Exercices

C.H.

8 janvier 2022

Opérateur diagonal sur $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$. On définit l'opérateur T sur l^2 par $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Comme $(T-\lambda I)x = ((\lambda_k-\lambda)x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, alors $(T-\lambda I)^{-1}y = (\frac{y_k}{\lambda_k-\lambda})_{k\in\mathbb{N}}$. Il en résulte que $(T-\lambda I)^{-1}$ est un opérateur borné si et seulement si λ n'est pas dans l'adhérence de $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, qui n'est autre que $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \bigcup \{0\}$.
Comme $Te_k = \lambda_k e_k$, pour e_k élément de la base canonique de l^2, on en déduit que tous les λ_k sont des valeurs propres de T. Mais 0 n'est pas valeur propre car T est injective (puisque tous les $\lambda_k \neq 0$.)
D'où $\sigma(T) = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \bigcup \{0\}$ et $\sigma_p(T) = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Exercice
Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire commutative et M un idéal maximal de $\mathcal{A}$.

1. Montrer que $J = \{AX + Y : \quad X \in \mathcal{A}, \quad Y \in M\}$ est un idéal de $\mathcal{A}$.
2. Déduire que $J = \mathcal{A}$ et donc $I \in J$. Déduire que $\mathcal{A}/M \equiv \mathbb{C}$, (Tout élément $[X] \neq [0]$ de $\mathcal{A}/M$ est inversible).