# Analyse fractionnaire :

7 novembre 2022

## Table des matières



# 1 Transformation de Laplace

## Introduction

Une des méthodes les plus efficaces pour résoudre certaines équations différentielles est d'utiliser la transformation de Laplace. Une analogie est donnée par les logarithmes, qui transforment les produits en sommes, et donc simplifient les calculs.
La transformée de Laplace est une transformation intégrale qui permet de transformer un problème d'analyse linéaire (équation différentielle ou aux dérivées partielles, équation intégrale,...) en un problème de résolution d'une équation algébrique.
La transformation de Laplace transforme des fonctions $f(t)$ en d'autres fonctions $F(s)$, on écrit

$$F = \mathcal{L}\{f\}$$

ou

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s).$$

La transformation de Laplace inverse transforme $F(s)$ en $f(t)$, on écrit :

$$f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$$

ou

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F\}(t).$$

La propriété essentielle est que, sous certaines conditions

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = sF(s).$$

Ainsi, les équations différentielles deviennent des équations algébriques.

## Transformation intégrale

**Définition 1.0.1** *Une* ***transformation intégrale*** *est un opérateur linéaire $T$ qui associe à toute fonction d'un espace fonctionnel $E$ sa transformée $T(f)$ dans un espace fonctionnel $F$, définie par*

$$T(f) : s \in \mathbb{R} \mapsto T(f)(s) = \int_{\mathbb{R}} k(t,s) f(t) dt$$

$k(t,s)$ *est une fonction caractérisant $T$, dite noyau de la transformation.*

On exigera qu'une transformation intégrale $T$ possède les propriétés suivantes :

1. continuité
2. existence d'une transformation inverse

**Transformations intégrales d'un usage courant**

1. Transformation de Laplace où $k(t,s) = e^{-ts}, (t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{C})$ ;
2. Transformation de Fourier où $k(t,s) = e^{-2i\pi ts}, (t, s \in \mathbb{R})$.

## Fonctions $\mathcal{C}_L$

La classe de fonctions réelles $\mathcal{C}_L$ est formée des fonctions causales continues par morceaux et d'ordre exponentielle.

1. Une fonction est **causale** si elle est nulle pour $t < 0$ :
$$f(t) \equiv 0 \quad si \quad t < 0.$$
2. Elle est **continue par morceaux** si elle n'admet que des points de discontinuité de première espèce (admettant une limite à gauche et une limite à droite).
3. Elle est **d'ordre exponentielle**, si elle est borne par une exponentielle, c'est-à-dire,
$$\exists C > 0, \exists T > 0 \quad telque \quad \forall t > T, \quad |f(t)| < Ce^{\rho t}.$$

Les fonctions usuelles $\sin(\omega t), t^2, e^t$ ne sont pas causales.
Une façon de créer des fonctions causales est d'utiliser la fonction **" échelon unité "** ou **" de Heaviside "**

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Plus généralement

$$\epsilon_a(t) = \epsilon(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$$

## 1.1 Définition de la transformation de Laplace

La transformation de Laplace d'une fonction de $\mathcal{C}_L$ est définie par

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(.)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} f(t)dt$$

**Remarque 1.1.1** *1. $F$ est définie par une intégrale impropre qui ne converge pas toujours si $f \notin \mathcal{C}_L$.*

*2. Si $f$ est discontinue en $0$, la borne inférieure de l'intégrale devrait être notée $0^+$.*

**Exemple 1.1.1** *Calculons la transformée de Laplace de l'exponentielle $f(t) = \epsilon(t)e^{2t}$.*

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{2t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{(2-s)t} dt \\ &= \left[\frac{1}{2-s} e^{(2-s)t}\right]_0^{+\infty}. \end{aligned}$$

*Posons $s = s_1 + is_2$, alors*

$$\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} \left| \frac{1}{2-s} e^{(2-s)t} \right| &= \frac{1}{|(2-s)|} \lim_{t \to +\infty} e^{(2-s_1)t} |e^{its_2}| \\ &= \frac{1}{|(2-s)|} \lim_{t \to +\infty} e^{(2-s_1)t}. \end{aligned}$$

*Cette dernière limite est nulle si $s_1 > 2$.*
*Ainsi, la valeur en la borne supérieure n'existe que si $Re(s) > 2$ et vaut alors $0$.*
*Alors que la valeur en la borne inférieure vaut $\frac{1}{2-s}$.*
*Ainsi*

$$\mathcal{L}\{\epsilon(t)e^{2t}\}(s) = \frac{1}{s-2} \qquad \textit{définie} \quad \textit{si} \quad Re(s) > 2.$$

