I. Intégrales simples :

I.1 Intégrale de Riemann :

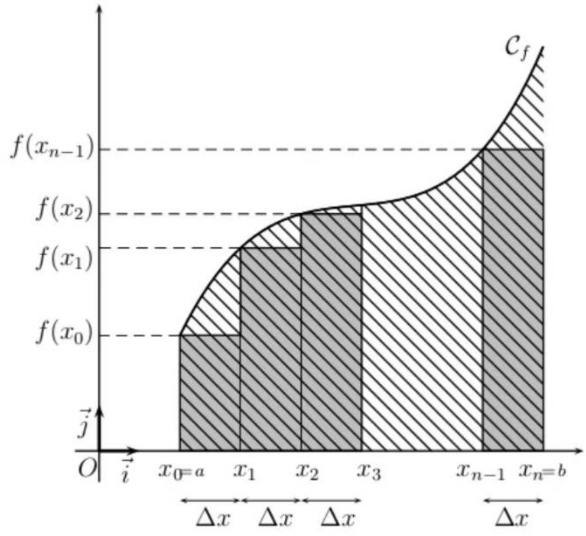
Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$.La situation est présenté ci-dessous dans le cas d'une fonction f croissante, et peut se généraliser à une classe bien plus importante de fonctions.

On découpe l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de longueurs $\Delta_x = \frac{b-a}{n}$:

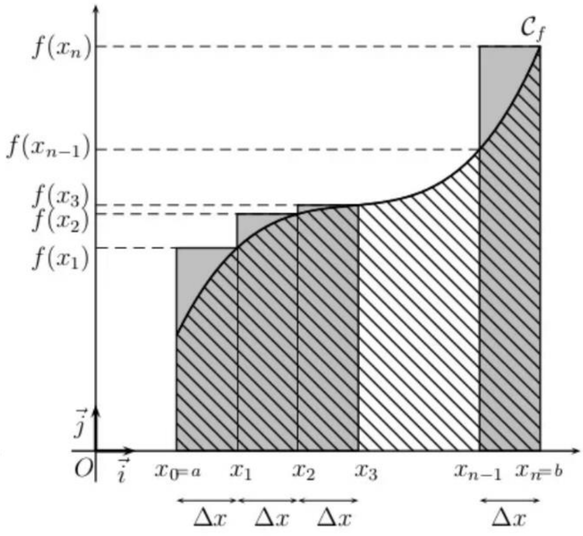
$$[x_0, x_1];\ [x_1, x_2]; [x_2, x_3]; \dots\dots\dots [x_{n-1}, x_n]$$

Avec $x_0 = a, x_1 = a + \Delta_x, x_2 = x_1 + \Delta_x = x_0 + 2\Delta_x, \dots..$

La suite(x_k) *des abscisses est une suite arithmétique de raison*Δ_x. En particulier, pour tout entier k, la $k^{ème}$ abscisse est $x_k = a + k\Delta_x$.



Premier cas



Deuxième cas

Dans les deux cas, l'aire grisée est la somme des aires de chaque rectangle qui la compose :

Premier cas :

$$S_n = f(x_0)\Delta_x + f(x_1)\Delta_x + \cdots\cdots\cdots f(x_{n-1})\Delta_x = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta_x$$

Deuxième cas :

$$S'_n = f(x_1)\Delta_x + f(x_2)\Delta_x + \cdots\cdots\cdots f(x_n)\Delta_x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_x$$

L'aire hachurée est comprise entre ces deux aires grisées :

$$S_n \leq \int_a^b f(x_k)dx \leq S'_n$$

Ces deux suites (S_n) et (S'_n) sont adjacentes et convergent vers une limite commune qui est l'aire recherchée ; l'intégrale de f de *a* à *b :*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S'_n = \int_a^b f(x)dx$$

La notation $\int_a^b f(x)dx$ s'explique à partir des calculs d'aire précédents, à la distance où

$\Delta_x \to 0$, et donc n→ +∞, et le symbole $\sum se$ transforme en $\int$:

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta_x\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, \Delta_x$

I.2 Primitive :

On dit primitive de la fonction f(x) la fonction F(x) dont la dérivée première est f(x) :

F'(x)=f(x) → F(x) est primitive de f(x).

