

Solution TD N° 1

Nombres complexes &
 Rappels sur les lois fondamentales de l'électricité

Exercice 1

Soient les deux nombres complexes suivants : $\underline{Z}_1 = 1 + 3j$ et $\underline{Z}_2 = 2 - 4j$

1. Le module et l'argument des complexes $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2$:

$$|\underline{Z}_1| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}, \quad \text{Arg}(\underline{Z}_1) = \text{Arctang}\left(\frac{3}{1}\right) = 71^\circ.56$$

$$|\underline{Z}_2| = \sqrt{(2)^2 + (4)^2} = \sqrt{20}, \quad \text{Arg}(\underline{Z}_2) = \text{Arctang}\left(\frac{-4}{2}\right) = -63^\circ.43$$

2. La forme trigonométrique de $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2$:

$$\underline{Z}_1 = |\underline{Z}_1|[\cos\theta_1 + j\sin\theta_1] = \sqrt{10}[\cos(71^\circ.56) + j\sin(71^\circ.56)]$$

$$\underline{Z}_2 = |\underline{Z}_2|[\cos\theta_2 + j\sin\theta_2] = \sqrt{20}[\cos(-63^\circ.43) + j\sin(-63^\circ.43)]$$

3. La forme exponentielle de $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2$

$$\underline{Z}_1 = |\underline{Z}_1|e^{j\theta_1} = \sqrt{10}e^{j71^\circ.56}$$

$$\underline{Z}_2 = |\underline{Z}_2|e^{j\theta_2} = \sqrt{20}e^{-j63^\circ.43}$$

4. La forme Polaire de $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2$

$$\underline{Z}_1 = |\underline{Z}_1| \angle \theta_1 = \sqrt{10} \angle 71^\circ.56$$

$$\underline{Z}_2 = |\underline{Z}_2| \angle \theta_2 = \sqrt{20} \angle -63^\circ.43$$

Exercice 2

Données : $R = 10\Omega, L_1\omega = 24\Omega, L_2\omega = 12\Omega, \frac{1}{C\omega} = 8\Omega$

Alors les impédances correspondantes sont : $\underline{Z}_R = 10\Omega, \underline{Z}_{L1} = j24 [\Omega], \underline{Z}_{L2} = j12 [\Omega], \underline{Z}_C = -j8 [\Omega],$

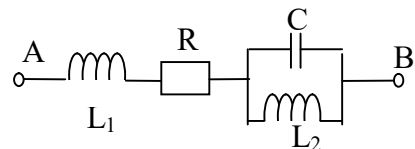
1. Détermination des impédances complexes totales $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2,$ et $\underline{Z}_3,$ entre le point A et B des circuits suivants :

1.1 Premier circuit : Détermination de l'impédance complexe totale \underline{Z}_{1eq}

$$\underline{Z}_{1eq} = \underline{Z}_{L1} + \underline{Z}_R + (\underline{Z}_C // \underline{Z}_{L2})$$

$$(\underline{Z}_C // \underline{Z}_{L2}) = \frac{\underline{Z}_C \times \underline{Z}_{L2}}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_{L2}} = \frac{(-j8)(j12)}{-j8 + j12} = \frac{96}{j4} \times \frac{j}{j} = -24j$$

$$\underline{Z}_{1eq} = \underline{Z}_{L1} + \underline{Z}_R + (\underline{Z}_C // \underline{Z}_{L2}) = j24 + 10 - j24 = 10\Omega$$



$$\underline{Z}_{1eq} = 10\Omega$$

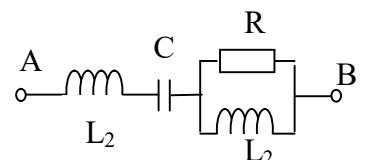
1.2 Deuxième circuit : Détermination de l'impédance complexe totale \underline{Z}_{2eq}

$$\underline{Z}_{2eq} = \underline{Z}_{L2} + \underline{Z}_C + (\underline{Z}_R // \underline{Z}_{L2})$$

$$(\underline{Z}_R // \underline{Z}_{L2}) = \frac{\underline{Z}_R \times \underline{Z}_{L2}}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_{L2}} = \frac{10(j12)}{10 + j1} = \frac{120j}{10 + j1} \times \frac{(10 - j12)}{(10 - j12)} = 5.9 + j4.91$$

