Algèbre de Banach

C.H.

10 janvier 2022

Chapitre 1

1 Espaces et algèbres de Banach

Définition 1 *Un espace normé E est dit "complet" si toute suite de Cauchy de E est convergente.*
Un espace vectoriel réel normé complet est appelé "espace de Banach ".

Exemple 2 *Tout espace vectoriel réel normé de dimension finie est un espace de Banach.*

Définition 3 *Soit $\mathcal{A}$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, l'application :*

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

$$(a, b) \mapsto a.b$$

qui vérifie, $\forall a, b, c \in \mathcal{A}$:

1. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
2. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *et* $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

fait de $\mathcal{A}$ une **Algèbre**.
Si de plus $a \cdot b = b \cdot a$, l'algèbre $\mathcal{A}$ est dite **commutative**.
S'il existe **e** dans $\mathcal{A}$ telle que $a \cdot e = e \cdot a = a$.
$\mathcal{A}$ est dite : **Algèbre unitaire** et **e** s'appelle l'unité de l'algèbre $\mathcal{A}$.

Définition 4 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
*Une **"algèbre normée"** est une algèbre muni d'une norme vérifiant :*
Pour tous x et y de $\mathcal{A}$:

$$\| xy \| \leq \| x \| \| y \| \tag{1}$$

On notera que la condition (5) assure la continuité de la multiplication de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$(Exercice).

2 Algèbre de Banach

Une **Algèbre de Banach** sur le corps des complexes $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{C}$-algèbre normée complète : (C'est un espace vectoriel dans lequel est aussi définie une multiplication des vecteurs, qui possède les propriétés de bilinéarité (en particulier de distributivité et d'associativité) telle que l'espace vectoriel normé sous-jacent soit en outre un espace de Banach (espace vectoriel complet pour la norme).

Définition 5 *Soit $\mathcal{A}$ un espace de Banach complexe muni de la multiplication $(a,b) \mapsto a \cdot b$*
$\mathcal{A}$ est dite **Algèbre de Banach**, *si les conditions suivantes sont satisfaites :*
$\forall a, b, c \in \mathcal{A}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

1. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
2. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *et* $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
3. $(\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) = \lambda(a \cdot b)$
4. $\| a \cdot b \| \leq \| a \| \| b \|$
5. *Si de plus $a \cdot b = b \cdot a$, l'algèbre $\mathcal{A}$ est dite* **commutative**.
6. *S'il existe e dans $\mathcal{A}$ telle que $a \cdot e = e \cdot a = e$, avec $\| e \| = 1$*
   $\mathcal{A}$ est dite : **Algèbre de Banach unitaire**.

Remarque 6 1. $\forall a \in \mathcal{A}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \| a^n \| \leq \| a \|^n$.

2. *Il existe au plus un élément unité e.*
   On peut toujours ***Plonger isométriquement*** *une algèbre de Banach quelconque dans une algèbre de Banach unitaire.*
   En effet Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach, on a $\left(\mathcal{A}^{\#} = \mathcal{A} \times C, +, ., \cdot, \| \ . \ \|\right)$ avec
   $(x, \alpha) \cdot (y, \beta) = (\alpha y + \beta x + xy, \alpha\beta)$ *et* $\| (x, \alpha) \| = \| x \| + | \alpha |$, *est une algèbre de Banach unitaire et $\mathcal{A}$ se plonge isométriquement dans $\mathcal{A}^{\#}$.*

Exemple 7 1. $(C[a,b], \| \ . \ \|_\infty)$. *équipé des opérations usuelles, de la multiplication $(f.g)(t) = f(t)g(t)$ et de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} | f(t) |$ est une algèbre de Banach commutative. (Exercice)*

2. $(C[a,b], \| \ . \ \|_1)$ *n'est pas une algèbre de Banach. En effet la condition 5 n'est pas vérifiée :*

$$\| f.g \|_1 = \int_a^b f(t)g(t)dt \not\leq \| f \|_1 \| g \|_1 .$$

En effet si on considère $f(t) = t, \quad g(t) = t$, on a : $\int_0^1 t^2 dt = \dfrac{t^3}{3} |_0^1 = 1/3$ *et* $\int_0^1 t dt \int_0^1 t dt = \dfrac{t^2}{2} |_0^1 \dfrac{t^2}{2} |_0^1 = \frac{1}{4}$ $1/3 \not\leq 1/4$

Exemple 8 1. *Soit X un ensemble quelconque ; l'ensemble $\mathcal{B}(X)$ des fonctions bornées de X dans $\mathbb{C}$, équipé des opérations usuelles et de la norme du "sup"*

$$\| f \|_\infty = \sup_{x \in X} | f(x) |$$

est une algèbre de Banach unitaire, commutative.

2. *Si E est un espace normé, alors $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires et bornées de E dans lui même est une algèbre normée unitaire. C'est une algèbre de Banach si E est un espace de Banach.*
3. *L'algèbre des matrices carrées $n \times n$, avec la norme :*

$$\| \mathcal{A} \| = \sup_{\|X\|=1} \| \mathcal{A}X \|,$$

où X est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et où $X \mapsto \| X \|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ est une algèbre de Banach

3 Inversibilité et spectre

3.1 Inversibilité

Définition 9 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire. Un élément $x \in \mathcal{A}$ est dit inversible s'il admet un inverse dans $\mathcal{A}$, c'est-à-dire s'il existe $x^{-1} \in \mathcal{A}$ tel que*

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e$$

où e est l'élément unité de $\mathcal{A}$.
On notera $Inv(A)$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{A}$.

1. Si $x \in \mathcal{A}$ admet un inverse, il est nécessairement unique.
2. $Inv(\mathcal{A})$ est un groupe (pour la multiplication).
3. $\forall a, b \in Inv(\mathcal{A}), a.b \in Inv(\mathcal{A})$ et on a $(a.b)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Exemple 10 1. *Dans l'algèbre de Banach $\mathbb{K}$, a est inversible si et seulement si $a \neq 0$, $Inv(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$.*
2. *Dans l'algèbre de Banach $M_n(\mathbb{K})$, A est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.

Nous allons donner un lemme élémentaire sur les éléments inversibles qui sera crucial dans la suite. Ce lemme montre comment cette notion algébrique se mélange avec la topologie.