Exemples :

a) $(lnx)'=\frac{1}{x} \to lnx$ est primitive de $\frac{1}{x}$;

b) $(sinx)'=\cos x \to sinx$ est primitive de $\cos x$

I.3 Intégrale indéfinie :

L'expression générale F(x)+C, où F(x) est la primitive de la fonction f(x) et C est une constante par rapport à la variable x, est appelée intégrale indéfinie de la fonction f(x) ou de la différentielle f(x) dx.

Ainsi par définition :

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

I.4 Intégrale définie :

La valeur de l'intégrale définie est donnée par :

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$ = F(b)−F(a)

Avec b la borne supérieure, a la borne inférieure et F(x) la primitive de la fonction f(x).

Intégrales usuelles :

TABLEAU DES INTEGRALES FONDAMENTALES

(Pour simplifier la constante d'intégration à été volontairement omise)

Fonctions de puissance

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(x)$$

Fonctions trigonométriques

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\int \sin px \, dx = -\frac{1}{p}\cos px \quad (p \neq 0)$$

$$\int \cos px \, dx = \frac{1}{p}\sin px \quad (p \neq 0)$$

$$\int tg\, x \, dx = -\ln|\cos x|$$

$$\int cotg\, x \, dx = \ln|\sin x|$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -cotg\, x$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 px} = \frac{1}{p} tg\, px \quad (p \neq 0)$$

Fonctions fractionnaires rationnelles

$$\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \quad (n = \text{entier positif})$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arc\, tg \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \arg th \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} \quad (\text{pour } |x| < a)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{a} \arg \coth \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} \quad (\text{pour } |x| > a)$$

Fonctions exponentielles

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

Fonctions hyperboliques

$$\int sh\, x \, dx = ch\, x$$

$$\int ch\, x \, dx = sh\, x$$

$$\int th\, x \, dx = \ln|ch\, x|$$

$$\int \coth x \, dx = \ln|sh\, x|$$

$$\int \frac{dx}{ch^2 x} = th\, x$$

$$\int \frac{dx}{sh^2 x} = -\coth x$$

Fonctions irrationnelles

$$\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arc \sin \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \arg sh \frac{x}{a} = \ln\left|\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)\right|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \arg ch \frac{x}{a} = \ln\left|\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)\right|$$

I.5 Règles et propriétés fondamentales des intégrales :

- $\int a\, f(x)dx = a\int f(x)dx$
- $\int \big(f(x) + g(x) - h(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx$

(Intégrale d'une somme de fonctions égale la somme des intégrales de ces fonctions ;

- *Règle de changement de variable (substitution) :* Soit x=$\varphi(t)$, on aura :

$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$ avec $\varphi'(t) = \frac{d\varphi}{dt}$;

Exemple :

En effectuant un changement de variables, calculer

$$I = \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$$

On peut donc poser $U = \sqrt{t}. Lorsque\ t = 1, U = 1\ et\ lorsque\ t = 4, U\ vaut\ 2,$

De plus, on a

$$\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = \frac{1-U}{U}$$

Et

$$U = \sqrt{t} \to t = U^2 \to dt = 2UdU$$

On en déduit que

$\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{t}$dt = $\int_1^2 \frac{1-U}{U}\ 2UdU$

$$= \int_1^2 (2-2U)dU$$

$=[2U - U^2]_1^2$

Donc I = -1

- *Intégration par parties :*

Soient U et V deux fonctions de x ; on aura :

$$\int U\, dV = UV - \int V dU$$

Exemple :

Calculer l'intégrale $\int x^2\ lnx\ dx;$ on a

$$\int x^2\ lnx\ dx = \left\{\begin{matrix} U = lnx & dU = \frac{1}{x}dx \\ dV = x^2\ dx & V = \frac{x^3}{3} \end{matrix}\right\} = \frac{x^3}{3}lnx - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx$$

Soit $\int x^2 \, lnx \, dx = \frac{x^3}{3} lnx - \frac{1}{3} \int x^2 dx$

$= \frac{x^3}{3} lnx - \frac{1}{3} . \frac{x^3}{3} + C$

Alors $\quad I = \frac{x^3}{3} lnx - \frac{x^3}{9} + C$

- $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$;

II. Intégrales multiples :

Les intégrales multiples constituent la généralisation des intégrales simples (les intégrales d'une fonction d'une seule variable réelle). On s'attache ici à la généralisation à des fonctions dont le nombre de variables est plus important (deux ou trois).