$$\underline{Z}_{2eq} = j12 - j8 + 5.9 + j4.91 = 5.9 + j8.91$$

$$\underline{Z}_{2eq} = 6 + j9$$

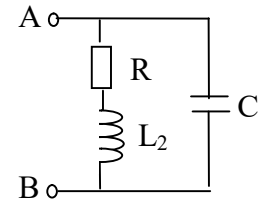


1.3 Troisième circuit : Détermination de l'impédance complexe totale \underline{Z}_{3eq}

$$\underline{Z}_{3eq} = (\underline{Z}_R + \underline{Z}_{L2}) // \underline{Z}_C = \frac{(10+j12)(-j8)}{10+j12-j8}$$

$$= \frac{-j80 + 96}{10 + j4} \times \frac{10 - j4}{10 - j4} = 5.51 - j10.2$$

$$\underline{Z}_{3eq} = 5.5 - j10.2$$



2. Nature ainsi que déphasage entre la tension \underline{U} et le courant \underline{I} et aux bornes de chaque impédance.

	Premier Circuit	Deuxième circuit	Troisième circuit
Impédance	$\underline{Z}_{1eq} = 10\Omega$	$\underline{Z}_{2eq} = 6 + j9$	$\underline{Z}_{3eq} = 5.5 - j10.2$
Nature de l'impédance	Impédance Résistive car la réactance $X = 0$	Impédance Inductive car la réactance $X = 9 > 0$	Impédance Capacitive car la réactance $X = -10.2 < 0$
Déphasage entre la tension \underline{U} et le courant \underline{I} aux bornes de l'impédance	$\text{Arg}(\underline{U}) - \text{Arg}(\underline{I}) = \text{Arg}(\underline{Z}_{1eq}) = 0^\circ$ \Rightarrow Le courant et la tension sont en phase.	$\text{Arg}(\underline{U}) - \text{Arg}(\underline{I}) = \text{Arg}(\underline{Z}_{2e}) = \text{Arctg}\left(\frac{9}{6}\right) = 56^\circ.3$ \Rightarrow Le courant est en retard par rapport à la tension.	$\text{Arg}(\underline{U}) - \text{Arg}(\underline{I}) = \text{Arg}(\underline{Z}_{3e}) = \text{Arctg}\left(\frac{-10.2}{5.5}\right) = -61^\circ.62$ \Rightarrow Le courant est en avance par rapport à la tension.

3. Représentation de Fresnel du courant \underline{I} et de la tension \underline{U} de chaque cas (la tension \underline{U} est considérée à l'origine des phases).

	Premier Circuit	Deuxième circuit	Troisième circuit
Impédance	$\underline{Z}_{1eq} = 10\Omega$	$\underline{Z}_{2eq} = 6 + j9$	$\underline{Z}_{3eq} = 5.5 - j10.2$
Circuit Equivalent			
Phases de la tension \underline{U} et du courant \underline{I}	$\underline{U} = U \angle 0$ $\text{Arg}(\underline{I}_1) = \text{Arg}(\underline{U}) - \text{Arg}(\underline{Z}_{1eq}) = 0^\circ$	$\underline{U} = U \angle 0$ $\text{Arg}(\underline{I}_2) = \text{Arg}(\underline{U}) - \text{Arg}(\underline{Z}_{2eq}) = -56^\circ.3$	$\underline{U} = U \angle 0$ $\text{Arg}(\underline{I}_3) = \text{Arg}(\underline{U}) - \text{Arg}(\underline{Z}_{2e}) = 61^\circ.62$
Représentation de Fresnel			

Exercice 3

Données: $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $C = 120\mu F$, $L = 20mH$.

Les impédances correspondantes : $Z_{R1} = 5\Omega$, $Z_{R2} = 10\Omega$, $Z_L = jL\omega = j20 \times 10^{-3} \times 314 = j6.28$,

$$Z_C = \frac{-1}{C\omega}j = \frac{-1}{120 \times 10^{-6} \times 314}j = -j26.54$$

