Z}$)=$arctg\left(\frac{b}{a}\right) = angle\ entre\ \vec{\imath}\ et\ le\ vecteur\ \overrightarrow{OM}$

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|\underline{Z}|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin(\theta) = \frac{b}{|\underline{Z}|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



Sous forme trigonométrique et polaire, le nombre complexe $\underline{Z}$ peut s'écrire :

Frome algébrique (cartésienne)	**Forme trigonométrique**	**Forme polaire**
$\boldsymbol{\underline{Z} = a + jb}$	$\underline{Z}$=$\lvert\underline{Z}\rvert(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$	$\underline{Z} = \lvert\underline{Z}\rvert\angle\theta$
Avec $\boldsymbol{a} = \lvert\underline{Z}\rvert\boldsymbol{\cos(\theta)}$ **et** $\boldsymbol{b} = \lvert\underline{Z}\rvert\boldsymbol{\sin(\theta)}$	**Avec** $\lvert\underline{Z}\rvert = \boldsymbol{Z} = \sqrt{\boldsymbol{a^2+b^2}}$ **et** $\boldsymbol{\theta}$ **= Arg($\underline{Z}$)=**$\boldsymbol{arctg}(\frac{b}{a})$	**Avec** $\lvert\underline{Z}\rvert = \boldsymbol{Z} = \sqrt{\boldsymbol{a^2+b^2}}$ **et** $\boldsymbol{\theta}$ **= Arg($\underline{Z}$)=**$\boldsymbol{arctg}(\frac{b}{a})$

Exemple 7 : Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe$\underline{Z}$=$\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$

On cherche tout d'abord le module et l'argument

- $|\underline{Z}| = \sqrt{0.5^2+0.5^2} = 0.707$ et Arg($\underline{Z}$)= Arctg(1)=45°
- Alors $\underline{Z}$=0.7(cos (45)+j sin(45))

1.7 Représentation d'un NC par une exponentielle

Soit un nombre complexe donné sous sa forme trigonométrique

$\underline{Z}=|\underline{Z}|(\cos(\theta)+j\sin(\theta))$ Alors il peut s'écrire sous forme exponentielle par :

$\underline{Z}=|\underline{Z}|(e^{j\theta})$ avec $e^{j\theta}=\cos(\theta)+j\sin(\theta)$

$\mathbf{e^{j\theta}}$ Désigne donc le nombre complexe de module 1 ($|\mathbf{e^{j\theta}}|=\mathbf{1}$) et d'argument θ

La notation exponentielle permet de transformer les règles de calcul sur le produit et le quotient en règles de calcul sur les puissances.

Exemple 8 : Soient $\underline{Z}_1=\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}$ et $Z_2=1+j$ deux nombres complexes. Calculer le produit $\underline{Z}_1$ x $\underline{Z}_2$ en utilisant la forme exponentielle.

- $\underline{Z}_1=\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}$ en Forme Exponentielle $\underline{Z}_1=|\underline{Z}_1|e^{j\theta_1}=0.7e^{j\frac{\pi}{4}}$
- $\underline{Z}_2=1+j$ en Forme Exponentielle $\underline{Z}_2=|\underline{Z}_2|e^{j\theta_2}=1.4e^{j\frac{\pi}{4}}$

Alors $\underline{Z}_1\times\underline{Z}_2=|\underline{Z}_1|e^{j\theta_1}\times|\underline{Z}_1|e^{j\theta_1}=0.7e^{j\frac{\pi}{4}}\times1.4\,e^{j\frac{\pi}{4}}=(0.7\times1.4)\,e^{j(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})}=1.e^{j\frac{\pi}{2}}=j$

On donne les cosinus et sinus de quelques angles particuliers dans le tableau qui suit :

	Angle **θ**				
	0°	30°	45°	60°	90°
Sin**θ**	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos **θ**	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

1.8 Formule de Moivre, racine des Nombres Complexes

On considère la forme exponentielle suivante :

$\underline{Z}=|\underline{Z}|(e^{j\theta})$ alors $\underline{Z}^n=[|\underline{Z}|(e^{j\theta})]^n=[|\underline{Z}|^n(e^{jn\theta})]=|\underline{Z}|^n[\cos(n\theta)+j\sin(n\theta)]$

