Intégrale fractionnaire et dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

4 janvier 2023

Table des matières

1 Intégrale de Riemann-Liouville

L'intégral fractionnaire d'une fonction f est une généralisation d'un concept élémentaire de n intégrations successives appliquées à une fonction f. La première généralisation est celle de Riemann-Liouville, qui vient de l'observation que pour tout entier positif n

$$\begin{aligned} I^n f(t) &= \int_a^t \int_a^{t_1} \cdots \int_a^{t_{n-1}} x(t_n) dt_n dt_{n-1} \cdots dt_1 \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ceci a motivé la définition de l'intégrale fractionnaire.

Définition 1.0.1 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, une fonction continue par morceaux sur $(0, \infty)$ et intégrable sur tout sou-intervalle fini de $[0, \infty]$, pour $t > 0$ l'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre $0 < \alpha < 1$ est définie par*

$$I_{a_+}^{\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad t > 0,$$

Γ *est la fonction gamma d'Euler.*

L'équation ci dessus s'écrit aussi sous la forme suivante

$$I_{a_+}^{\alpha} f(t) = (\phi_\alpha \star f)(t),$$

avec

$$\phi_\alpha := \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & t > a, \\ 0 & t \leq a. \end{cases}$$

Il est clair que

$$I_{a_+}^{\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \tau^{\alpha-1} f(t-\tau) d\tau, \quad t > 0.$$

Définition 1.0.2 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, une fonction continue par morceaux sur $(0, \infty)$ et intégrable sur tout intervalle fini de $\mathbb{R}^+$, l'intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville d'ordre $0 < \alpha < 1$ est définie par*

$$I_{b_-}^{\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad t > 0,$$

Γ *est la fonction gamma d'Euler.*

Pour $a = 0$ on écrit I^α au lieu de $I_{0_+}^{\alpha}$.
Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, l'opérateur I^α de Riemann Liouville coïncide avec l'opérateur d'intégration répété jusqu'à l'ordre n.

Définition 1.0.3 *Soit f une fonction à deux variables s et t, alors l'intégrale fractionnaire double de la fonction f d'ordre α et β est définie par*

$$I_a^{\alpha}\left[I_c^{\beta} x(s,t)\right] := \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^s \int_c^t (s-\tau)^{(\alpha-1)} (t-\zeta)^{(\beta-1)} f(\tau,\zeta) d\tau d\zeta, \quad Re(\alpha) > 0, \quad Re(\beta) > 0.$$

1.1 Exemples d'intégrales fractionnaires

Exemple 1.1.1 *1. Évaluons $I^\alpha x^\mu$, avec $Re\alpha > 0, \quad \mu > -1$.*
Par définition,

$$\begin{aligned} I^\alpha(x^\mu) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{(\alpha-1)}t^\mu dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \left(1-\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} x^{\alpha-1}t^\mu dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}x^{\alpha-1}(xu)^\mu x du \quad (u=\frac{t}{x}) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha+\mu}\int_0^1 u^\mu(1-u)^{\alpha-1}du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha+\mu}\beta(\mu+1,\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}x^{\alpha+\mu} \end{aligned}$$

Donc

$$I^\alpha x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}x^{\alpha+\mu}, \quad \alpha > 0, \mu > -1, x > 0.$$

Et on a

$$I^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}x^\alpha$$

$$I^1(C) = Cx, \quad I^2(C) = \frac{Cx^2}{2}$$

Exercice 1.1.1 *(a) Soit $\alpha = \frac{1}{2}$, calculer $I^\alpha x^\mu$ pour $\mu = 0, \quad \mu = 1, \quad \mu = 2$.*
En déduire

$$I^{1/2}(1+s+s^2)$$

(b) Calculer l'intégrale fractionnaire I_a^α de la fonction $f(x) = (x-a)^{\rho-1}$, pour $Re\rho > 0$.