1. Calcul de l'impédance complexe équivalente du circuit :

$$Z_T = Z_L + Z_{R1} + (Z_{R2} // Z_C)$$

$$(Z_{R2} // Z_C) = \frac{Z_{R2} \times Z_C}{Z_{R2} + Z_C} = \frac{10(-j26.54)}{10 - j26.54}$$

$$= \frac{-j265.4}{10 - j26.54} \times \frac{10 + j26.54}{10 + j26.54} = \frac{-j2654 + 7043.71}{100 + 704.37} = 8.75 - j3.3$$

$$Z_T = Z_L + Z_{R1} + (Z_{R2} // Z_C) = j6.28 + 5 + 8.75 - j3.3 = 13.75 + j3$$

$$|Z_T| = \sqrt{(13.75)^2 + (3)^2} = 14.07\Omega$$

$$\text{Arg}(Z_T) = \text{Arctang}\left(\frac{3}{13.75}\right) = 12^\circ.3$$

2. En Dédire l'admittance complexe.

$$Y_t = \frac{1}{Z_t} = \frac{1}{14.07 \angle 12.3^\circ} = 0.071 \angle -12.3^\circ = 0.07 - j0.015$$

3. Calcul des intensités complexes I , I_1 et I_2 .

3.1 Courant I : $U = Z_t \cdot I \Rightarrow I = \frac{U}{Z_t} = U \times Y_t = (120 \angle 0^\circ) \times (0.071 \angle -12.3^\circ) = 8.55 \angle -12.3^\circ$

3.2 Courant I_1 : Diviseur de courant :

$$I_1 = \frac{Z_C}{Z_{R2} + Z_C} \times I = \frac{-j26.54}{10 - j26.54} \times I = \frac{-j26.54(10 + j26.54)}{(10 - j26.54)(10 + j26.54)} \times I = \frac{704.36 - j265.4}{100 + 704.36} \times I$$

$$= (0.875 - j0.329)I = (0.94 \angle -20.64^\circ) \times (8.55 \angle -12.3^\circ) = 8 \angle -33^\circ$$

3.3 Courant I_2 : Diviseur de courant :

$$I_2 = \frac{Z_{R2}}{Z_{R2} + Z_C} \times I = \frac{10}{10 - j26.54} \times I = \frac{10(10 + j26.54)}{(10 - j26.54)(10 + j26.54)} \times I = \frac{100 + j265.4}{100 + 704.36} \times I$$

$$= (0.124 + j0.33) \times I = (0.35 \angle 69.4^\circ) \times (8.55 \angle -12.3^\circ) = 3 \angle 57^\circ$$

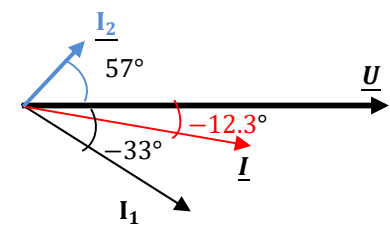
4. Le facteur de puissance du circuit : $K = \cos\varphi = \cos(12.3^\circ) = 0.977$

5. **Le déphasage est:** $\varphi = \text{Arg}(U) - \text{Arg}(I_1) = \text{Arg}(Z_t) = 12^\circ.3$

\Rightarrow Le courant est en retard par rapport à la tension. C'est un déphasage arrière « AR »

6. Représentation de Fresnel de la tension U et des courants I , I_1 et I_2 .

$$U = 120 \angle 0^\circ, I = 8.55 \angle -12.3^\circ, I_1 = 8 \angle -33^\circ, I_2 = 3 \angle 57^\circ$$



Exercice 4 :

Calcul des courants complexes I_1, I_2 et I_3 sous forme exponentielle :

Les impédances en forme exponentielle :

$$\underline{Z}_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad |\underline{Z}_1| = 4\Omega, \text{Arg}(\underline{Z}_1) = 0^\circ \underline{Z}_1 = 4e^{j0}$$

$$\underline{Z}_2 = 2 + j9 \quad \Rightarrow \quad |\underline{Z}_2| = 9.22\Omega, \text{Arg}(\underline{Z}_2) = \text{Arctg}\left(\frac{9}{2}\right) = 77^\circ.47 \underline{Z}_2 = 9.22e^{j77.47}$$

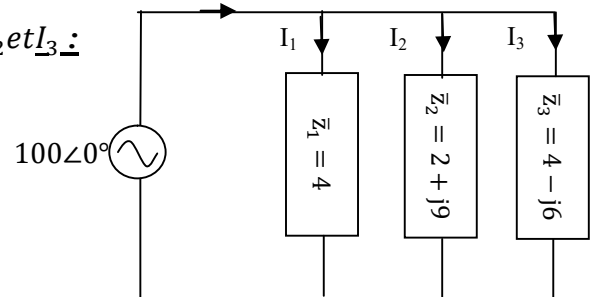
$$\underline{Z}_3 = 4 - j6 \quad \Rightarrow \quad |\underline{Z}_3| = 7.21\Omega, \text{Arg}(\underline{Z}_3) = \text{Arctg}\left(\frac{-6}{4}\right) = -56^\circ.31 \underline{Z}_3 = 7.21e^{-j56.31}$$