De la relation précédente nous exprimons **la Formule de MOIVRE** :

$$\forall n,\forall\theta,\qquad [\cos(\theta)+j\sin(\theta)]^n=[\cos(n\theta)+j\sin(n\theta)]$$

- **Exemple 9** : Calculer $\sqrt{\underline{Z}}$ pour $\underline{Z}_1=3e^{j\frac{\pi}{3}}$
  - Pour $\sqrt{\underline{Z}}=\underline{Z}^{\frac{1}{2}}=[|\underline{Z}|^{\frac{1}{2}}(e^{j\theta})]^{\frac{1}{2}}=|\underline{Z}|^{\frac{1}{2}}[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+j\sin(\frac{\theta}{2})]$ alors
  - $\sqrt{\underline{Z}}=3[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+j\sin(\frac{\pi}{6})]$

1.9 Application trigonométrique des formules d'Euler,

D'après les relations exponentielles suivantes : $\begin{cases} e^{j\theta} = cos\theta + jsin\theta \\ e^{-j\theta} = cos\theta - jsin\theta \end{cases}$

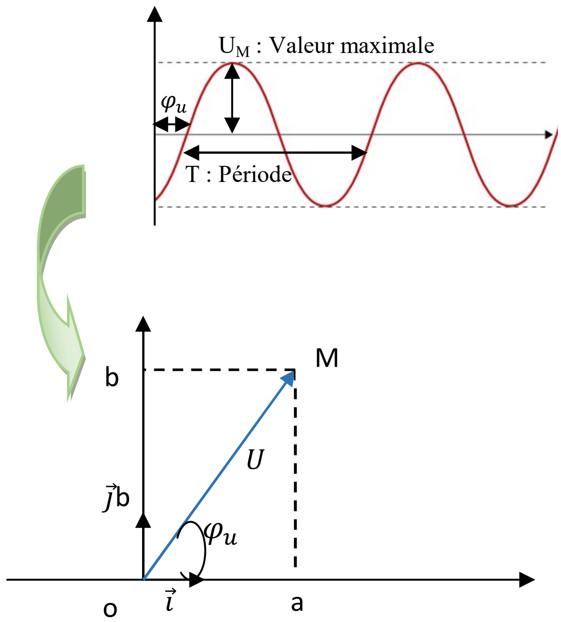
On peut déduire les Formules d'EULER suivantes :

$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{e^{+j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$ et $\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{e^{+j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$

1.10 Application des nombres complexes à l'électrotechnique

Pour un premier temps, on peut utiliser la notation complexe pour représenter les grandeurs électriques sinusoïdales. Par la suite (dans le chapitre 2) on l'utilisera pour représenter les impédances et pour résoudre un circuit électrique.

Tension sinusoïdale :



Une tension alternative sinusoïdale est de la forme
$u(t) = U\sqrt{2}\,sin(\omega t + \varphi_u)$
Avec U : valeur efficace, $U_M = U\sqrt{2}$: valeur maximale
φ_u: phase de la tension,
$\omega = 2\pi f$ Pulsation, f: fréquence

A une tension sinusoïdale $u(t)$ est associé le nombre complexe $\underline{U} = Ue^{j\varphi_u}$
Avec U = $|\underline{U}|$ et arg $(\underline{U}) = \varphi_u$

Courant Sinusoïdal :

De même pour le courant sinusoïdal :

$i(t) = I\sqrt{2}\,sin(\omega t + \varphi_i)$ Sous forme exponentielle $\underline{I} = Ie^{j\varphi_i}$

Exemple 10 : Déterminer la forme complexe des tensions et courants suivants :

$u(t) = 220\sqrt{2}\,sin(\omega t)$, $i_1(t) = 2.5\sqrt{2}\,sin(\omega t - \frac{\pi}{6})$, $i_2(t) = 5sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$,

- $\underline{U} = 220e^{j0} = 220\angle 0\ V = 220V$
- $\underline{I_1} = 2.5e^{-\frac{\pi}{6}j} = 2.5\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + jsin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2.5\angle -\frac{\pi}{6}$ A
- $\underline{I_2} = \frac{5}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{3}j} = 3.53\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + jsin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 3.53\angle\frac{\pi}{3}$