(c) Calculer l'intégrale fractionnaire I_b^α de la fonction $g(x) = (b-x)^{\rho-1}$, pour $Re\rho > 0$

2. Soient $f(x) = e^{kx}$ et k une constante non nulle.

$$I^\alpha e^{kt} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\xi)^{(\alpha-1)}e^{k\xi}d\xi,$$

pour $x = t-\xi$

$$I^\alpha e^{kt} = \frac{e^{kt}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t x^{(\alpha-1)}e^{-kx}dx.$$

Pour $Re(\alpha) > 0$,

$$\gamma^\star(\alpha,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)t^\alpha}\int_0^t \xi^{(\alpha-1)}e^{-\xi}d\xi.$$

Alors

$$I^\alpha e^{kt} = t^\alpha e^{kt}\gamma^\star(\alpha,kt).$$

1.2 Formule de Dirichlet

Soit G une fonction à deux variables continue sur $[a, b] \times [a, b]$.
La formule de Dirichlet nous donne un exemple de fonctions pour les quelles

$$\int_a^b dx \int_a^x G(x, y)dy = \int_a^b dy \int_y^b G(x, y)dx.$$

Soient F une fonction continue et λ, μ, ν des nombres positifs. Alors

$$\int_a^t (t-s)^{\mu-1} ds \int_a^s (y-a)^{\lambda-1}(s-y)^{\nu-1} F(s, y)dy$$

$$\int_a^t (y-a)^{\lambda-1} dy \int_y^t (t-s)^{\mu-1}(s-y)^{\nu-1} F(s, y)ds$$

Exemple 1.2.1 *Pour $a \leq t \leq s \leq x \leq b$*

$$\int_a^x \left(\int_a^s f(t)dt\right) ds = \int_a^x \left(\int_t^x ds\right) f(t)dt = \int_a^x (x-t)\, f(t)dt.$$

Exercice 1.2.1 *1. . Démontrer que*

$$\int_0^t (t-s)^{\mu-1} g(s)ds \int_0^s (s-y)^{\nu-1} f(y)dy$$

$$= \int_0^t f(y)dy \int_y^t (t-s)^{\mu-1}(s-y)^{\nu-1} g(s)ds$$

2. . Demontrer que

$$\int_0^t (t-s)^{\mu-1} ds \int_0^s (s-y)^{\nu-1} f(y)dy$$

$$= B(\mu, \nu) \int_0^t (t-y)^{(\mu+\nu-1)} f(y)dy.$$

Exercice 1.2.2

$$\int_a^s ds \int_a^{s_1} ds_2 \int_a^{s_2} f(t)dt = I^3 f(s).$$

Exercice 1.2.3 *Considérons le problème suivant*

$$\begin{cases} y^{(n)}(s) = f(s), \quad a \leq s \leq b \\ y(a) = y'(a) = \cdots = y^{(n-1)}(a) = 0, \end{cases}$$

Démontrer (par récurrence) que la solution est donnée par

$$y(s) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^s (s-t)^{n-1} f(t)dt, \quad a \leq s \leq b \tag{1.1}$$

Preuve
Pour $n = 1$*, on a :*

$$y'(s) = f(s), \quad y(a) = 0 \tag{1.2}$$

La résolution de (1.2) nous donne

$$\int_a^s y'(t)dt = \frac{1}{(1-1)!}\int_a^s (s-t)^{1-1} f(t)dt$$

$y(a) = 0$*, alors*

$$y(s) = \int_a^s f(t)dt$$

Supposons que (1.1) soit vraie pour n *et démontrons la pour* $n+1$*.*
Considérons

$$\begin{cases} y^{(n+1)}(s) = f(s), \\ y(a) = y'(a) = \cdots = y^{(n)}(a) = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