Lemme 11 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et $x \in \mathcal{A}$ tel que $\| x \| < 1$. Alors :*
1. *$e - x \in Inv(\mathcal{A})$,*
2. *$\| (e-x)^{-1} \| \leq \frac{1}{1-\|x\|}$,*
3. *$\| (e-x)^{-1} - e - x \| \leq \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$.*

Preuve. Comme $\| x^n \| \leq \| x \|^n$ et $\| x \| < 1$, la suite $(s_n)_{n\geq 0}$, définie par

$$s_n = e + x + x^2 + \cdots + x^n,$$

forme une suite de Cauchy dans $\mathcal{A}$. Puisque $\mathcal{A}$ est complète, il existe $s \in \mathcal{A}$ tel que $s_n \to s$. Un calcul immédiat montre que

$$s_n(e-x) = e - x^{n+1} = (e-x)s_n$$

et comme $x^n \to 0$, on obtient par continuité de la multiplication que

$$s(e-x) = e = (e-x)s.$$

En d'autre terme, $e-x$ est inversible et son inverse est

$$(e-x)^{-1} = s = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \tag{2}$$

ce qui démontre 1.
On a

$$\| (e-x)^{-1} \| = \| \sum_{n=0}^{\infty} x^n \| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \| x^n \| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \| x \|^n = \frac{1}{1- \| x \|}$$

D'après 6, on a

$$(e-x)^{-1} - e - x = \sum_{n=2}^{\infty} x^n,$$

Ce qui donne

$$\| (e-x)^{-1} - e - x \| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \| x \|^n = \frac{\| x \|^2}{1- \| x \|}$$

■

Corollaire 12 *Soit $a \in \mathcal{A}$ tel que $\| e - a \| < 1$. Alors a est inversible et $\| a^{-1} \| \leq \frac{1}{1-\|e-a\|}$.*

Preuve. Soit $\| e-a \| < 1$ pour $a \in A$.
On a $a = e - (e-a)$ et on a $\| a^{-1} \| = \| (e-(e-a))^{-1} \| \leq \frac{1}{1-\|e-a\|}$.
■

Lemme 13 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach, d'élément unité $e = 1$. La boule ouverte de centre 1 et de rayon 1 dans $\mathcal{A}$ ne contient que des éléments inversibles.*

Preuve. Exercice ■

Exemple 14 *Dans l'algèbre des matrices carrées $n \times n$, $Inv(A)$ n'est autre que le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{C})$ ($M \in A$ est inversible $\Leftrightarrow detM \neq 0$).*

Exercice 15 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire, soit $a \in Inv(\mathcal{A}), h \in \mathcal{A}$, tel que $\| h \| \| a^{-1} \| < 1$.*

1. *Montrer que $a+h$ est inversible et donner son inverse.*
2. *Montrer que*

$$\| (a+h)^{-1} - a^{-1} \| \leq \| a^{-1} \| \left(\frac{1}{1- \| a^{-1}h \|} - 1 \right).$$

3. *Que peut on déduire ?*

Exercice 16 *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire, $a \in Inv(\mathcal{A})$ et $h \in \mathcal{A}$.
On suppose que $\| h \| \leq \frac{1}{2} \| a^{-1} \|^{-1}$, démontrer que*

1. $a+h \in Inv(\mathcal{A})$

2. $\| (a+h)^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ha^{-1} \| \leq 2 \| a^{-1} \|^3 \| h \|^2$

Proposition 17 *L'ensemble $Inv(\mathcal{A})$ est ouvert dans $\mathcal{A}$ et l'application $a \mapsto a^{-1}$ est continue de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$*

Preuve. Soit $a \in Inv(\mathcal{A})$. Montrons que $B(a,r) \subset Inv(\mathcal{A})$ tel que $r = \frac{1}{\|a^{-1}\|} = \| a^{-1} \|^{-1}$. Soit $b \in B(a,r)$ donc $\| b-a \| < r$, on a $b = a-(a-b) = a\left[e - a^{-1}(a-b)\right]$ et $\| a^{-1}(a-b) \| \leq \| a \|^{-1} \| a-b \| < \frac{1}{r}.r = 1$.
Donc d'après le lemme 11, $e - a^{-1}(a-b)$ est inversible et donc $b = a(e-a^{-1}(a-b)$ est inversible et on a

$$b^{-1} = \left[e - a^{-1}(a-b)\right]^{-1} a^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a^{-1}(a-b)\right)^k a^{-1}$$

Montrons que (exercice) :

$$\||\| b^{-1} - a^{-1} \| \leq \frac{\| a^{-1} \|^2 \| b-a \|}{1 - \| a^{-1} \| \|\| b-a \|}.$$

Soit (a_n) une suite d'opérateurs inversibles tel que $a_n \to a$ avec a inversible. On a

$$\exists N : n \geq N \quad \| a_n - a \| < \| a^{-1} \|^{-1}.$$

Et

$$\| a_n^{-1} - a^{-1} \| \leq \frac{\| a^{-1} \|^2 \| a_n - a \|}{1 - \| a^{-1} \| \|\| a_n - a \|}.$$

Pour $n \to \infty$ on obtient

$$\| a_n^{-1} - a^{-1} \| \to 0$$

donc $a_n^{-1} \to a^{-1}$, donc l'application $a \to a^{-1}$ dans $Inv(\mathcal{A})$ est continue.

■

Remarque 18 *On notera que la norme de a^{-1} ne se déduit en générale pas de celle de a.*

Exemple 19 *Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre de Banach des matrices réelles 2×2, soit la matrice $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, avec $0 < b < a$. On a $A^{-1} = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{bmatrix}$, $\| A \| = \sup_{\|X\|=1} \| AX \| = a$ et $\| A^{-1} \| = b^{-1}$, cette norme peut être aussi grande qu'on veut en diminuant b sans pour autant changer la norme de la matrice originelle, en particulier, il ne faut pas croire que $\| x^{-1} \| = \| x \|^{-1}$, toute fois on a toujours*

$$\| x \| \|\| x^{-1} \| \geq \| xx^{-1} \| = \| 1 \| = 1.$$

Exercice 20 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach, $a \in Inv(\mathcal{A})$ et $b \in \mathcal{A}$, on suppose que*

$$\| a-b \| \leq \frac{\| a \|^2}{\| a^{-1} \|}.$$

Démontrer que $b \in Inv(\mathcal{A})$ et que

$$\| b^{-1} - a^{-1} \| \leq \frac{\| a^{-1} \|^2 \| b-a \|}{1 - \| a^{-1} \| \|\| b-a \|}$$

Proposition 21 *Soient* $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathcal{A} \quad n \geq 1, \quad \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ *une partie commutative de* $\mathcal{A}$
i.e. $(a_i a_j = a_j a_i, \quad \forall i, j = 1, \cdots n)$, *soit* $a = a_1.a_2 \cdots a_n = \prod_{i=1}^n a_i$.
a est inversible si et seulement si chaque a_i *est inversible et on a*

$$a^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \cdots a_2^{-1} a_1^{-1}.$$

Preuve.

