Interrogation à remettre mardi le 04 01 2022

Exercice 1 *Considérons les opérateurs de décalage à droite R et à gauche L sur l^1 agissant sur un vecteur $x=(x_1,x_2,\cdots,)$ de l^1 par :*

$$R(x)=(0,x_1,x_2,\cdots,) \quad L(x)=(x_2,x_3,\cdots,)$$

1. *Montrer que R est injective mais pas surjective.*
2. *Montrer que le spectre ponctuel de R, $\sigma_p(R)=\emptyset$.*
3. *Sachant que le rayon spectrale $r(R)=1$. Montrer que le spectre de R, $\sigma(R)=\{\lambda\in\mathbb{C}, \mid\lambda\mid\leq 1\}$.*
4. *Montrer que $X=(1,0,0,\cdots,)\in\ker L$.*
5. *Pour $\mid\lambda\mid<1$, Montrer que $X_{[\lambda]}=(1,\lambda,\lambda,^2,\lambda,^3\cdots,)\in l^1$ et que $X_{[\lambda]}$ est vecteur propre associé à la valeur propre λ. ($X_{[\lambda]}\in\ker(L-\lambda I)$).*
6. *Pour $\mid\lambda\mid=1$. Supposons $\ker(L-\lambda I)\neq\{(0,0,\cdots)\}$ (donc il existe $X=(x_1,x_2,\cdots)\neq(0,0,\cdots)\in\ker(L-\lambda I)$). Montrer que $X=x_1X_{[\lambda]}$ et déduire que $L-\lambda I$ est injective.*
7. *Déduire que $\sigma_p(L)=\{\lambda\in\mathbb{C}, \quad \mid\lambda\mid<1\}$.*

Exercice 2 *Soit A une algèbre de Banach unitaire et $\varphi\in Car(A)$. Montrer que $\varphi(I)=1$ et $\varphi(x)\neq 0$ pour tout $x\in Inv(A)$.*
Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{C}^*-$algèbre commutative unitaire.

1. *Démontrer que si a est autoadjoint, alors $\varphi(a^*)=\overline{\varphi(a)}$.*
2. *Démontrer que $\varphi\left(\frac{a+a^*}{2}\right)$, $\quad\varphi\left(\frac{a-a^*}{2i}\right)$ sont réels, pour tout caractère φ.*
3. *Soit φ un caractère. Démontrer que φ est hermitien.*
4. *Démontrer que Inv est une isométrie de $\mathcal{A}$ dans $C(Car(\mathcal{A}))$.*