Puisque $y^{(n+1)} = (y')^n$*, posons* $u(s) = y'(s)$*, (1.3) devient :*

$$\begin{cases} u^{(n)}(s) = f(s), \\ u(a) = u'(a) = \cdots = u^{(n-1)}(a) = 0, \end{cases}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on trouve

$$\int_a^s y'(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^s \left(\int_a^z (z-t)^{n-1} f(t)dt\right) dz.$$

Donc

$$y(s) - y(a) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^s \left(\int_t^s (z-t)^{n-1} f(t)dz\right) dt = \int_a^s \frac{(s-t)^n}{(n)!} f(t)dt.$$

Puisque $y(a) = 0$*, alors*

$$y(s) = \int_a^s \frac{(s-t)^n}{(n)!} f(t)dt.$$

1.3 Règle de puissance

Soit f *une fonction continue sur* $[0, \infty[$ *et* $\mu, \nu > 0$*. Démontrer que pour tout* t *positif*

$$I^\mu \left[I^\nu f(t)\right] = I^{\mu+\nu} f(t) = I^\nu \left[I^\mu f(t)\right].$$

Preuve
Par définition de l'intégrale fractionnaire on a

$$\begin{aligned} I^\mu \left[I^\nu f\right](t) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^t (t-x)^{\mu-1} \left[I^\nu f(t)\right] dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^t (t-x)^{\mu-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (x-y)^{\nu-1} f(y)dy\right] dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-x)^{\mu-1}dx \int_0^x (x-y)^{\nu-1} f(y)dy \end{aligned}$$

D'après la formule de Dirichlet (exercice 1.2.1 (2.)) on trouve

$$\begin{aligned} I^{\mu}\left[I^{\nu} f\right](t) &= \frac{\beta(\mu,\nu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-y)^{\mu+\nu-1} f(y)dy \\ &= \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-y)^{\mu+\nu-1} f(y)dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu+\nu)} \int_0^t (t-y)^{\mu+\nu-1} f(y)dy \\ &= I^{\mu+\nu} f(t) \end{aligned}$$

Remarque 1.3.1 *Notons que la règle de puissance est similaire à la propriété connue dans le cas des dérivées d'ordre entier*

$$\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) = \frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}} f(t).$$

Remarque 1.3.2

1. *Considérons la formule de Taylor d'ordre $(n-1)$ au voisinage du point a*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{(n-1)} + R_n f(x)$$

$$R_n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f^{(n)}(t)dt.$$

Remarquons que $R_n f = I_a^n f^{(n)}$

2. *On peut voir l'intégrale de Riemann-Liouville comme une convolution de f avec la fonction h avec*

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^{(\mu-1)}}{\Gamma(\mu)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$J^{\mu} f = f \star h = \int_0^x h(x-y) f(y)dy = \int_0^x h(y) f(x-y)dy$$

1.4 Règle d'intégrale de Leibniz

Nous donnons la règle d'intégrale de Leibniz suivante

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{a(t)}^{b(t)} f(t,s)ds\right] = f(t,b(t))b'(t) - f(t,a(t))a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t,s)ds$$

Exemple 1.4.1 *Résoudre l'équation intégrale*

$$f(x) = x + \int_0^x \cos(x-t) f(t)dt, \quad f(0) = 0.$$

Preuve*. En utilisant la règle de Leibniz on trouve*

$$f'(x) = 1 - \int_0^x \sin(x-t) f(t)dt + f(x), \quad \text{avec} \quad f'(0) = 1.$$

et

$$f''(x) = f'(x) - \int_0^x \cos(x-t)f(t)dt$$

On a

$$f''(x) - f'(x) + f(x) = x, \quad avec \quad f(0) = 0, et \quad f'(0) = 1.$$

En appliquant la transformation de Laplace on trouve :

$$s^2F(s) - 1 - sF(s) + F(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2 - s + 1)F(s) = \frac{1}{s^2} + 1 = \frac{1+s^2}{s^2}$$

$$F(s) = \frac{1+s^2}{s^2(s^2 - s + 1)}$$

et on retrouve $f(x)$ solution de l'équation intégrale.