1. Si chaque a_i est inversible alors a est inversible.
2. Si a est inversible alors $\exists b \in \mathcal{A}$ tel que $ab = ba = e$

$$e = ab = \prod_{i=1}^n a_i b = a_k \prod_{i \neq k}^n a_i b$$

$$e = ba = b \prod_{i \neq k}^n a_i a_k$$

a_k inversible. De même chaque a_i est inversible.

■

3.2 Spectre

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et $x \in \mathcal{A}$.
Le **spectre** $\sigma(x)$ de x est défini par

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \notin Inv(\mathcal{A})\}$$

λ est dite valeur spectrale de x.
Le **spectre ponctuel** $\sigma_p(x)$ de x est défini par

$$\sigma_p(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : ker(x - \lambda e) \neq \{0\}.\}$$

C'est l'ensemble des valeurs propres de x (λ est valeur propre de x si $x - \lambda e$ n'est pas injective).
On a :

$$\sigma_p(x) \subset \sigma(x).$$

Si $\dim E < \infty$ alors $\sigma_p(x) = \sigma(x)$. (Les valeurs propres et les valeurs spectrales sont les mêmes).

Le complémentaire de $\sigma(x)$ est appelé **ensemble résolvant** de x et est noté $R(x)$.
Autrement dit,

$$R(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad x - \lambda e \in Inv(\mathcal{A})\}$$

La **résolvante** de x est l'application définie sur $R(x)$, à valeurs dans $\mathcal{A}$ donnée par

$$R(\lambda, x) = (x - \lambda e)^{-1}, \quad \lambda \in R(x).$$

Le **rayon spectral** de x est le nombre

$$r(x) = \sup \{| \lambda | : \quad \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Exemple 22 1. *Soit E un espace de Banach de dimension finie, soit $\mathcal{A} = B(E)$. Le spectre d'un élément $a \in \mathcal{A}$ est l'ensemble de toutes les valeurs propres de a qu'on appelle spectre ponctuel.*

2. *Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie, soit $a \in B(H)$, chaque valeur propre de a est une valeur spectral de a, l'inverse n'est pas vrai :*
   Soit S_r défini sur l^2 par :
   $S_r(x_1, x, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$. On a
   0 est une valeur spectrale de S_r et n'est pas une valeur propre de S_r(TD).

3. *Le spectre d'une matrice dans $M_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble de ses valeurs propres*

4. *Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \quad A - \lambda I_2 \quad n'est\ pas\ inversible\}$$

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \quad det(A) = 0\} = \big\{\lambda \in \mathbb{R} : \quad \lambda^2 + 1 = 0\big\} = \emptyset$$

Proposition 23 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on a*

$$\sigma(a + \alpha e) = \sigma(a) + \alpha.$$

Preuve. *Si $\lambda \in \sigma(a + \alpha e)$. Alors*

$$\lambda e - (a + \alpha e) = (\lambda - \alpha)e - a$$

n'est pas inversible, donc

$$\lambda - \alpha \in \sigma(a),$$

i.e.

$$\lambda \in \sigma(a) + \alpha$$

■

Proposition 24 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et soit $a \in \mathcal{A}$.*

1. *L'ensemble résolvant $R(a)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{K}$.*
2. *Le spectre $\sigma(a)$ est un ensemble fermé borné non vide du disque fermé dans $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon $\| a \|$.*
3. *Si $a \in Inv(\mathcal{A})$, alors :*

$$\sigma(a^{-1}) = (\sigma(a))^{-1} = \{\frac{1}{\lambda} : \quad \lambda \in \sigma(a)\}$$

Preuve.

1. $R(a) \neq \emptyset$ et $R(a)$ un ouvert :
   D'après le lemme 11, on a pour $\| b \| < 1$, $e - b$ inversible, donc $\lambda(e - b)$ (avec $\lambda \neq 0$) inversible.
   Soit λ tel que $0 \leq \| a \| < | \lambda |$, on a $\lambda e - a$ inversible donc $a - \lambda e$ inversible et donc $R(a) \neq \emptyset$.

$R(a)$ un ouvert de $\mathbb{K}$:
Soit $\lambda_0 \in R(a)(a_{\lambda_0} = a - \lambda_0 e$ inversible), montrons qu'il existe $r > 0$ tel que $B(\lambda_0, r) \subset R(a)$.
Soit $r = \frac{1}{\|a_{\lambda_0}^{-1}\|}$, soit $\lambda \in B(\lambda_0, r)$ c.a.d. $|\lambda - \lambda_0| < r$. Montrons que $\lambda \in R(a)$ c.a.d. $(a - \lambda e)$ inversible.
On a $\| a_\lambda - a_{\lambda_0} \|=\| (\lambda - \lambda_0)e \|=| \lambda - \lambda_0 |< r = \frac{1}{\|a_{\lambda_0}^{-1}\|}$ donc $\| a_{\lambda_0^{-1}} \|\| a_\lambda - a_{\lambda_0} \|< 1$, donc

$$\| a_{\lambda_0}^{-1} a_\lambda - e \|\leq\| a_{\lambda_0}^{-1} \|\| a_\lambda - a_{\lambda_0} \|< 1.$$

Donc $a_{\lambda_0}^{-1} a_\lambda$ est inversible et donc a_λ inversible, d'où $\lambda \in R(a)$ et donc $R(a)$ est un ouvert de $\mathbb{K}$
2ème méthode
On considère $f : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ définie par $f(\lambda) = \lambda e - a$.
f est clairement continue et $R(a) = f^{-1}(Inv(\mathcal{A}))$. Comme $Inv(\mathcal{A})$ est ouvert dans $\mathcal{A}$, on en déduit que $R(a)$ est ouvert dans $\mathbb{C}$.

2. $\sigma(a)$ est un ensemble fermé borné du disque fermé dans $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon $\| a \|$.
On a $R(a)$ est un ouvert donc $\sigma(a)$ est fermé.
Pour $|\lambda| > \|a\|$, on a $a - \lambda e = -\lambda(e - \frac{1}{\lambda}a)$ qui est inversible car $\|\frac{1}{\lambda}a\| < 1$, autrement dit, par la contraposée (dans 1.),si $\lambda \in \sigma(a)$ alors $|\lambda| \leq \|a\|$ donc $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad a - \lambda e \notin Inv(\mathcal{A})\}$ est dans le disque de centre 0 et de rayon $\|a\|$

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \quad |\lambda| \leq \|a\|\}$$

($\sigma(a)$ bornée).