II.1 Intégrales doubles :

Définition :

On appelle intégrale double de la fonction $f(x, y)$ définie sur le domaine $D \subset R^2$, on la note $\iint_D f(x, y)dxdy$

II.1.1 Propriétés des intégrales doubles :

- $\iint_D [f(x, y) + g(x, y)]dx\,dy = \iint_D f(x, y)dxdy + \iint_D g(x, y)\mathrm{dxdy}$
- Si D est partagé en D_1 et D_2 on aura :

$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy$.........*

- Si a est une constante on aura :

  $\iint_D a\, f(x, y)dxdy = a \iint_D f(x, y)dxdy$

- Linéarité : $\iint_D (\lambda f + \mu g)(x, y)\, dxdy = \lambda \iint_D f(x, y)dxdy + \mu \iint_D g(x, y)dxdy$
- Si $f(x, y) \geq 0$ en tout point de D alors, $\iint_D f(x, y)dxdy > 0$.
- Si $\forall \ (x, y) \in D, f(x, y) \leq g(x, y)$ alors, $\iint_D f(x, y)\, dxdy \leq \iint_D g(x, y)\, dxdy$.
- $\left|\iint_D f(x, y)dxdy\right| \leq \iint_D |f(x, y)|\, dxdy$
- Parmi les intégrales doubles, on distingue deux d'entre-elles qui sont fondamentales :

On dit qu'un domaine D de $\mathbb{R}^2$ est régulier si D se décompose (se découpe) en une réunion finie de domaines élémentaires E du type :

$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \rightarrow$ Selon oy ou

$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c \leq y \leq d, \quad h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\} \rightarrow$ Selon ox

Avec h et g continues sur [a,b].

a) Le domaine D_1 a l'allure de la figure suivante, domaine limité par les deux droites d'équations x=a et x=b et, par les deux courbes d'équations ;

$y_1 = g_1(x)$ et $y_2 = g_2(x) \rightarrow$ Figure 1

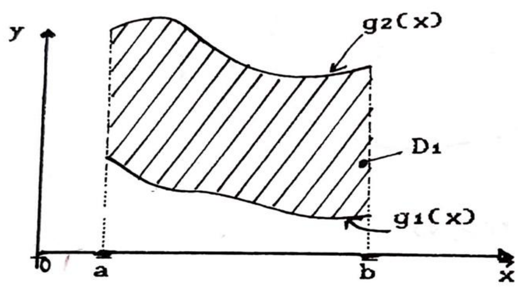


Figure1 : D_1 *domaine régulier selon oy*

$\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right]$dx

Ainsi on effectue l'intégration d'abord par rapport à y tout en supposant que x est constante, et par la suite on intègre par rapport à x.

Le domaine D_2 à l'allure de la figure 2, ce domaine est limité par deux droites y=c et y=d et par les courbes d'équations $x=h_1(y)$ et $x=h_2(y)$:

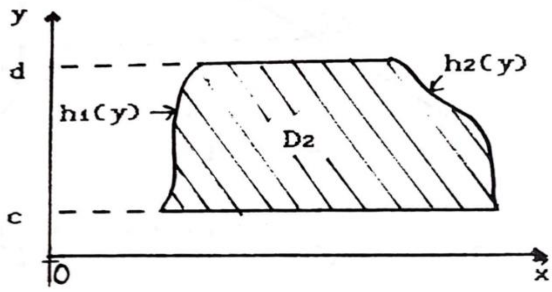


Figure2 : D_2 *domaine régulier selon ox*

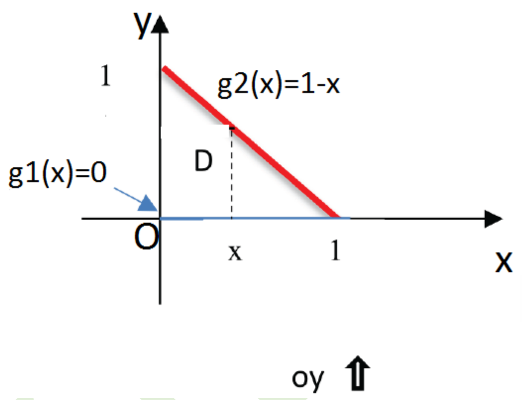
$\iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\right]$dy

On intègre d'abord par rapport à x tout en supposant y constant et puis par rapport à y.

