TD Equations Intégrales

Exercice 01

En utilisant la transformation de Laplace, résoudre l'équation intégrale

$$t^2 + \int_0^t \sin(t-u) f(u) du = f(t)$$

Indication: Voir cours page 9.

Exercice 02

Résoudre le problème

$$\begin{cases} y''(t) - 3y\prime(t) + 2y(t) = 4\sin t \\ y(0) = 1, \qquad y'(0) = -2 \end{cases}$$

Indication: Après intégration

$$\int_0^t \left[y''(\tau) - 3y\prime(\tau) + 2y(\tau)\right] d\tau = \int_0^t 4\sin\tau d\tau$$

on trouve

$$y'(t) + 2 - 3y(t) + 3 + 2\int_0^t y(\tau) d\tau = -4\cos t + 4$$

Une deuxième intégration

$$\int_0^t \left[y'(\tau) - 3y(\tau) + 2\int_0^\tau y(\xi) d\xi\right] d\tau = \int_0^t \left[-4\cos\tau - 1\right] d\tau$$

nous donne

$$y(t) - 1 - 3\int_0^t y(\tau) d\tau + 2\int_0^t (t-\tau)\, y(\tau) d\tau = -4\sin t - t$$

On retrouve une équation intégrale sous la forme

$$y(t) + \int_0^t (-3 - 2\tau + 2t) y(\tau) d\tau = -4\sin t - t + 1$$

$$y(t) + (h * y)(t) = -4\sin t - t + 1$$

Avec $h(t) = 2t - 3$, enfin on utilise la transformation de Laplace et on trouve

$$L(y(t)(s) = Y(s) = \frac{s^3 - 5s^2 + s - 1}{(s^2+1)(s^2-3s+2)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s-2} = \frac{\frac{6}{5}s + \frac{2}{5}}{s^2+1} + \frac{2}{s-1} + \frac{\frac{-11}{5}}{s-2}$$

On a

$$\begin{aligned} L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)(t) &= \cos t \\ L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)(t) &= \sin t \\ L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)(t) &= e^t \\ L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)(t) &= e^{2t} \end{aligned}$$

Donc la solution du problème est donnée par

$$y(t) = \frac{6}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t + 2e^t - \frac{11}{5}e^{2t}.$$

Exercice 03
Résoudre le problème

$$\begin{cases} y'(t) + 5\int_0^t \cos 2(t-u) y(u) du = 10 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Indication: Le problème s'écrit

$$y' + 5(h * y) = 10$$

Avec $h(t) = \cos 2t$.
Par la transformation de Laplace on trouve

$$sY - y(0) + \frac{5sY}{s^2+4} = \frac{10}{s}, \qquad \text{avec } Y(s) = L(y(.))(s)$$

On trouve $Y(s)$ ensuite $y(t)$.