3. Soit $\lambda \in \sigma(a^{-1})$, $\quad a^{-1} - \lambda e$ non inversible, comme $\lambda \neq 0$, on peut écrire $a^{-1} - \lambda e = -\lambda a^{-1}(a - \lambda^{-1}e)$, donc $a - \lambda^{-1}e$ n'est pas inversible. Autrement dit $\lambda^{-1} \in \sigma(a)$ c.a.d. $\lambda = (\lambda^{-1})^{-1} \in (\sigma(a))^{-1}$ par conséquent

$$\sigma(a^{-1}) \subset (\sigma(a))^{-1}. \tag{3}$$

Appliquons maintenant cette inclusion, en remplaçant a par a^{-1} dans 3

$$\sigma(a) \subset (\sigma(a^{-1}))^{-1}$$

soit

$$(\sigma(a))^{-1} \subset (\sigma(a)^{-1})$$

Ce qui achève la preuve de 3.
Ou bien

$$(\sigma(a))^{-1} \subset (\sigma(a)^{-1})$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \notin \sigma(a^{-1}) \Rightarrow \lambda \notin \sigma(a)^{-1}$$

$$\lambda \notin \sigma(a^{-1}) \Rightarrow a^{-1} - \lambda e \quad inversible \Rightarrow e - \frac{1}{\lambda}a^{-1} \quad inversible$$

$$a^{-1}(a - \frac{1}{\lambda}e) \quad inversible, \quad \frac{1}{\lambda} \notin \sigma(a) donc \lambda \notin (\sigma(a))^{-1}$$

■

Remarque 25 *Le fait que le spectre d'un élément est toujours non vide est une généralisation du résultat qui dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ a toujours au moins une valeur propre complexe.*

Théorème 26 *Soient $a, b \in \mathcal{A}$ alors $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$ et $r(ab) = r(ba)$.*

Preuve. Soient $a, b \in \mathcal{A}$

1. **Etape 1** Montrons que $1 \notin \sigma(ab) \Leftrightarrow 1 \notin \sigma(ba)$.
   $1 \notin \sigma(ab)$ i.e. $1e - ab$ inversible.
   Montrons que $e - ba$ est inversible et $(e - ba)^{-1} = b(e - ab)^{-1}a + e$
   On a

$$\begin{aligned}(e-ba)(b(e-ab)^{-1}a+e) &= b(e-ab)^{-1}a + e - bab(e-ab)^{-1}a - ba \\ &= b\left((e-ab)^{-1}a - ab(e-ab)^{-1}a - a\right) + e \\ &= b\left((e-ab)^{-1} - ab(e-ab)^{-1} - e\right)a + e \\ &= b\left((e-ab)^{-1}(e-ab) - e\right)a + e \\ &= e + b(e-e)a = e\end{aligned}$$

   De même on trouve $(b(e-ab)^{-1}a+e)(e-ba) = e$, donc $e - ba$ inversible i.e. $1 \notin \sigma(ba)$.
   De même $1 \notin \sigma(ba) \Rightarrow 1 \notin \sigma(ab)$.

2. **Etape 2** Soit $\lambda \in \mathbb{C}^\star$.
   Montrons que $\lambda \notin \sigma(ab) \Leftrightarrow \lambda \notin \sigma(ba)$.

$$\begin{aligned}\lambda \notin \sigma(ab) &\Leftrightarrow (ab - \lambda e \quad \textit{inversible}) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\lambda}(ab - \lambda e) \quad \textit{inversible}\right) \\ &\Leftrightarrow (\frac{1}{\lambda}a)b - e \quad \textit{inversible} \\ &\Leftrightarrow 1 \notin \sigma(\frac{1}{\lambda}ab) \\ &\Leftrightarrow 1 \notin \sigma(b\frac{1}{\lambda}a).\end{aligned}$$

   Donc $b\frac{1}{\lambda}a - e$ inversible c.a.d. $ba - \lambda e$ inversible i.e. $\lambda \notin \sigma(ba)$.
   $\forall \lambda \in \mathbb{C}^\star, \lambda \notin \sigma(ab) \Leftrightarrow \lambda \notin \sigma(ba)$ ce qui montre que

$$\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$$

3. **r(ab)=r(ba)** Si $\sigma(ab) = \{0\}$ donc $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\} = \emptyset$ donc $r(ab) = r(ba) = 0$.
   Si $\sigma(ab) \neq \{0\}$

$$r(ab) = sup\{\mid \lambda \mid: \quad \lambda \neq 0 \quad \lambda \in \sigma(ab)\} = sup\{\mid \lambda \mid: \quad \lambda \neq 0 \quad \lambda \in \sigma(ba)\} = r(ba)$$

4. $\sigma(a) \neq \emptyset$ **Exercice.**

■

Soit p un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ donné par $p(X) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i X^i$, si $a \in \mathcal{A}$, on note $p(a)$ l'élément de $\mathcal{A}$ définie par

$$p(a) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i a^i.$$

Lemme 27 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire, $a \in \mathcal{A}$ et p un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Alors*

$$\sigma(p(a)) = p\left(\sigma(a)\right)$$

Preuve. Montrons tout d'abord :

$$p\left(\sigma(a)\right) \subset \sigma(p(a))$$

Soit $p(\lambda) \in p(\sigma(a))$, montrons que $p(\lambda) \in \sigma(p(a))$.
On a $\lambda \in \sigma(a)$, donc $a - \lambda e$ n'est pas inversible, montrons que $p(a) - p(\lambda)e$ n'est pas inversible.
Il existe un unique polynôme $q \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$p(X) - p(\lambda) = (X - \lambda)q(X).$$