Proposition 1.4.1 *1.* $I^\alpha_{a+}(c_1 f + c_2 g)(t) = c_1 I^\alpha_{a+}f(t) + c_2 I^\alpha_{a+}g(t)$.

2. $\frac{d}{dt}\left(I^\alpha_{a+}f\right)(t) = \left(I^{\alpha-1}_{a+}f\right)(t), \quad \alpha > 1.$

3. $\lim_{\alpha\to 0+}\left(I^\alpha_{a+}f\right)(t) = f(t), \quad \alpha > 0.$

Preuve

2. Appliquons la règle de dérivation de Leibniz :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(I^\alpha_{a+}f\right)(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau\right) \\
&= \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{(\alpha-1)-1}f(\tau)d\tau \\
&= \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha-1+1)}\int_a^t (t-\tau)^{(\alpha-1)-1}f(\tau)d\tau \\
&= \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}\int_a^t (t-\tau)^{(\alpha-1)-1}f(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^t (t-\tau)^{(\alpha-1)-1}f(\tau)d\tau \\
&= \left(I^{\alpha-1}_{a+}f\right)(t).
\end{aligned}$$

1.5 Dérivation de l'intégrale de R.L.

Nous utilisons la règle de Leibniz pour démontrer le théorème de dérivation de l'intégrale de Riemann-Liouville.

Théorème 1.5.1 *Soit f une fonction continue sur $I = [0, \infty[$ et $\nu > 0$. Si Df est continue, alors*

$$\forall t > 0, \quad D\left[I^\nu f(t)\right] = I^\nu\left[Df(t)\right] + \frac{f(0)}{\Gamma(\nu)}t^{(\nu-1)}.$$

Preuve
Nous avons

$$I^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-z)^{\nu-1} f(z)dz,$$

posons $z = t - s^\lambda, \quad \lambda = \frac{1}{\nu}$, *alors*

$$I^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{t^\nu}^0 (s^\lambda)^{(\nu-1)} f(t-s^\lambda)(-\lambda s^{(\lambda-1)})ds$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^{t^\nu} f(t-s^\lambda)ds,$$

d'après la règle d'intégrale de Leibniz, on obtient

$$D\left[I^\nu f(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left[f(0)\nu t^{(\nu-1)} + \int_0^{t^\nu} \frac{\partial}{\partial t} f(t-s^\lambda)ds \right],$$

Maintenant si on inverse le changement de variable, c'est à dire si on pose $t - s^\lambda = z$, $ds = -\frac{1}{\lambda} s^{1-\lambda} dz$ *on obtient*

$$D\left[I^\nu f(t)\right] = \frac{f(0)}{\nu\Gamma(\nu)} \nu t^{\nu-1} + \frac{1}{\nu\Gamma(\nu)} \int_t^0 \frac{\partial}{\partial t} f(z)(\frac{-1}{\lambda} s^{(1-\lambda)})dz,$$

finalement, pour $\lambda = \frac{1}{\nu}$ *et* $s = (t-z)^{\frac{1}{\nu}}$ *on a*

$$D\left[I^\nu f(t)\right] = \frac{f(0)}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-z)^{\nu-1} \frac{\partial}{\partial t} f(z)dz$$
$$= I^\nu \left[Df(t)\right] + \frac{f(0)}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1}.$$

1.6 Transformation de Laplace de l'intégrale fractionnaire de R.L.

L'intégrale fractionnaire d'ordre α *de* $f(t)$

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-z)^{\alpha-1} f(z)dz, \quad \alpha > 0$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (h \star f)(t),$$

avec $h(t) = t^{\alpha-1}$. *On a*

$$\mathcal{L}(I^\alpha f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L}(t^{\alpha-1})(s) L(f(t))(s) = s^{-\alpha} F(s), \quad \alpha > 0.$$

avec $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ *et* $\mathcal{L}(t^{\alpha-1}(s) = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha}$.