*Plus généralement*

$$\mathcal{L}\{\epsilon(t)e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a} \qquad \textit{définie} \quad \textit{si} \quad Re(s) > a.$$

**Exemple 1.1.2** *Vérifions que la fonction $\epsilon(t)\frac{1}{t}$ n'admet pas de transformée de Laplace*

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{1}{t} dt = \int_0^1 e^{-st} \frac{1}{t} dt + \int_1^{+\infty} e^{-st} \frac{1}{t} dt.$$

*Sur l'intervalle $[0, 1]$, $\quad e^{-st} \geq e^{-s}$ , si $s$ est réel positif, donc*

$$\int_0^1 e^{-st} \frac{1}{t} dt \geq e^{-s} \int_0^1 \frac{1}{t} dt.$$

*Cette dernière intégrale diverge et ainsi $F(s)$ n'existe pas.*

## 1.2 Existence, unicité et transformation inverse

Ce dernier exemple pose la question du domaine de définition de $\mathcal{L}$, quelles sont les fonctions ayant une transformation de Laplace ? La question de l'unicité est aussi importante pour définir la transformation inverse, deux fonctions différentes peuvent-elles avoir la même transformation de Laplace ?
On définit **l'abscisse de convergence** $\rho$ de $f$ comme le plus petit réel $r$ tel que $F(s)$ converge pour $Re(s) > r$.

**Théorème 1.2.1** ***(Existence)*** *Si $f$ est continue ou bien continue par morceau sur $(0, T)$ et d'ordre exponentielle $\rho$ ($f \in \mathcal{C}_L$), alors sa transformation de Laplace existe pour tout $s$ vérifiant $Re(s) > \rho$*

**Preuve**

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}\{f(.)\}(s)| &= |\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt| \\
&\leq \int_0^\infty |e^{-st}||f(t)|dt \\
&= \int_0^\infty e^{-Re(s)t}|f(t)|dt \\
&\leq C\int_0^\infty e^{-Re(s)t} e^{\rho t} dt \\
&\leq C\int_0^\infty e^{-t(Re(s)-\rho)} dt \\
&= \frac{C}{Re(s)-\rho}; \quad Re(s) > \rho
\end{aligned}$$

**Exemple 1.2.1**

1. *La fonction* $\sinh(t)$ *vérifie*

$$\sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \leq \frac{1}{2}e^t$$

*et ainsi* $\epsilon(t)\sinh(t) \in \mathcal{C}_L$.

2. *Le développement en série de Taylor de l'exponentielle $e^t$ permet de prouver que, pour $n$ entier positif,*

$$t^n \leq n! e^t$$

*et ainsi* $\epsilon(t)t^n \in \mathcal{C}_L$.

3. *On peut prouver que, pour n'importe quelles constantes $a$ et $M$, pour $t$ assez grand,*

$$e^{t^2} > Me^{at}$$

*et donc que la fonction $\epsilon(t)e^{t^2}$ n'admet pas de transformation de Laplace.*

**Exercice 1.2.1** *Calculer la transformée de Laplace de la fonction $f$ dans les cas suivants :*

1. *La fonction de Heaviside :* $\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

*2.*
$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

*3.*
$$f(t) = \begin{cases} t^x & t > 0 \\ 0 & t \leq 0, \end{cases}$$

*avec* $x > -1$

*4.* $f(t) = \epsilon(t)e^{\alpha t}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$

## 1.3 Propriétés

Soient $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ admettant des transformations de Laplace $F(s)$ et $G(s)$. Nous avons les propriétés suivantes :

1. **Linéarité** :
$$\mathcal{L}\{af + bg\} = a\mathcal{L}\{f\} + b\mathcal{L}\{g\}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$
.

**Exemple 1.3.1**

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2} \Rightarrow \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\} + \mathcal{L}\{e^{-i\omega t}\}(s)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega}\right]$$

*De même on trouve* $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

2. **Transformée d'une homothétie** (Changement d'échelle) : Soit $a > 0$
$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\{f\}(\frac{s}{a})$$
3. **Retard fréquentiel** : Si $\mathcal{L}\{f(t)\}$ est définie pour $Re(s) > \alpha$, on a Pour tout $a \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}\{f\}(s + a) = \mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}(s), \quad Re(s) > \alpha - a.$
4. **Transformée d'une translation** $\mathcal{L}\{H(t-a)f(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$. ( $H$ fonction de Heaviside ).