D'où $p(a) - p(\lambda)e = (a - \lambda e)q(a) = q(a)(a - \lambda e)$
et $p(a) - p(\lambda)e$ n'est pas inversible car sinon
$e = (p(a) - p(\lambda)e)^{-1}q(a)(a - \lambda e) = (a - \lambda e)q(a)(p(a) - p(\lambda)e)^{-1}$,
$(a - \lambda e)$ serait inversible, ce qui est absurde. Par conséquent $p(\lambda) \in \sigma(p(a))$.
Réciproquement, montrons que $\sigma(p(a)) \subset p(\sigma(a))$.
Si p est le polynôme nul, le résultat est évident.
Sinon, soit $\lambda \in \sigma(p(a))$. On factorise dans $\mathbb{C}(X)$ le polynôme $p(X) - \lambda = \alpha(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\cdots(X - \alpha_n)$.
α_i étant les racines du polynôme $p(X) - \lambda$, comme p est supposé non nul, $\alpha \neq 0$ et
$p(a) - \lambda e = \alpha(a - \alpha_1 e)(a - \alpha_2 e)\cdots(a - \alpha_n e)$.
Supposons que pour tout $i, \quad a - \alpha_i e$ soit inversible, alors $p(a) - \lambda e$ est aussi inversible ce qui est absurde.
Par conséquent, il existe $i, \quad 1 \leq i \leq n$, tel que $\alpha_i \in \sigma(a)$. Donc $\lambda = p(\alpha_i) \in p(\sigma(a))$

$$p(\alpha_i) - \lambda e = \alpha(\alpha_i - \alpha_1 e)\cdots(\alpha_i - \alpha_i e)\cdots(\alpha_i - \alpha_n e) = 0.$$

$p(\alpha_i) - \lambda e = 0 \Rightarrow \lambda = p(\alpha_i) \in p(\sigma(a))$.

D'où $\sigma(p(a)) \subset p(\sigma(a))$, ce qui termine la preuve. ■

Théorème 28 ***Gelfand Masur*** *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire tel que tout élément non nul est inversible alors $\mathcal{A} = \mathbb{C}e$, autrement dit $\mathcal{A}$ est isométriquement isomorphe au corps des nombres complexes*

Preuve. Par l'absurde supposons que $\mathcal{A} \neq \mathbb{C}e$. Alors il existe $a \in \mathcal{A} \setminus \mathbb{C}e$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}, \quad a - \lambda e \neq 0$, (si $a = \lambda e \in \mathbb{C}e$ contradiction car $\mathcal{A} \neq \mathbb{C}e$)
Par hypothèse on a $a - \lambda e$ est inversible donc tout point $\lambda \in \mathbb{C}$ est dans $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ (ensemble résolvant de a) soit $\sigma(a) = \emptyset$ qui est absurde car $\sigma(a) \neq \emptyset$.
Il est alors facile de vérifier que

$$\varphi : \mathcal{A} = \mathbb{C}e \to \mathbb{C}$$
$$\lambda e \mapsto \lambda$$

est un isomorphisme isométrique de $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{C}$. ■

Chapitre 2

4 C^*-algèbres

4.1 Introduction aux C^*-algèbres

Toutes les algèbres de Banach que nous allons étudier dans ce chapitre seront unitaires. Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et a un élément de $\mathcal{A}$, on note $\sigma(a)$ le spectre de a et $r(a)$ son rayon spectral.

4.1.1 Involution

Définition 29 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée. On appelle* ***involution*** *une application $I : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ vérifiant :*

1. *$I^2(a) = a$, pour tout a dans $\mathcal{A}$;*
2. *$I(ab) = I(b)I(a)$, pour tous a et b dans $\mathcal{A}$;*
3. *$I(\alpha a + b) = \overline{\alpha} I(a) + I(b)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et tous a et b dans $\mathcal{A}$.*

On notera dans la suite, $I(a) = a^*$.

Remarque 30 *Si $\mathcal{A}$ est une algèbre unitaire involutive (avec une involution), alors*

$$a = (a^*)^* = (a^*e)^* = e^*(a^*)^* = e^*a.$$

De même, $a = ae^*$. D'où, pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a

$$a = e^*a = ae^*,$$

ce qui par unicité de l'élément neutre implique que $e^* = e$.

4.1.2 C^*-algèbre

Définition 31 *Une C^*****-algèbre*** *$\mathcal{A}$* ***(algèbre stellaire)*** *est une algèbre de Banach unitaire qui possède une involution telle que*

$$\| a^*a \| = \| a \|^2$$

pour tout a dans $\mathcal{A}$

Exemple 32
1. *L'algèbre $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{C}^*$-algèbre, où l'involution est la conjugaison complexe.*
2. *$C(X)$, l'ensemble des fonctions continues sur un espace compact X est à valeurs complexes, muni de la norme*
$$\|f\| = sup\{|f(t)|, \quad t \in X\}$$
et de l'involution donnée par $f^*(t) = \overline{f(t)}$ (pour tout $t \in X$)est une $\mathbb{C}^*$-algèbre.

Exercice 33
1. *Soit e l'unité d'une algèbre normée involutive unitaire. Démontrer que $\|e\| \geq 1$.*

2. *Soit e l'unité d'une $\mathbb{C}^*-$algèbre. Démontrer que $\|e\| = 1$.*

Exercice 34 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Démontrer que l'algèbre de Banach $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ muni de l'involution qui à $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ associe son adjoint $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une $\mathbb{C}^*-$algèbre.*

Proposition 35 *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{C}^*-$algèbre. Si a appartient à $\mathcal{A}$, alors :*

1. $\|a^*\| = \|a\|$
2. $\|aa^*\| = \|a\|^2$

Preuve.

1. *Soit $a \in \mathcal{A}$. En utilisant la définition 31, on a :*

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a^*\|\|a\|, \tag{4}$$

et donc $\|a\| \leq \|a^*\|$. Comme $a^{**} = a$, en remplaçant a par a^* dans (4), on obtient l'inégalité inverse ce qui donne le 1.

2. *Soit $a \in \mathcal{A}$. En utilisant la définition 31 et le 1., on trouve :*

$$\|aa^*\| = \|(a^*)^*a^*\| = \|a^*\|^2 = \|a\|^2.$$

■

Définition 36 *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\mathbb{C}^*-$algèbres unitaires. Une application $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est appelée $*$-morphisme d'algèbres si φ est un morphisme d'algèbres vérifiant :*

$$\varphi(a^*) = \varphi(a)^*, \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Un $*$-isomorphisme entre $\mathbb{C}^*-$algèbres est un $*$-morphisme bijectif. On vérifie facilement que si φ est un $*$-isomorphisme alors φ^{-1} est également un $*$-morphisme.