Exemple 1.6.1 *Pour* $\alpha > 0, \quad \mu > -1$

$$\mathcal{L}(I^\alpha t^\mu) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\alpha+\mu+1}}$$

et

$$\mathcal{L}(I^\alpha e^{at}) = \frac{1}{s^\alpha(s-a)}$$

2 Dérivation fractionnaire

La notion de dérivation fractionnaire consiste à généraliser la notion de dérivation à l'ordre non entier (réel ou complexe).
On a pour $y = x^m; \quad m \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}; \quad m \geq n.$$

2.1 Dérivation au sens de Riemann-Liouville d'ordre α

Définition 2.1.1 *Soit* α *un nombre réel positif et* $n = [\alpha] + 1$ *alors l'opérateur de dérivation fractionnaire d'ordre* α *d'une fonction* f *est définie par*

$$D_a^\alpha f(x) = D^n \left[I_a^{n-\alpha} f(x) \right].$$

Avec $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$.

Remarque 2.1.1
1. *Pour simplifier on peut prendre* $a = 0$ *et on écrit* D^α *au lieu de* D_0^α.
2. *Pour* $\alpha = 0$, *on obtient l'opérateur identité* $D^0 f = f$.
3. *Pour* $\alpha = n$, n *entier, l'opérateur donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre* n.
$$D_a^n f(x) = D^{n+1} \left[I_a^{n+1-n} f(x) \right] = D^{n+1} \left[I_a^1 f(x) \right] = D^n f(x).$$

2.2 Existence de la dérivation fractionnaire

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction f *existe si* $Re(\alpha) > 0$ *et* f *continue cependant cette condition n'est pas suffisante pour assurer l'existence de la dérivée fractionnaire.*
Exemple :
Soit f *une fonction continue mais n'est pas dérivable, soit* $\alpha = 1$, *on a*

$$I_a^1 f(x) = \int_a^x f(t)dt$$

.

$$D_a^1 f(x) = D^2 \left[I_a^1 f(x) \right] = D^2 \int_a^x f(t)dt = Df(x),$$

mais par hypothèse f *n'est pas dérivable.*

Remarque 2.2.1 *Pour* $x > 0$, *si* f n *fois continument dérivable, la dérivation de Riemann-Liouville existe.*

Exemple 2.2.1 *Soit* $f(x) = x^\mu$ *pour* $x > 0, \quad \mu > -1$ *on a*

$$D^\alpha x^\mu = D^n [I^{n-\alpha} x^\mu].$$

On a

$$I^\beta x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\beta+1)} x^{(\mu+\beta)}, \quad Re(\beta) > 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} D^\alpha x^\mu &= D^n\left[\tfrac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+n-\alpha+1)}x^{(\mu+n-\alpha)}\right] \\ &= \tfrac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+n-\alpha+1)}D^n x^{(\mu+n-\alpha)} \\ &= \tfrac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+n-\alpha+1)}(\mu+n-\alpha)\cdots(\mu-\alpha)x^{\mu-\alpha} \\ &= \tfrac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)}x^{\mu-\alpha} \end{aligned}$$

$f(x)$	$D^{\frac{1}{2}}f(x)$
x^0	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{-1}{2}}$
x^1	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}$
x^2	$\frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}$

Remarque 2.2.2 *Si α n'est pas entier D^α n'est pas constante cela vient du fait que la définition de D^α fait intervenir une intégrale ($m=0, \quad D^\alpha 1 = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad \alpha \geq 0, \quad x \geq 0$).*

2.3 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville de quelques fonctions usuelles

1. *$f(x) = (x-a)^\beta$ avec $\beta > -1$.*
   Il suffit d'appliquer la définition et le résultat

$$\begin{aligned} D_a^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{d^n}{dx^n}\left(I^{n-\alpha}(x-a)^\beta\right) \\ &= \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}(x-a)^{\beta+n-\alpha}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{\beta+n-\alpha}. \end{aligned}$$