Si le domaine D n'est ni du type D_1 ni du type D_2, on tâchera alors de le diviser tel que chaque domaine partiel aura la forme de D_1 ou de D_2. Pour intégrer $\iint_D f(x,y)dxdy$ il suffit d'appliquer la règle (*).

Notons que si l'une des droites ou les deux droites de D_1 ou de D_2 se résume en un seul point, la règle reste valable.

Exemple : Calculons l'intégrale suivante $I = \iint_D x^2ydxdy$ où D est le triangle de sommets $B_1 = O$ *de coordonnées* $(0,0)$; $B_2(1,0)$; $B_3(0,1)$.



L'ensemble D s'exprime sous la forme :$D = \{(x,y) \in R^2, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\}$

Alors :

$I = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} x^2\,ydy\right]dx=\int_0^1 \frac{1}{2}(x-1)^2x^2dx$

$I = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)\,dx = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right)\right]_0^1 = \frac{1}{60}$

II.1.2 Théorèmes de Fubini :

Théorème 1

Soit f une fonction continue sur un rectangle D=[a,b]x[c,d], nous avons :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$$

Exemple :

Soit : $D = [1,2] \times [0,2] \subset \mathbb{R}^2$ et $f: D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = ye^{xy}$.

Calculons $I = \iint_D f(x,y)dxdy$.

D'après le théorème de Fubini, on a :

$$I \;=\int_0^2\left[\int_1^2 ye^{xy}dx\right]dy$$

Or

$$\int_1^2 (ye^{xy})dx = [e^{xy}]_1^2 = e^{2y} - e^{y}$$

On en déduit

$$I \;= \int_0^2 (e^{2y} - e^{y})dy = \left[\frac{1}{2}e^{2y} - e^{y}\right]_0^2 = \frac{1}{2}e^{4} - e^{2} + \frac{1}{2}$$

Note: En intégrant d'abord par rapport à x, le précédent calcul nous a pris juste deux lignes. Si nous commençons par intégrer **d'abord par rapport à y**, nous nous rendons vite compte que le calcul est **moins évident**.

Corollaire :

$$\iint_D f_1(x).f_2(y)\;\, dxdy = \left[\int_a^b f_1(x)dx\right]\left[\int_c^d f_2(y)dy\right]$$

Exemple :

$$\iint_{[1,2]\times[3,5]} x.y\; dxdy = \int_1^2 x\; dx.\int_3^5 ydy = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_3^5 = \frac{3}{2}X\frac{16}{2} = 12$$

Théorème 2

Soit f une fonction continue sur un domaine borné D de $\mathbb{R}^2$. L'intégrale double

$I = \iint_D f(x,y)dxdy$ se calcule par :

- Si l'on peut représenter le domaine D sous la forme montrée dans la figure1 alors :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

- Si l'on peut représenter le domaine D sous la forme montrée dans la figure2 alors :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d\left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dx\right]dy$$

Calculer $I \;= \iint_D (x^2y)\; dxdy$ ou D est l'ensemble :

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, x + y \leq 1\}$$

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 y)\, dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x^2)^2\, dx = \frac{1}{60}$$

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-y} (x^2 y)\, dxdy = \frac{1}{3}\int_0^1 y(1-y)^3\, dy = \frac{1}{60}$$

II.1.3 Changement de variables dans une intégrale double :

Coordonnées quelconques : cas général :

Nous donnons ici la règle générale du changement de variables. Supposons qu'on effectue le changement de variables $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$.

Lorsque (x,y) varie dans le domaine D ; (u,v) varie dans un domaine D_1. On considère le déterminant de la matrice $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$ qu'on appelle matrice Jacobienne du changement de coordonnées.

on a :

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_{D_1} F(u,v).|J|.dudv$$

Exemple :

Calculer $I = \iint_D (x-1)^2\ dxdy$ ou sur le domaine

$$D = \left\{ \begin{matrix} (x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 \le x+y \le 1 \\ -2 \le x-y \le 2 \end{matrix} \right\}$$

Effectuant le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$$

Donc :

$$D_1 = \{(u,v) \in R^2, -1 \le U \le 1\ et -2 \le V \le 2\}$$

On a aussi : $x = \frac{u+v}{2}$; $y = \frac{u-v}{2}$

Le jacobien de ce changement de variables est :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

detJ = $-\frac{1}{2}$

On aura donc :

$$I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2}\left(\left(\frac{u+v}{2}\right)-1\right)^{2}dudv$$

$$=\frac{1}{8}\int_{-2}^{2}\left[\int_{-1}^{1}((u+v)^{2}-2(u+v)+4)du\right]dv$$

$$I=\frac{17}{3}$$

Changement en Coordonnées polaires :