Définition 37 *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{C}^*-$algèbre unitaire et $a \in \mathcal{A}$, alors*

1. *a est auto-adjoint (ou hermitien) si $a^* = a$.*
2. *a est normal si $a^*a = aa^*$.*
3. *a est unitaire si $a^*a = aa^* = e$.*

On note $Re(\mathcal{A})$ l'ensemble des éléments autoadjoints de $\mathcal{A}$

Proposition 38 *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{C}^*-$algèbre et $a \in \mathcal{A}$.*

1. *Si a est inversible, alors a^* est inversible d'inverse $(a^{-1})^*$.*
2. *Il existe un unique couple (x, y) dans $Re(\mathcal{A})$ tel que $a = x + iy$.*
3. *Si a est unitaire, alors $\|a\| = 1$.*
4. *Si a est autoadjoint, alors $\|a\| = r(a)$.*
5. *Si $\mathcal{B}$ une $\mathbb{C}^*-$algèbre et $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un $*$-morphisme tel que $\varphi(e) = 1$, alors :*

$$\varphi(a) \leq \|a\|, \quad \forall a \in \mathcal{A}$$

φ est une application linéaire continue de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$, de norme inférieure ou égale à 1.

Preuve.

1. Supposons a inversible, alors
$$(aa^{-1})^* = (a^{-1})^* a^* = e = a^*(a^{-1})^*.$$
Ainsi $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$.
2. Tout d'abord montrons que : $i(a^* - a)$ et $a + a^*$ sont autoadjoints.
On a $(i(a^* - a))^* = -i((a^*)^* - a^*) = i(a^* - a)$ et $(a + a^*)^* = a^* + (a^*)^* = a + a^*$, ainsi $i(a^* - a)$ et $a + a^*$ sont autoadjoints.
Posant maintenant $x = \frac{1}{2}(a+a^*)$ et $y = \frac{i}{2}(a^* - a)$, on a alors $a = x + iy$. d'où l'existence.
Montrons maintenant l'unicité. Soit x_1, x_2, y_1 et y_2 hermitiens tels que :
$$a = x_1 + iy_2 = x_2 + iy_2.$$
On en déduit que
$$x_1 - x_2 = i(y_2 - y_1). \tag{5}$$
De plus, $a^* = x_1 - iy_1 = x_2 - iy_2$, d'où
$$x_1 - x_2 = -i(y_2 - y_1) \tag{6}$$
En additionnant 5 et 6, on obtient finalement $2(x_1 - x_2) = 0$, soit $x_1 = x_2$. On en déduit alors que $y_1 = y_2$, d'où l'unicité de la décomposition.
3. Supposons a unitaire. Alors
$$\|a\|^2 = \|aa^*\| = \|e\| = 1$$
4. Exercice.
5. Exercice.

■

Exercice 39 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre stellaire et $a \in \mathcal{A}$, supposons que a est auto-adjoint.*

1. (a) Démontrer que
$$\|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|a\|.$$
(b) Déduire que $r(a) = \|a\|$.

2. Démontrer que $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.

3. Démontrer que $\sigma(a^*) = \{\overline{\lambda}, \quad \lambda \in \sigma(a)\}$.

Chapitre 3

5 Idéaux et caractères

5.1 Caractère

Définition 40 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach. On appelle **caractère** φ de $\mathcal{A}$ tout homomorphisme non trivial de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$. Autrement dit, un caractère φ d'une algèbre $\mathcal{A}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{A}$, non identiquement nulle, telle que*
$$\varphi(xy)) = \varphi(x)\varphi(y) \quad \text{pour tous } x, y \in \mathcal{A}.$$
On notera $Car(\mathcal{A})$ l'ensemble des caractères de $\mathcal{A}$.

Théorème 41 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et $\varphi \in Car(\mathcal{A})$. Alors φ est continue et sa norme (en tant que forme linéaire) est 1. De plus, $\varphi(e) = 1$ et $\varphi(x) \neq 0$, pour tout $x \in Inv(\mathcal{A})$.*

Preuve. Comme φ est non identiquement nulle, il existe $y \in \mathcal{A}$ tel que $\varphi(y) \neq 0$.
On a
$$\varphi(y) = \varphi(ye) = \varphi(y)\varphi(e),$$
donc $\varphi(e) = 1$. D'autre part si x est inversible alors
$$\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(e) = 1$$
et par conséquent $\varphi(x) \neq 0$.
Montrons que $|\varphi(x)| \leq \|x\|$:
Soit $x \in \mathcal{A}$ et notons $\lambda = \varphi(x)$. Supposons que $|\lambda| > \|x\|$, le lemme (11) du chapitre 1, implique que $x - \lambda e$ est inversible et donc d'après ce qui précède, on obtient $\varphi(x - \lambda e) \neq 0$, ce qui est absurde car
$$\varphi(x - \lambda e) = \varphi(x) - \varphi(\lambda e) = \varphi(x) - \lambda\varphi(e) = \varphi(x) - \lambda = 0.$$
Par conséquent, $|\varphi(x)| \leq \|x\|$, ce qui prouve que φ est une forme linéaire continue de norme au plus 1. Comme $\varphi(e) = 1$, on obtient que la norme est exactement 1. ■

Définition 42 *Si $\mathcal{A}$ est une algèbre involutive commutative, on dit qu'un caractère $\varphi \in Car(\mathcal{A})$ est hermitien si*
$$\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)} \qquad \textit{pour tout } a \in \mathcal{A}.$$

Proposition 43 *Soient $\mathcal{A}$ une $\mathbb{C}^*-$algèbre et $\varphi \in Car(\mathcal{A})$. Alors :*

1. *$\varphi(a) \in \mathbb{R}$, pour tout $a \in Re(\mathcal{A})$;*
2. *$\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$, pour tout $a \in \mathcal{A}$;*
3. *$\varphi(aa^*) \geq 0$, pour tout $a \in \mathcal{A}$;*
4. *$|\varphi(u)| = 1$ pour tout élément $u \in \mathcal{A}$ unitaire.*

Preuve.

1. Soit $a \in Re(\mathcal{A})$, écrivons $\varphi(a) = \alpha + i\beta$ avec α et β réels.
Montrons que $\beta = 0$. Soit $t \in \mathbb{R}$, alors :
$$\begin{aligned} |\varphi(a + ite)|^2 &\leq \|a + ite\|^2 \\ &= \|(a + ite)(a + ite)^*\| \\ &= \|aa^* + t^2 e\| \\ &\leq \|a\|^2 + t^2. \end{aligned}$$
De plus
$$|\varphi(a + ite)|^2 = |\alpha + i(\beta + t)|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + t^2 + 2\beta t.$$
Ainsi
$$\|a\|^2 + t^2 \geq \alpha^2 + \beta^2 + t^2 + 2\beta t,$$
et donc
$$\|a\|^2 \geq \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$
D'où $\beta = 0$ et $\varphi(a) \in \mathbb{R}$.