**Exercice 1.3.1** *Calculer la transformée de Laplace de la fonction $f$ dans les cas suivants*

$$f(t) = \epsilon(t)\cosh(at + b),$$
$$f(t) = \epsilon(t)\sinh(at + b).$$

**Théorème 1.3.1** *Supposons que $g(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ pour $Re(s) > 0$ alors*

$$g(s - \rho) = \mathcal{L}(e^{\rho t}f(t)) \quad \rho \in \mathbb{R}, \quad Re(s) > \rho$$

**Preuve**
$$g(s-\rho) = \int_0^\infty e^{-(s-\rho)t}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}e^{\rho t}f(t)dt = \mathcal{L}\{e^{\rho t}f(t)\}.$$

**Exemple 1.3.2** *1. Nous avons*

$$\mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s^2} \quad (Re(s) > 0),$$

*alors*

$$\mathcal{L}\{te^{at}\}(s) = \frac{1}{(s-a)^2} \quad (Re(s) > a),$$

*de plus*

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\}(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (Re(s) > a),$$

*2.*

$$f(t) = \begin{cases} (t-1)^2 & t \geq 1 \\ 0 & 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

*Alors*

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = L\{(t-1)^2\}(s) = e^{-s} L(t^2) = \frac{2e^{-s}}{s^3}, \quad (Re(s) > 0).$$

**Théorème 1.3.2** *Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $[0, \infty[$ d'ordre exponentiel $\rho$. Alors*

$$\frac{d^n}{ds^n}(f(.))(s) = \mathcal{L}((-1)^n t^n f(t))(s), \quad n = 1, 2, \dots (s > \rho).$$

**Preuve**. Pour tout $s > \rho$, nous avons

$$\frac{d}{ds}(f(.))(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} f(t)dt = \int_0^{\infty} -te^{-st} f(t)dt = \mathcal{L}(-tf(t))(s).$$

## 1.4 Transformée de Laplace d'une dérivée

**Théorème 1.4.1** ***(Dérivation temporelle)*** *Soit $f$ une fonction continue sur $]0, +\infty[$. Supposons que $|f(t)| \leq Ce^{\rho t}$ sur $]0, +\infty[$ et que $f'$ est continue par morceau sur $]0, +\infty[$, alors la transformée de Laplace de la dérivée existe et vérifie*

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0^+).$$

**Preuve** On a $f'$ continue sur $]0, \infty[$, alors par intégration par partie on obtient

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)dt = \left[e^{-st} f(t)\right]_0^{+\infty} + sL(f(t))(s)$$

mais

$$|f(t)| \leq Ce^{\rho t},$$

donc

$$e^{-st} f(t) \to 0, \quad t \to +\infty,$$

alors

$$\left[e^{-st} f(t)\right]_0^{+\infty} = 0 - e^0 f(0) = -f(0).$$

**Exercice 1.4.1** *Supposons que toutes les dérivée successives d'une fonction $f$ soient continues sur*$]0,\infty[$*, que* $|f^{(i)}(t)| \leq Ce^{\rho t}$ *pour* $s > \rho$*, et que* $f^{(n)}$ *soit continue par morceaux sur* $]0,\infty[$
*Calculer* $\mathcal{L}\{f''\}(s)$.
*Calculer* $\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s)$ *pour tout* $n \geq 1$

**Exemple 1.4.1** *1. . Calculer* $\mathcal{L}\{\epsilon(t)\sin at\}(s), \quad s > 0.$

*2. . Calculer* $\mathcal{L}\{\epsilon(t)\sin^2\lambda t\}(s)$ *et* $\mathcal{L}\{\epsilon(t)\cos^2\lambda t\}(s)$

*Calculons* $\mathcal{L}\{\epsilon(t)\sin^2\lambda t\}(s)$ *et* $\mathcal{L}\{\epsilon(t)\cos^2\lambda t\}(s)$.