Dans ce cas $u=\theta,\ v=r$:

$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ le jacobien de la transformation des coordonnées cartésiennes x et y en coordonnées polaires θ et r est donné par :

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

On a donc :

$$\iint_{D} f(x,y)\,dxdy=\iint_{D_1} F(r,\theta).rdrd\theta$$

Exemple :

Calculer $I=\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$ ou

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\qquad x^2+y^2\leq 1\}$$

En effectuant un changement de variables en coordonnées polaires nous aurons :

$$D_1=\{(r,\theta),\qquad 0\leq r\leq 1\ et\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$$

$$I=\iint_{D}\frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{rdrd\theta}{1+r^2}=\pi\, ln2$$

II.2 Intégrales triples :

Définition :

Soit $f: D \to R$ une fonction définie sur un domaine $D \subset R^3$, l'intégrale sur D de $f: D \to R$, s'appelle une intégrale triple, on la note $\iiint_D f = \iiint_D f(x,y,z)dxdydz$.

Remarque : On a les mêmes propriétés algébriques des intégrales doubles.

II.2.1 Formules de Fubini :

- *Cas où* $D = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$, le théorème de Fubini s'applique de façon assez naturelle, on se ramène à calculer trois intégrales simples :

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$$
$$= \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_e^f f(x,y,z)dz\right] dy\right] dx$$
$$= \int_e^f \left[\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y,z)dx\right] dy\right] dz$$

Exemple : Calcul de $I = \iiint_{[0,1]\times[1,2]\times[1,3]} (x+3yz)dxdydz$

$$I = \int_0^1 \left[\int_1^2 \left[\int_1^3 (x+3yz)dz\right] dy\right] dx$$
$$= \int_0^1 \left[\int_1^2 xz + 3y\frac{z^2}{2}\Big|_1^3 dy\right] dx$$
$$= \int_0^1 \left[\int_1^2 (2x+12y)dy\right] dx$$
$$= \int_0^1 2xy + 12\frac{y^2}{2}\Big|_1^2 dx$$
$$= \int_0^1 (2x+18)dx$$
$$=2\frac{x^2}{2} + 18x\Big|_0^1 = \mathbf{19}$$

- *Cas où* $D = \{(x,y,z) \in R^3 \,;\, (x,y) \in \Delta, u(x,y) \le z \le v(x,y)\}$,

où $u, v: D \to R$ *sont continues, D est un ensemble borné de* R^2*, alors :*

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_\Delta \left[\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dxdy.$$

Exemple : On calcule $\iiint_\Delta dxdydz$, $\Delta = \{(x,y) \in R^2; (x,y) \in D = [0,1]^2, 0 \le z \le x\}$

$$\iiint_\Delta dxdydz = \iint_D \left[\int_0^x dz\right] dxdy$$
$$= \iint_D z|_0^x \, dxdy$$
$$= \iint_D xdxdy$$
$$= \left[\int_0^1 xdx\right] \times \left[\int_0^1 dy\right]$$
$$= \frac{1}{2}$$

- *Cas où* $D = \{(x,y,z) \in R^3 \; ; \; , a \leq z \leq b\}, (x,y) \in \Delta(z),$

où $u, v: D \to R$ *sont continues, D(z) est un ensemble borné de* $R^2, \forall z \in [a,b]$*, alors :*

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left[\iint_{\Delta(z)} f(x,y,z)dxdy\right] dz.$$

II.2.2 Changement de variables :

Soient U et V deux ouverts de R^3 et

$$\varphi: U \to V$$
$$(u,v,w) \to (x,y,z)$$
$$detJ = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Si $\varphi(\Delta) = D$, on obtient :

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Delta f\big(\varphi(u,v,w)\big) \times detJ \; dudvdw$$

Exemple : Calculons l'intégrale triple de la fonction $f(x,y,z) = x + y + z$ sur la région R définie par $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, et\; 0 \leq z \leq 1 - x - y$.

