

Chapitre 2 : Les séries numériques

II. 1 Généralités

Définition 1 : Soit une suite numérique infinie donnée $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$. On forme une série avec cette suite de nombres en séparant deux nombres consécutifs par le signe +. Les nombres $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ sont les termes de cette série. La somme

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ est dite $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série.

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite des nombres complexes ou réels, on appelle série de terme général u_n , et on note $\sum u_n$ la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{i=0}^n u_i$.

Remarque : 1) On remarque que $S_n - S_{n-1} = u_n, \forall n \geq 1$

2) Si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ définie à partir du rang n_0 , la série de terme général u_n est donnée par la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{i=n_0}^n u_i$.

Définition 2 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite des nombres complexes ou réels, on dit que la série de terme général u_n **converge**, si et seulement si la suite (S_n) est convergente.

Sa limite se note alors : $S = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, S est appelée somme de la série.

Si une série n'est pas convergente, on dit qu'elle **diverge**.

Exemples :

- Etudier la nature et calculer la somme dans le cas de convergence des séries de termes généraux :

$$1) u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$2) v_n = \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Solution :

$$1) \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{(a+b)n+a}{n(n+1)}$$

Par identification on trouve : $a=1$ et $b=-1$.

Alors $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, nous aurons donc :

$$S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n$$

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-1+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$; c'est-à-dire, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente vers sa somme $S=1$.

$$2) \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \log\left(\frac{n-1}{n}\right) = \log(n-1) - \log(n)$$

$$S_n = \sum_{k=2}^{+\infty} \log\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \log(k-1) - \log(k)$$

$$S_n = u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n$$

$$S_n = (\log(1) - \log(2)) + (\log(2) - \log(3)) + \dots + (\log(n-2) - \log(n-1)) + (\log(n-1) - \log(n))$$

$$S_n = -\log(n)$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-\log(n)) = -\infty$, donc $\sum_{k=2}^{+\infty} \log\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ est divergente.

Remarque :

Les premiers termes n'interviennent pas pour la convergence d'une série.

Tous les critères de convergence restent donc valables si les conditions demandées sont remplies (à partir d'un certain rang).

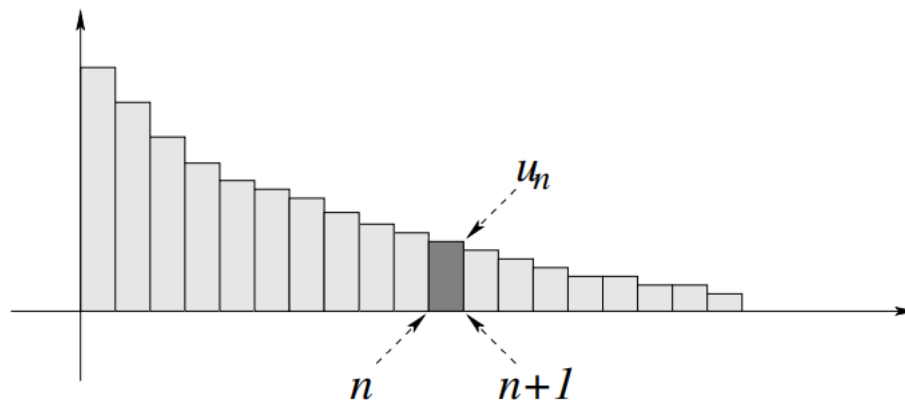


Figure1 : Somme d'une série sur $[0, +\infty[$.

À l'infini, la convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes. Changer un nombre fini de termes d'une série ajoute une même constante à toutes les sommes partielles à partir d'un certain rang. Cela ne change pas la nature, convergente ou divergente. Si elle est convergente, sa somme est évidemment modifiée (Figure1).

Théorème1 : condition nécessaire de convergence

Si la série réelle ou complexe $\sum u_n$ converge, alors la suite tend vers 0 à l'infini.

Autrement dit : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Théorème2 : critère de divergence grossière

Si la suite réelle ou complexe (u_n) ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Tenir bien que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \rightarrow \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ converge} \\ \text{ou} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ diverge} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0 \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ diverge}$$

- **Très important** on ne peut jamais dire que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge

Exemples :

- La série $\sum \frac{n}{n+1}$ diverge car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 \neq 0$
- $\sum \frac{1}{n+2}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+2}\right) = 0$, donc ici il faut étudier la nature de la série car elle peut **converger** comme elle peut **diverger**.
- Dédurre la limite du terme générale u_n de la série $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ qui est une série convergente.

Réponse : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente, et pour que cette série converge il est obligatoire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ soit égale à 0, parce que c'est la **condition nécessaire de la convergence.**

Théorème3 :

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes.

- La série somme $\sum(u_n + v_n)$ est convergente et on a $\sum_0^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_0^{+\infty} u_n + \sum_0^{+\infty} v_n$.
- Si λ est un scalaire, la série $\sum(\lambda u_n)$ est convergente $\rightarrow \sum_0^{+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum_0^{+\infty} u_n$
- Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors la série $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

II.2 Séries à termes positifs:

C'est une série dont les termes sont tous positifs, et sont plus faciles à étudier. Et dans ce cas $u_n \geq 0$ pour tout n . Une suite croissante $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a que deux comportements possibles. Soit elle est majorée et elle converge, soit elle tend vers $+\infty$ et elle diverge.

- *Les deux séries les plus souvent utilisées sont la série géométrique, et la série de Riemann.*

II.2.1 Série géométrique : Le terme général d'une série géométrique est $u_n = q^n$ où q est la raison et 1 est le premier terme. Les sommes partielles ont une expression explicite.

$$S_n = \sum_{i=0}^n q^i = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} n + 1 & \text{si } q = 1 \\ \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, la somme est $\frac{1}{1-q}$,

qui est le résultat de $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} = S$ (dans le cas où $q \neq 1$)

- Donc si $|q| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, et la série géométrique est convergente.

