Corrigé type Algèbre de Banach

Exercice 1 *Considérons l'opérateur de décalage à gauche* L *agissant sur un vecteur* $x = (x_1, x_2, \cdots)$ *de* l^1 *par :*

$$L(x) = (x_2, x_3, \cdots)$$

et à droite $R \in \mathcal{L}(l^\infty)$ *par*

$$R(x) = (0, x_1, x_2, \cdots).$$

(Il y a erreur dans l'énoncé de l'interrogation, le dual de l^1 *est* l^∞*,)*

1. *Montrer que* R *est injective mais pas surjective.*

$$\ker R = \left\{x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^1 : \quad R(x) = (0, x_1, x_2, \cdots) = (0, 0, 0, \cdots)\right\} = \{(0, 0, 0, \cdots)\}.$$

   Donc R *est injective, mais pas surjective puisque il existe* $(1, 0, 0, \cdots) \in l^1$ *et* $(1, 0, 0, \cdots)$ *n'appartient pas à* imR

2. *Montrer que le spectre ponctuel de* R*,* $\sigma_p(R) = \emptyset$*.*
   Supposons $\sigma_p(R) \neq \emptyset$*. Soit* $\lambda \in \sigma_p(R)$ *c.a.d.* λ *valeur propre de* R *:*

$$\begin{aligned} Rx = \lambda x \quad &\Leftrightarrow \quad (0, x_1, x_2, \cdots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \cdots) \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda x_1 = 0, \quad \lambda x_2 = x_1, \quad \lambda x_3 = x_2, \quad \cdots \end{aligned}$$

   On a $\lambda x_1 = 0$
   Si $\lambda = 0$*, alors* $x_1 = \lambda x_2 = 0, \quad x_2 = \lambda x_3 = 0, \cdots$
   donc $(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, 0, 0, \cdots)$ *donc* $\underline{x = 0}$*.*
   Si $\lambda \neq 0$*, alors*

$$\begin{aligned} \lambda x_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = 0 \\ \lambda x_2 = x_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 0 \\ \lambda x_3 = x_2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_3 = 0 \\ &\cdots \\ &\underline{x = 0} \end{aligned}$$

   Contradiction puisque x *vecteur propre associé à* λ*, donc* $\sigma_p(\mathbb{R}) = \emptyset$

3. *Sachant que le rayon spectrale* $r(R) = 1$*, montrer que le spectre de* R*,* $\sigma(R) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \mid \lambda \mid \leq 1\}$*.*
   On a $r(R) = \sup\{|\lambda| : \quad \lambda \in \sigma(R)\} = 1$*, donc* $\{\lambda \in \mathbb{C}, \mid \lambda \mid \leq 1\} = \sigma(R)$*.*

4. *Montrer que* $X = (1, 0, 0, \cdots) \in \ker L$*.*
   On a $L(X) = L((1, 0, 0, \cdots)) = (0, 0, 0, \cdots)$*, donc* $X \in \ker L$*.*

5. *Pour* $\mid \lambda \mid < 1$*, Montrer que* $X_{[\lambda]} = (1, \lambda, \lambda,^2, \lambda,^3 \cdots) \in l^1$ *et que* $X_{[\lambda]}$ *est vecteur propre associé à la valeur propre* λ*. (* $X_{[\lambda]} \in \ker(L - \lambda I)$*).*
   On a $X_{[\lambda]} = (1, \lambda, \lambda,^2, \lambda,^3 \cdots) \in l^1$ *car* $\|X_{[\lambda]}\| = \sum_{n \geq 0} |\lambda|^n < \infty$*, car* $|\lambda| < 1$*.*
   On a

$$\begin{aligned} L(X_{[\lambda]}) &= L((1, \lambda, \lambda,^2, \lambda,^3 \cdots)) \\ &= (\lambda, \lambda,^2, \lambda,^3 \cdots) \\ &= \lambda(1, \lambda, \lambda,^2, \lambda,^3 \cdots) \\ &= \lambda X_{[\lambda]}. \end{aligned}$$

C.a.d. $(L-\lambda I)(X_{[\lambda]})=0$, *donc* $X_{[\lambda]}\in\ker(L-\lambda I)$.

Donc pour $|\lambda|<1, \quad L-\lambda I$ *n'est pas injective.*

6. *Pour* $\mid\lambda\mid=1$. *Supposons* $\ker(L-\lambda I)\neq\{(0,0,\cdots)\}$ *(donc il existe* $x=(x_1,x_2,x_3,\cdots)\neq(0,0,0,\cdots)\in\ker(L-\lambda I)$*), alors* $(L-\lambda I)(x)=0$ *i.e.* $L(x)=\lambda x$,
c.a.d. $(x_2,x_3x_4,\ldots)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3,\cdots)$, *donc*
$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad x_{n+1}=\lambda x_n,$$
donc
$$\begin{aligned} x=(x_1,x_2,x_3,\cdots) &= (x_1,\lambda x_1,\lambda^2x_1,\cdots)\\ &= x_1(1,\lambda,\lambda^2,\lambda^3,\cdots). \end{aligned}$$
Mais $|\lambda|=1$ *donc* $x\notin l^1$ *sauf si* $x_1=0$ *et donc* $x=0$ *ce qui est absurde,*
donc $\ker(L-\lambda I)=\{(0,0,\cdots)\}$ *et donc* $L-\lambda I$ *est injective.*
7. *Déduire que* $\sigma_p(L)=\{\lambda\in\mathbb{C}, \quad\mid\lambda\mid<1\}$.
On peut montrer que $r(L)=1$ *donc d'après (3),* $\sigma(L)=\{\lambda\in\mathbb{C}, \quad\mid\lambda\mid\leq 1\}$ *et on a* $\sigma_p(L)\subset\sigma(L)$*, en utilisant les questions ci-dessus (5 et 6) on trouve le résultat désiré.*