En effectuant le changement de variables suivant :

$U = x$

$V = x + y$

$W = x + y + z$

Solution :

Avec ces changements de variables, la région R dans les nouvelles coordonnées sera définie par :

- De $0 \leq x \leq 1$ nous aurons $0 \leq U \leq 1$
- De $0 \leq y \leq 1 - x$ nous aurons $x \leq y + x \leq 1 \Rightarrow U \leq V \leq 1$
- De $0 \leq z \leq 1 - x - y$ nous aurons $x + y \leq z + x + y \leq 1 \Rightarrow V \leq W \leq 1$

$$detJ = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$I = \int_0^1 \int_U^1 \int_V^1 W.1.dWdV.dU$$

$$I = \int_0^1 \int_U^1 \frac{W^2}{2}\bigg|_V^1 \text{dV.du}$$

$$I = \int_0^1 \frac{V^3}{6} - \frac{V^3}{6}\bigg|_U^1 \text{du}$$

$$I = \int_0^1 (-\frac{1}{3} - \frac{U^3}{6} + \frac{U}{2})dU$$

$$I = -\frac{U}{3} - \frac{U^4}{24} + \frac{U^2}{4}\bigg|_0^1$$

$$I = -\frac{1}{8}$$

a) ***Coordonnées cylindriques :***

Les coordonnées cylindriques sont données par :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(\frac{y}{x}) \\ z = z \end{cases}$$

Le déterminant de la matrice Jacobienne sera :

$$\text{detJ} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \text{r}$$

Si $\varphi(\Delta) = D$ la formule du changement de variables s'écrit alors :

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Delta f(rcos\theta, rsin\theta, z) \times detJ\; drd\theta dz$$

Exemple :

$$\Delta = \{(r,\theta,z), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad et \quad 0 \leq z \leq 2\}$$

$$\iiint_D dxdydz = \iiint_\Delta rdrd\theta dz = \left[\int_0^1 rdr\right] \times \left[\int_0^{2\pi} d\theta\right] \times \left[\int_0^2 dz\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi \times 2 = 2\boldsymbol{\pi}$$

b) *Coordonnées sphériques :*

Les coordonnées sphériques sont données par :

$$\begin{cases} x = rcos\theta sin\varphi \\ y = rsin\theta sin\varphi \\ z = rcos\varphi \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = arctan(\frac{y}{x}) \\ \varphi = arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \end{cases}$$

En ouvrant la sphère, on voit un système de coordonnées sphériques.

$$detJ = \begin{vmatrix} cos\theta sin\varphi & -rsin\theta sin\varphi & rcos\theta cos\varphi \\ sin\theta sin\varphi & rcos\theta sin\varphi & rsin\theta cos\varphi \\ cos\varphi & 0 & -rsin\varphi \end{vmatrix}$$

$$detJ = r^2 sin\varphi$$

La formule du changement de variables s'écrit alors :

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Delta F(r,\theta,\varphi) \times r^2 sin\varphi\; drd\theta d\varphi$$

Exemple : On calcule le volume d'une demi-sphère dont :

$$\Delta = \left\{(r,\theta,\varphi), 0 \leq r \leq 1,\; 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\iiint_D (x^2+y^2)dxdydz = \iiint_\Delta r^2(sin\varphi)^2\, r^2\, sin\varphi\; drd\theta d\varphi$$

$$= \left[\int_0^1 r^4 dr\right] \times \left[\int_0^{2\pi} d\theta\right] \times \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\varphi\ (sin\varphi)^2 d\varphi\right]$$

$= \frac{r^5}{5}\Big|_0^1 \cdot\ \theta\Big|_0^{2\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\varphi(1-(cos\varphi)^2)\mathrm{d}\varphi$

Utilisons un changement de variables pour résoudre l'intégrale ;

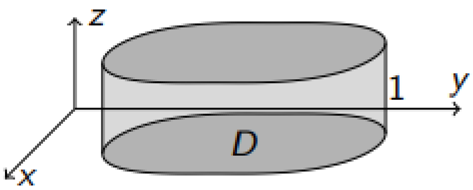
$$= \frac{1}{5}\ .2\pi\ .\int_1^0 -(1-U^2)\ dU$$

$$= \frac{4\pi}{15}$$

III. Application au calcul d'aires et de volumes

III.1 Calcul d'aire

Si D est un domaine borné de R^2. L'intégrale $\iint_D\ dxdy$ représente le volume sous le graphe de la fonction $f(x,y)$=1.