On sait que

$$\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{\beta+n-\alpha} = (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\cdots(\beta-\alpha+1)(x-a)^{\beta-\alpha}$$

et comme

$$\Gamma(\beta+n-\alpha+1) = (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\cdots(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1).$$

On trouve

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\cdots(\beta-\alpha+1)(x-a)^{\beta-\alpha}}{(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\cdots(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}$$

Donc

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}$$

Pour $a=0$, on retrouve

$$D_a^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{\beta-\alpha}$$

Corollaire 2.3.1 *$D^\alpha x^\beta = 0$, pour tout $\beta = \alpha - i$ avec $i = 1, 2, 3, \cdots, n)$(n est le plus petit entier $\geq \alpha$.*

En effet

$$\begin{aligned}
D^\alpha x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^x (x-\tau)^{\alpha-n+1}\tau^\beta d\tau \\
&= \frac{d^n}{dx^n}\left(I^{n-\alpha)}x^\beta\right) \\
&= \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}x^{\beta+n-\alpha}\right) \\
&= \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}x^{\beta+n-\alpha}\right) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}\frac{d^n}{dt^n}\left(x^{n-i}\right) = 0.
\end{aligned}$$

2. ***La fonction constante*** *$f(x) = C$:*

$$\begin{aligned}
D_a^\alpha C &= \frac{d^n}{dx^n}\left(I_a^{n-\alpha}C\right) \\
&= \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}(x-a)^{n-\alpha}\right) \\
&= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha+1)}\frac{d^n}{dt^n}(x-a)^{n-\alpha}.
\end{aligned}$$

On a

$$\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{n-\alpha} = (n-\alpha)(n-\alpha-1)\cdots(1-\alpha)(x-a)^{-\alpha}$$

$$\Gamma(n-\alpha+1) = (n-\alpha)(n-\alpha-1)\cdots(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha).$$

Donc

$$D_a^\alpha C = \frac{C(n-\alpha)(n-\alpha-1)\cdots(1-\alpha)(x-a)^{-\alpha}}{(n-\alpha)(n-\alpha-1)\cdots(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$$

$$D_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}.$$

La dérivée de R.L. d'une constante n'est pas nulle.

3. *La fonction exponentielle* $f(x) = \exp(kx)$*, pour* $k > 0$ *et* $\alpha > 0$*,* $\alpha \notin \mathbb{N}$*.*

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{-\infty} \exp(kx) &= \frac{d^n}{dx^n}\left(I^{n-\alpha}_{-\infty} \exp(kx)\right) \\ &= \frac{d^n}{dx^n}\left(k^{\alpha-n} \exp(kx)\right) \\ &= k^{\alpha-n} k^n \exp(kx) \\ &= k^{\alpha} \exp(kx). \end{aligned}$$

Donc

$$D^{\alpha}_{-\infty} \exp(kx) = k^{\alpha} \exp(kx).$$

4. ***Les fonctions*** $\sin bx$ ***et*** $\cos bx$
On a d'après la formule précédente :

$$D^{\alpha}_{-\infty} \exp(ibx) = (ib)^{\alpha} \exp(ibx) = i^{\alpha} b^{\alpha} \exp(ibx).$$

D'après la formule de Moivre, on a :

$$i^{\alpha} = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha} = \cos\frac{\alpha\pi}{2} + i\sin\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Donc

$$D^{\alpha}_{-\infty} \exp(ibx) = b^{\alpha}\left(\cos\frac{\alpha\pi}{2} + i\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right)(\cos bx + i\sin bx)$$

Comme $D^{\alpha}_{-\infty}$ *est linéaire, alors*

$$D^{\alpha}_{-\infty} \exp(ibx) = D^{\alpha}_{-\infty} \cos bx + i D^{\alpha}_{-\infty} \sin bx.$$