*Soit* $f(t) = \epsilon(t)\sin^2\lambda t$*, alors*

$$f'(t) = \epsilon(t)2\lambda\sin\lambda t\cos\lambda t = \epsilon(t)\lambda\sin 2\lambda t.$$

$$\mathcal{L}\{\lambda\epsilon(t)\sin 2\lambda t\} = s\mathcal{L}\{\epsilon(t)\sin^2\lambda t\} - \sin^2 0.$$

$$\mathcal{L}\{\epsilon(t)\sin^2\lambda t\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\epsilon(t)\lambda\sin 2\lambda t\} = \frac{2\lambda^2}{s(s^2+4\lambda^2)}.$$

*Alors*

$$\mathcal{L}\{\epsilon(t)\cos^2\lambda t\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\epsilon(t)(-\lambda)\sin 2\lambda t\} + \frac{1}{s} = -\frac{2\lambda^2}{s(s^2+4\lambda^2)} + \frac{1}{s} = \frac{s^2+2\lambda^2}{s(s^2+4\lambda^2)}$$

**Exemple 1.4.2** *Calculer la transformée de Laplace de la fonction*

$$f(t) = t^2 + t + 2 + e^{2t} + \cos(kt).$$

*En utilisant la transformée de Laplace de la fonction* $\cos(kt)$*,*
*calculer la transformation de Laplace de la fonction* $\sin(kt)$

## 1.5 Integration

L'intégration dans le domaine du temps correspond à diviser par $s$ dans le domaine de Laplace.

$$L(\int_0^t f(u)du) = \frac{F(s)}{s}.$$

On peut démontrer cette relation en utilisant la définition de la transformée de Laplace et une intégration par parties.
La transformée de Laplace permet de transformer les opérations de dérivation et intégration à de simples opérations algébriques.

## 1.6 Calcul de la transformation inverse en utilisant les tables

**Exemple 1.6.1** *Soit à calculer*

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+9}{s^2+6s+13}\}(s)$$

*Identifier la valeur de $a$.*
*Pour cela, il faut écrire le dénominateur sous forme de somme ou de différence de deux carrés.*

$$s^2 + 6s + 13 = (s+3)^2 - 9 + 13 = (s+3)^2 + 4$$

$$\frac{s+9}{(s+3)^2+2^2} = \frac{s+3}{(s+3)^2+2^2} + 3\frac{2}{(s+3)^2+2^2} = \mathcal{L}\{\epsilon(t)e^{-3t}\cos(2t) + 3\epsilon(t)e^{-3t}\sin(2t)\}(s).$$

**Transformées de Laplace de quelques fonctions**

| $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|
| $\epsilon(t).1$ | $\frac{1}{s}$ |
| $\epsilon(t).t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| $\epsilon(t).e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ |
| $\epsilon(t).t^x$ | $\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$ |
| $\epsilon(t).t^n$, $n$ entier positif | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $\epsilon(t).\sin(at)$ | $\frac{a}{s^2+a^2}$ |
| $\epsilon(t).\cos(at)$ | $\frac{s}{s^2+a^2}$ |
| $\epsilon(t).e^{iat}$ | $\frac{1}{s-ia}$ |
| $\epsilon(t).\sinh(at)$ | $\frac{a}{s^2-a^2}$ |
| $\epsilon(t).\cosh(at)$ | $\frac{s}{s^2-a^2}$ |

**Exercice 1.6.1** *Calculer la transformée de Laplace de*

1. $f(t) = \sqrt{t} + \sin(4t) + 3e^{2t}$,
2. $f(t) = (t+1)^2$,
3. $f(t) = 3^t$

**Exercice 1.6.2** *Calculer*

$$L(e^{-2t}\sin(4t)) \quad et \quad L(e^{-3t}(3\cos(6t)) - 5\sin(6t))$$

## 1.7 Transformée de Laplace d'un produit de convolution

**Définition 1.7.1** *Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On appelle* ***produit de convolution*** *de $f$ et $g$, et on note $f \star g$, la fonction définie (si elle existe) par*

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)du.$$

**Remarque 1.7.1** *1. Si on fait le changement de variables $v = t - u$ alors $dv = -du$ et les bornes s'inversent donc on a*

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)g(t-v)dv = (g \star f)(t).$$

.

2. *Supposons que les fonctions $f$ et $g$ soient causales i.e. on a $f(x) = g(x) = 0$ dès que $x < 0$. Lorsque $u < 0$ on a donc $f(t-u)g(u) = 0$ et lorsque $u > t$, on a $t - u < 0$ donc $f(t-u)g(u) = 0$.*
   *Si $f$ et $g$ sont nulles sur $]-\infty, 0[$, on a donc*

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du = \int_0^t f(u)g(t-u)du.$$

   *L'intérêt du produit de convolution est qu'il permet de déterminer l'original d'un produit de deux transformées de Laplace.*

**Théorème 1.7.1** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions nulles sur $]-\infty, 0[$, de transformée de Laplace respectives $F = \mathcal{L}(f)$ et $G = \mathcal{L}(g)$. Alors l'original du produit $F.G$ est la fonction $f \star g$ i.e. on a*

$$\mathcal{L}(f \star g)(s) = \mathcal{L}(f)(s)\mathcal{L}(g)(s)$$

**Exercice 1.7.1** *Cherchons l'original de la fonction $F$ définie par $F(s) = \frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$.*