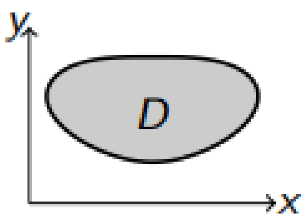


Ce solide Ω est un solide de hauteur de hauteur H =1 et de base D:

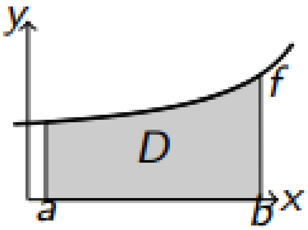
$\iint_D\ dxdy = Vol(\Omega)$ =Aire(D)× H=Aire (D).

III.1.1 Aire d'un domaine du plan:

L'aire d'un domaine D borne de R^2 est *Aire (D)*= $\iint_D\ dxdy$



Si D est la portion du plan sous le graphe d'une function $f\colon [a,b] \to$ R positive, si :



- $D = \{(x,y)/x \in [a,b], y \in [0, f(x,y)]\}$, alors *Aire* (D)=$\int_a^b f(x)dx$

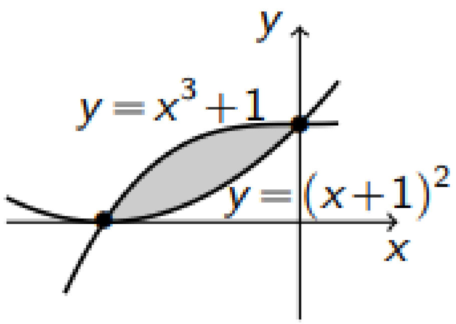
En effet: $\iint_D \ dxdy = \int_a^b \int_0^{f(x)} dydx =$

- $D = \{(x,y)/x \in [a,b], y \in [f_1(x), f_2(x)]\}$, alors

Aire (D)=$\iint_D \ dxdy = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dydx$

Exemple

Calculer l'aire du domaine D$\subset R^2$ délimité par les courbes d'équations $y = x^2 + 2x + 1$ et $y = x^3 + 1$



Solution

D'après le dessin, les deux points d'intersection des courbes sont de coordonnés (-1,0) et (0,1), on a donc

$$D = \{(x,y) \in R^2, -1 \leq x \leq 0, x^2 + 2x + 1 \ \leq \mathrm{y} \leq \ x^3 + 1\}$$

$$Aire\ (D) = \iint_D \ dxdy = \int_{-1}^{0} \left[\int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} dy\right] dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 + 1 - x^2 - 2x - 1) dx$$

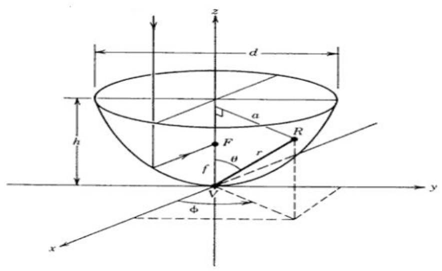
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{12}$$

III.1.2 Aires des surfaces :

On appelle D la région du plan ***xoy*** délimitée par ***la projection*** sur le plan ***xoy*** de la surface représentative d'une fonction f, notée $\sum$**.** L'aire de la surface de $\sum$ délimitée par sa projection D sur le plan ***xoy*** est donnée par $A = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\ dxdy$

Exemple

Calculons l'aire du paraboloïde de la figure si dessous :



$\sum = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, 0 \le z \le h\}$. Puisque la surface $\sum$ est égale au graphe de la fonction $f(x, y) = z = x^2 + y^2$ définie au-dessus du domaine $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le h\}$.d'où

$Aire \sum = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\ dxdy$

Utilisons les coordonnées polaires pour résoudre l'intégrale

$$Aire \sum = 2\pi \int_0^{\sqrt{h}} \sqrt{4r^2 + 1}\ \ rdr = \frac{\pi}{6}(\sqrt{(4h+1)^3}\ \ - 1)$$

III.2 Volume d'un solide

Définition : Le volume d'un solide est donné par $V = \iiint_D\ dxdy\ dz$ tel que D est le domaine délimité par ce solide.

Exemple

Calculer le volume d'une sphère.

$V = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \le R^2} dxdy\ dz$ avec $D = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2; x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$ d'où $V = 8 \iiint_D\ dxdydz$

Utilisons les coordonnées sphériques pour résoudre l'intégrale d'où

$$V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \int_0^R r^2 dr = \frac{4\pi}{3} R^3$$