Donc

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{-\infty} \cos bx + i D^{\alpha}_{-\infty} \sin bx &= b^{\alpha}\left(\cos\frac{\alpha\pi}{2} + i\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right)(\cos bx + i\sin bx) \\ &= b^{\alpha}\left(\cos\frac{\alpha\pi}{2}\cos bx - \sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin bx\right) \\ &+ i b^{\alpha}\left(\sin\frac{\alpha\pi}{2}\cos bx + \cos\frac{\alpha\pi}{2}\sin bx\right) \\ &= b^{\alpha}\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2} + bx\right) + i b^{\alpha}\left(\sin\frac{\alpha\pi}{2} + bx\right) \end{aligned}$$

Par identification des deux membres de l'égalité on trouve :

$$D^{\alpha}_{-\infty} \cos bx = b^{\alpha}\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2} + bx\right)$$

et

$$D^{\alpha}_{-\infty} \sin bx = b^{\alpha}\left(\sin\frac{\alpha\pi}{2} + bx\right)$$

2.4 Opérateur de dérivé de Riemann-Liouville

Théorème 2.4.1 *D^α est l'opérateur inverse à gauche de I^α i.e. :*

$$D^\alpha I^\alpha f(x) = f(x), \quad \forall x \in [0, \infty[$$

Preuve.
Soit $n-1 \leq \alpha \leq n$, où $n \in \mathbb{N}$ alors $\forall x \in [0, \infty[$

$$D^\alpha I^\alpha f(x) = D^n \left[I^{n-\alpha}(I^\alpha) f(x))\right]$$

$$= D^n \left[I^n f(x)\right] = f(x).$$

Mais, il est en général faux que D^α soit l'inverse à droite de I^α i.e. $I^\alpha D^\alpha \neq I$

2.5 Transformation de Laplace de la dérivée au sens de Riemann-Liouville

On rappel la formule de la transformée de Laplace de $f^{(n)}$

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

$$= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)$$

On a

$$D_a^\alpha f(t) = D^n \left[I_a^{n-\alpha} f(t)\right]$$

La transformée de Laplace de la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une fonction f est donnée par

$$\mathcal{L}\left(D_a^\alpha f(t)\right)(s) = \mathcal{L}\left(D^n \left[I_a^{n-\alpha} f(t)\right]\right)$$

$$= s^n \mathcal{L}\left(I_a^{n-\alpha} f(t)\right) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^k \left[I_a^{n-\alpha} f(t)\right]_{t=0}$$

$$= s^n \left[s^{-(n-\alpha)} F(s)\right] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^k I_a^{n-\alpha} f(0)$$

$$= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^k I_a^{n-\alpha} f(0)$$

$n-1 < \alpha \leq n$.
En particulier, si $n=1$ et $n=2$ on trouve respectivement

$$\mathcal{L}\left(D_a^\alpha f(t)\right)(s) = s^\alpha F(s) - I_a^{1-\alpha} f(0), \quad 0 < \alpha \leq 1$$

$$\mathcal{L}\left(D_a^\alpha f(t)\right)(s) = s^\alpha F(s) - s I_a^{2-\alpha} f(0) - I_a^{1-\alpha} f(0), \quad 1 < \alpha \leq 2$$

Exercice 2.5.1 *Résoudre*

$$D^{4/3} f(t)) = 0.$$

2.6 Intégrales et dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles

$f(t)$	$I_{a+}^{\alpha} f(t)$	$D_{a+}^{\alpha} f(t)$	*Spécifications*
$(t-a)^{\beta}$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$	$a \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \beta > -1$
t^{β}	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}$	$a = 0, \alpha > 0, \beta > -1$
C	$\frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^{\alpha}$	$\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$	$a \in \mathbb{R}, \alpha > 0, C \in \mathbb{R}$
$\exp(kt)$	$k^{-\alpha}\exp(kt)$	$k^{\alpha}\exp(kt)$	$a = -\infty, \alpha > 0, k > 0$