2. Soit $a \in \mathcal{A}$, $\quad \exists x, y \in Re(\mathcal{A})$ tel que $a = x + iy$ d'après la proposition 38.
   On a $a^* = x - iy$.
   Ainsi

$$\begin{aligned}\varphi(a^*) &= \varphi(x) - i\varphi(y) \\ &= \overline{\varphi(x) + i\varphi(y)} \quad (\varphi(x), \varphi(y) \in \mathbb{R}) \\ &= \overline{\varphi(a)}.\end{aligned}$$

   Et donc $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$
3. Soit $a \in \mathcal{A}$.
$$\varphi(aa^*) = \varphi(a^*)\varphi(a) = \overline{\varphi(a)}\varphi(a) = |\varphi(a)|^2 \geq 0.$$
   Ainsi $\varphi(aa^*) \geq 0$.
4. Soit $u \in \mathcal{A}$ unitaire.
$$|\varphi(u)|^2 = \varphi(u^*u) = \varphi(e) = 1.$$
   Ainsi $|\varphi(u)| = 1$

■

Théorème 44 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach* ***commutative*** *unitaire.*

1. *Un élément $x \in \mathcal{A}$ est inversible dans $\mathcal{A}$ si et seulement si $\varphi(x) \neq 0$, pour tout caractère φ de $\mathcal{A}$.*
2. *Soit $x \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $\lambda \in \sigma(x)$ si et seulement si il existe $\varphi \in Car(\mathcal{A})$ tel que $\varphi(x) = \lambda$.*

Corollaire 45 *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{C}^*-$algèbre* ***commutative*** *et $a \in Re(\mathcal{A})$. Alors $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*

Preuve. Comme $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach commutative, on a

$$\sigma(a) = \{\varphi(a) : \quad \varphi \in Car(\mathcal{A})\}$$

La proposition 43 (1) permet alors de conclure. ■

Exercice 46 *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{C}^*-$algèbre commutative unitaire.*

1. *Démontrer que si a est autoadjoint, alors $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$.*
2. *Démontrer que $\varphi\left(\frac{a+a^*}{2}\right)$, $\quad \varphi\left(\frac{a-a^*}{2i}\right)$ sont réels, pour tout caractère φ.*
3. *Soit φ un caractère. Démontrer que φ est hermitien.*
4. *Démontrer que Inv est une isométrie de $\mathcal{A}$ dans $C(Car(\mathcal{A}))$.*

5.2 Idéaux d'une algèbre de Banach

Définition 47 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre complexe, commutative et J un sous-ensemble de $\mathcal{A}$, J est un idéal de $\mathcal{A}$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *J est un sous espace vectoriel de l'espace de l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ et*
2. *$\forall x \in \mathcal{A}$, $\forall y \in J$, $xy \in J$*

*Si en plus $J \neq \mathcal{A}$, on dit que J est un **idéal propre**.*

Définition 48 *Un idéal **maximal** est un idéal propre qui n'est contenu dans aucun autre idéal propre.*

$$M \textit{idéal maximal} \Leftrightarrow \forall J \textit{idéal propre de } \mathcal{A}$$

$$M \subset J \Rightarrow M = J.$$

Proposition 49 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach, commutative, unitaire et J un idéal de $\mathcal{A}$. Alors l'adhérence de J, notée $\overline{J}$, est aussi un idéal de $\mathcal{A}$. De plus si J est un idéal propre, alors*

1. *J ne contient aucun élément inversible de $\mathcal{A}$,*
2. *$\overline{J}$ est aussi un idéal propre.*

Preuve.

1. Si J est un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel normé, alors $\overline{J}$ est aussi un sous espace vectoriel. D'autre part, si $x \in \mathcal{A}$, $\quad y \in \overline{J}$, alors il existe une suite $(y_n)_n \subset J$ telle que $y_n \to y$, lorsque $n \to +\infty$. La continuité de la multiplication dans $\mathcal{A}$ implique alors que $xy_n \to xy$, $\quad n \to +\infty$. Comme J est un idéal, $xy_n \in J$ et donc $xy \in \overline{J}$, donc $\overline{J}$ est un idéal de $\mathcal{A}$.
2. J ne contient aucun élément inversible de $\mathcal{A}$.
   Par l'absurde supposons qu'il existe $x \in J$ et x inversible. Alors comme J est un idéal, on a $e = xx^{-1} \in J$, donc pour pour tout $y \in \mathcal{A}$, on a $y = ye \in J$. Ainsi J=A, ce qui est absurde
3. $\overline{J}$ est un idéal propre, si J est un idéal propre. Par l'absurde supposons que $\overline{J} = \mathcal{A}$. En particulier, on a $\quad e \in \overline{J}$ et donc il existe $x_0 \in J$ telle que $\|e - x_0\| < 1$. Le lemme 11 implique que $e - (e - x_0) = x_0$ est inversible, ce qui est en contradiction avec le point précédent.

■

Théorème 50 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative et unitaire.*

1. *Tout idéal propre de $\mathcal{A}$ est contenu dans un idéal maximal de $\mathcal{A}$.*
2. *Tout idéal maximal de $\mathcal{A}$ est fermé.*

Preuve.

2 Soit M un idéal maximal de $\mathcal{A}$. En particulier M est un idéal propre de $\mathcal{A}$ donc $\overline{M}$ est aussi un idéal propre de $\mathcal{A}$. On a :
$M \subset \overline{M}$ et M maximal donc $M = \overline{M}$ donc M fermé.

■

5.3 Les algèbres quotients

Soient $\mathcal{A}$ une algèbre unitaire, commutative et J un idéal de $\mathcal{A}$

1. L'espace quotient $\mathcal{A}/J$ est une algèbre commutative qui possède une unité.
2. La surjection canonique $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/J$ est un homomorphisme d'algèbre.
3. $\mathcal{A}/J$ est un corps (i.e. tout élément non nul est inversible) si et seulement si J est un idéal maximal.

Si J est un idéal propre et fermé de $\mathcal{A}$, on pose, pour $\pi(x) \in \mathcal{A}/J$,

$$\|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} = dist(x, J) = inf_{y \in J}\|x - y\|, \quad x \in \mathcal{A}.$$

Remarquons que cette définition a bien un sens car si $\pi(x) = \pi(y)$, cela implique que $x - y \in J$ et donc $dist(x, J) = dist(y, J)$.
Nous allons montrer que $\|.\|_{\mathcal{A}/J}$ définit une norme sur l'espace quotient $\mathcal{A}/J$. cette norme s'appelle **la norme quotient.**

Théorème 51 *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et commutative et J un idéal propre et fermé de $\mathcal{A}$. Alors :*

1. *$\|.\|_{\mathcal{A}/J}$ est une norme.*
2. *π est continue.*
3. *L'algèbre $\mathcal{A}/J$, muni du produit $[A].[B] = [A.B], \quad A, B \in \mathcal{A}$, et de la norme quotient, est une algèbre de Banach unitaire d'élément unité $[I]$.*

Preuve Exercice.