La loi d'ohm pour chaque branche nous donne les I_1, I_2 et I_3 :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} = \frac{100e^{j0^\circ}}{4e^{j0^\circ}} = 25e^{j0^\circ} \text{ [A]}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \frac{100e^{j0^\circ}}{9.21e^{j77.47^\circ}} = 10.85e^{-j77.47^\circ} \text{ [A]}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_3} = \frac{100e^{j0^\circ}}{7.21e^{-j56.3^\circ}} = 13.87e^{j56.3^\circ} \text{ [A]}$$



La loi des nœuds nous donne le courant I somme des courants I_1, I_2 et I_3 :

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

Pour la somme on utilise la forme cartésienne :

$$\underline{I}_1 = 25 \text{ [A]}$$

$$\underline{I}_2 = 2.35 - j10.59 \text{ [A]}$$

$$\underline{I}_3 = 7.69 + j11.54 \text{ [A]}$$

$$\text{Alors } \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 25 + 2.35 - j10.59 + 7.69 + j11.54 = 35.04 + j0.95$$

$$|\underline{I}| = \sqrt{(35.04)^2 + (0.95)^2} = 35 \text{ A}$$

$$\text{Arg}(\underline{I}) = \text{Arctan}\left(\frac{0.95}{35.04}\right) = 1^\circ.55$$

1) Calcul des puissances active, réactive et apparente dans les trois impédances.

Impédance (charge)	$\underline{Z}_1 = 4$	$2 + j9$	$\underline{Z}_3 = 4 - j6$
$P = UI \cdot \cos\varphi$	$P_1 = 100 \times 25 \cdot \cos(0^\circ)$ $P_1 = \mathbf{2500W}$	$P_2 = 100 \times 10.85 \cdot \cos(77^\circ.47)$ $P_2 = \mathbf{235.4W}$	$P_3 = 100 \times 13.86 \cdot \cos(-56.31)$ $P_3 = \mathbf{769.37W}$
$Q = UI \cdot \sin\varphi$	$Q_1 = 100 \times 25 \cdot \sin(0^\circ)$ $Q_1 = \mathbf{0VAR}$	$Q_2 = 100 \times 10.85 \cdot \sin(77^\circ.47)$ $Q_2 = \mathbf{1059.16VAR}$	$Q_3 = 100 \times 13.86 \cdot \sin(-56.31)$ $Q_3 = \mathbf{-1154VAR}$
$S = UI$ $= \sqrt{P^2 + Q^2}$	$S_1 = P_1 = \mathbf{2500VA}$	$S_2 = UI = 100 \times 10.85$ $S_2 = \mathbf{1085VA}$	$S_3 = UI = 100 \times 13.87$ $S_3 = \mathbf{1387VA}$

2) Calcul des puissances active, réactive et apparente fournies par la source en utilisant le théorème de Boucherot

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 = 2500 + 235.4 + 769.37 = 3504.77W$$

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 + 1059.15 - 1154 = -94.84VAR$$

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = \sqrt{(3504.77)^2 + (-94.84)^2} = 3506VA$$

3) **Facteur de puissance :** $\cos\varphi = \frac{P_T}{S_T} = \frac{3504.77}{3506} = 0.999$

Nature de la charge : Comme $Q_T < 0$ alors la charge est capacitive

4) *Vérification des résultats par la méthode du calcul direct des puissances :*

Puissance active : $P_T = U \times I \times \cos\varphi$ avec $\varphi_T = \text{Arg}(\underline{U}) - \text{Arg}(\underline{I}) = 0 - 1^\circ.55 = 1^\circ.55$

Alors $P_T = 100 \times 35 \times \cos(-1^\circ.55) = 3498.72\text{W}$

Puissance réactive : $Q_T = U \times I \times \sin\varphi_T = 100 \times 35 \times \sin(-1^\circ.55) = -94.67\text{VAR}$

Puissance apparente : $S_T = U \times I = 100 \times 35 = 3500\text{VA}$