# 2 Application de la transformation de Laplace

## 2.1 Transformée de Laplace d'une fonction périodique

Soit $f$ une fonction $T-$périodique ($T > 0$), définie et bornée sur $\mathbb{R}_+$, continue par morceaux sur tout segment, soit $f_0$ définie par $t \mapsto f(t)\mathbf{I}_{[0,T]}(t)$ ($f_0$ motif périodique de $f$).
Montrer que pour tout $s > 0$

$$L(f)(s) = \frac{L(f_0)(s)}{1 - e^{-sT}} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt.$$

En déduire que $\lim_{s \to 0^+} sF(s) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$.
**Application**

1. $f_0(t) = n\mathbf{I}_{[0,\frac{1}{n}]}(t) + 0\mathbf{I}_{[\frac{1}{n},T]}(t)$. $\quad \lim_{n\to\infty} L(f_0)(s)$.
2. Calculer la transformation de Laplace de la fonction $f$ $\;2\pi-$ périodique définie par : $f(t) = \sin t$ si $0 < t < \pi$, $f(t) = 0$ si $\pi < t < 2\pi$.

**Exemple 2.1.1** ***signal rampe***.
*Le signal rampe correspond à la fonction $f$ nulle pour $t < 0$, $1-$périodique sur $\mathbb{R}^+$ et définie par $f(t) = t$ pour $0 \leq t < 1$. Si on note $F$ la transformée de Laplace de $f$, calculer $F(s)$.*

## 2.2 Résolution d'une équation différentielle

**Exemple 2.2.1** *Cherchons à résoudre une équation différentielle à coefficients constants.*

$$y" - 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

*On applique la transformation de Laplace à chaque membre et on obtient*

$$\left(s^2Y - sy(0) - y'(0)\right) - 4Y = 0$$

*et en introduisant les conditions initiales*

$$\left(s^2Y - s - 2)\right) - 4Y = 0$$

*d'où*

$$Y(s) = \frac{s+2}{s^2-4} = \frac{1}{s-2}$$

*et donc*

$$y(t) = \epsilon(t)e^{2t}$$

**Exemple 2.2.2** *Soit*

$$f(t) = \epsilon(t)\sin^2(\omega t).$$

*On a* $f'(t) = \epsilon(t)2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) = \epsilon(t)\omega\sin(2\omega t)$.
*On a*

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = \frac{2\omega^2}{s^2+4\omega^2} = sF(s) \Rightarrow F(s) = \frac{2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}$$

**Exercice 2.2.1** 1. *Résoudre*

$$y" + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

2. *Soit* $f(t) = \epsilon(t)t\sin(\omega t)$.
   *Calculer* $f'(t)$ *et* $f"(t)$.
   *Déduire* $F(s)$.

**Exercice 2.2.2** *Résoudre*

$$y"(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4\sin t.$$
$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -2.$$

**Exercice 2.2.3** *Résoudre*

$$f^{"}(x) - 2f^{'}(x) + f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}},$$

*pour tout* $x > 0$*, avec les conditions initiales :* $f(0) = f^{'}(0) = 0$.

1. *Démontrer que* $L(f)(s) = \frac{1}{(s-1)^2\sqrt{s}}$.
2. *En déduire* $f(x)$ *par la formule de convolution.*

## 2.3 Résolution d'une équation intégrale

On appelle équation intégrale de Volterra de deuxième espèce, une équation de la forme :

$$f(x) + \int_a^x k(x,t)f(t)dt = g(x)$$

où $g$ et $k$ sont des fonctions connues et $f$ est une fonction inconnue. Nous nous intéressons ici au cas où $a = 0$ et $k(x,t) = h(x-t)$ avec $h$ fonction à support dans $\mathbb{R}_+$. Nous nous plaçons sous les hypothèses d'existence des transformées de Laplace. Si on note $G, H$ et $F$ les transformées de Laplace respectives de $g, h$ et $f$, la transformation de Laplace appliquée à l'équation de Volterra s'écrit

$$F(p) + H(p)F(p) = G(p.)$$

On en déduit que $F(p) = \frac{G(p)}{1+H(p)}$

**Exemple 2.3.1** *Résoudre*

$$x^2 + \int_0^x \sin(x-t) f(t) dt = f(x)$$

**Preuve Voir TD**