Proposition 52 *Soit J un idéal maximal de $\mathcal{A}$. Alors $\mathcal{A}/J \equiv \mathbb{C}$.*

5.4 Idéaux maximaux et caractères

La partie (1.) du résultat suivant permet d'identifier les caractères et les idéaux maximaux dans une algèbre de Banach commutative, unitaire

Théorème 53 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et commutative.*

1. *Un sous ensemble J de $\mathcal{A}$ est un idéal maximal de $\mathcal{A}$ si et seulement si il est le noyau d'un caractère de $\mathcal{A}$.*
2. *Un élément $x \in \mathcal{A}$ est inversible dans $\mathcal{A}$ si et seulement si $\varphi(x) \neq 0$, pour tout caractère φ de $\mathcal{A}$.*
3. *Un élément $x \in \mathcal{A}$ est inversible dans $\mathcal{A}$ si et seulement si x n'appartient à aucun idéal propre de $\mathcal{A}$.*
4. *Soit $x \in \mathcal{A}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$. Alors $\lambda \in \sigma(x)$ si et seulement si il existe $\varphi \in Car(\mathcal{A})$ tel que $\varphi(x) = \lambda$.*

Preuve.

1. Soit J un idéal maximal de $\mathcal{A}$. D'après le théorème 50 J est fermé et le théorème 51 implique que $\mathcal{A}/J$ est une algèbre de Banach unitaire. D'autre part, comme J est un idéal maximal de $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}/J$ est un corps. Le théorème de Gelfand-Mazur (28) permet alors d'affirmer l'existence d'un isomorphisme d'algèbre f de $\mathcal{A}/J$ sur $\mathbb{C}$.
   Notons π l'application quotient :

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathcal{A} & \to & \mathcal{A}/J \\ X & \mapsto & \pi(X) = [X] \end{array}$$

   et considérons

$$\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/J \to \mathbb{C}$$

   $\varphi = f \circ \pi$ est un homomorphisme continu (non nul) de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$, donc $\varphi \in Car(\mathcal{A})$.
   Montrons $J = \ker \varphi$.
   Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a

$$\begin{array}{rcl} A \in J & \Leftrightarrow & [A] = [0] \\ & \Leftrightarrow & f([A]) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \varphi(A) = 0 \\ & \Leftrightarrow & A \in \ker \varphi. \end{array}$$

   Donc $J = \ker \varphi$.
   Unicité de φ.
   Soit $\psi \in Car(\mathcal{A})$ tel que $J = \ker \psi$, montrons que $\varphi = \psi$, c.a.d. $\forall X \in \mathcal{A}, \quad \varphi(X) = \psi(X)$.
   Soit $X \in \mathcal{A}$, on a $X - \psi(X)I \in \ker \psi = \ker \varphi$, d'où

$$\begin{array}{rcl} \varphi\left(X - \psi(X)I\right) & = & 0 \\ \varphi(X) - \psi(X) & = & 0 \\ \varphi(X) & = & \psi(X). \end{array}$$

   Ce qui montre que $\varphi = \psi$.
   Soit $\varphi \in Car(\mathcal{A})$ tel que $J = \ker \varphi$.

   Soit φ un caractère de $\mathcal{A}$ et notons $J = \ker \varphi$ son noyau. Nous devons montrer que J est un idéal maximal. Tout d'abord, en utilisant le fait que φ est un morphisme d'algèbre, il est facile de vérifier que J est un idéal de $\mathcal{A}$, en effet :

   a. J est un s.e.v. de $\mathcal{A}$.
   b. Soit $A \in J, \quad X \in \mathcal{A}$, alors

$$\begin{array}{rcl} \varphi(AX) & = & \varphi(A)\varphi(X) \\ & = & 0\varphi(X) \\ & = & 0 \end{array}$$

   Donc $AX \in \ker \varphi = J$.

(a) J propre, car $J \neq \{0\}$ et $J \neq \mathcal{A}$.
Montrer que J est un idéal maximal est équivalent à montrer que $\mathcal{A}/J$ est un corps.

2. D'après le théorème 41 on a si x est inversible dans $\mathcal{A}$ et $\varphi \in Car(\mathcal{A})$, *alors* $\varphi(x) \neq 0$.

   Réciproquement, soit $x \in \mathcal{A}$ et supposons que pour tout $\varphi \in Car(\mathcal{A})$, on ait $\varphi(x) \neq 0$. Considérons l'ensemble I_x défini par

$$I_x = \{ax : \quad a \in \mathcal{A}\}.$$

   I_x est un idéal de $\mathcal{A}$. Supposons que $I_x \neq \mathcal{A}$. Autrement dit, I_x est un idéal propre. Alors I_x est contenu dans un idéal maximal. D'après la partie (1) il existe un caractère φ tel que $I_x \subset \ker\varphi$, cela est absurde car $x \in I_x$ et $\varphi(x) \neq 0$, donc $I_x = \mathcal{A}$, en particulier, $e \in I_x$. Ainsi il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $xx' = e$, c.a.d. x inversible.

3. Si $x \in \mathcal{A}$ est inversible dans $\mathcal{A}$, alors d'après la proposition 49, x n'appartient à aucun idéal propre.
   Réciproquement, supposons que x n'appartient à aucun idéal propre, comme I_x est un idéal qui contient x, nécessairement, il n'est pas propre, donc $I_x = \mathcal{A}$. En particulier, $e \in I_x$ et donc il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $x'x = e$, ce qui prouve que x est inversible.

4. Appliquer (2) à $\lambda e - x$.

■

Corollaire 54 *Pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a*

$$\sigma(A) = \{\varphi(A) : \quad \varphi \in Car(A)\}$$

Corollaire 55 *Pour tous $A, B \in \mathcal{A}$ on a*

1. $\sigma(A + B) \subset \sigma(A) + \sigma(B)$.
2. $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.
3. $\sigma(A.B) \subset \sigma(A).\sigma(B)$.
4. $r(A.B) \leq r(A).r(B)$.

Preuve. Exercice ■