Si non la série géométrique diverge.

Exemples :

- Etudier la nature de la série $\sum_{n \geq 0} (3)^{-n}$, et si elle est convergente trouver sa somme S .

Solution :

On peut écrire la série $\sum_{n \geq 0} (3)^{-n}$ sous la forme $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{3}\right)^n$, on voit clairement que c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{3}$, et elle est convergente parce que $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, et la série converge vers sa somme $S = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

- Etudier la nature de la série $\sum_{n \geq 0} (3)^n$.

Solution :

C'est une série géométrique de raison 3, $|3| > 1$, donc la série diverge.

II.2.2 Série de Riemann : elle est sous la forme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, alors :

$$\begin{cases} \text{si } \alpha \leq 1 & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ diverge.} \\ \text{si } \alpha > 1 & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge.} \end{cases}$$

- Cas particulier de la série de Riemann :

Quand $\alpha = 1$ (le cas où la série de Riemann diverge), elle est appelée *Série harmonique*, elle est notée par $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, et elle est toujours **divergente**.

Exemples :

- La série de Riemann $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge, car $\alpha = 3 > 1$.
- La série de Riemann $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, car $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

II.2.3 Critères de convergence :

➤ Critères de comparaison :

Théorème1: Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs vérifiant :

$$u_n \leq v_n$$

A partir d'un certain rang. Alors :

- Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Théorème2: Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, si la limite non nulle :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \quad l \neq 0$$

Existe, alors les deux séries sont de même nature.

Cas particulier « Quotient » :

Posons $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$; avec $\alpha =$ le degré du dénominateur – degré du numérateur.

Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$ sera sous la forme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n$

Le théorème de comparaison permet d'utiliser des équivalents.

Soient (u_n) et (v_n) à termes strictement positifs, équivalentes au voisinage de $+\infty$.

$$u_n \approx v_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (convergentes ou divergentes).

Exemples :

Trouver la nature des séries numériques suivantes :

1) $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n^3 + 1}$

- 2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$
 3) $\sum_{n \geq 3} \frac{\ln(n)}{n}$

Solution :

1) Nous avons : $n^3 + 1 > n^3 \Rightarrow \frac{1}{n^3+1} < \frac{1}{n^3} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^3+1} < \sum \frac{1}{n^3}$

$\sum \frac{1}{n^3}$ Série de Riemann $\alpha = 3 > 1$, donc elle est convergente

Par conséquent $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n^3+1}$ converge selon le critère de comparaison.

2)

NB : Au voisinage de zéro, $\sin x \approx x \dots \dots *$

Alors assurons nous que $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, c'est-à-dire $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ est au voisinage de 0 ;

donc d'après la relation (*) $\sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \approx \frac{1}{2^n}$, et par conséquent

$$\begin{aligned} \sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) &\approx \sum \frac{1}{2^n} \\ \Rightarrow \sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) &\approx \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique convergente ($\left|\frac{1}{2}\right| < 1$), donc par équivalence à $+\infty$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ est convergente.

3) $\forall n \geq 3, \ln n \geq 1 \Rightarrow \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$
 $\Rightarrow \sum_{n \geq 3} \frac{\ln(n)}{n} \geq \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n}$

$\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n}$ est la série harmonique, elle est divergente, alors selon le critère de comparaison,

$\sum_{n \geq 3} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge aussi.

➤ **Critère de d'Alembert :**

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Si la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

Existe alors :

- 1) Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge
- 2) Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge
- 3) Si $l = 1$, on ne peut rien conclure et on change de critère

Exemple:

Soit la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} \times \frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!} \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} \times \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1 \\ &\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} \text{ Diverge} \end{aligned}$$

➤ **Critère de Cauchy :**

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Si la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$

Existe alors :

- 1) Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge
- 2) Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge
- 3) Si $l = 1$, on ne peut rien conclure et on change de critère

Exemple :

Etudier la convergence de la série :

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$$

Solution :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1$$

Donc la série est convergente.

II.3 Séries à termes quelconques :

II.3.1 Séries alternées :

Définition : Une série alternée est notée $\sum (-1)^n u_n$, avec $u_n \geq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = (-1)^0 u_0 + (-1)^1 u_1 + (-1)^2 u_2 + \dots = u_0 - u_1 + u_2 - \dots$$

Convergence des séries alternées :

➤ **Critère spécial séries alternées « Théorème de Leibniz » :**

On considère la série alternée $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$:

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
- Si (u_n) est décroissante ;

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ est convergente.

Exemple :

Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Solution :

Nous avons $u_n = \frac{1}{n} > 0$, donc c'est bien une série alternée.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$, donc u_n est décroissante.

Les deux conditions sont satisfaites, alors la série alternée $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

➤ **Théorème 2 :**

- Toute série absolument convergente est convergente, mais la réciproque est fautive.
- Une série qui est convergente sans être absolument convergente (avec la valeur absolue) est dite *semi-convergente*.

Exemples :

1) La série de l'exemple précédent $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente car : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente d'après Leibniz et $\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est divergente.

2) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n^3}{n!}$ est absolument convergente alors, elle est convergente car :

$\left| \frac{(-1)^n n^3}{n!} \right| = \frac{n^3}{n!}$, donc on va étudier sa nature autant qu'une série à termes positifs,

Appliquons le critère de d'Alembert : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^3} \times \frac{(n+1)^3}{(n+1)!}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)n!} \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)} \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = 0 < 1$, $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{(-1)^n n^3}{n!} \right|$ est convergente \Rightarrow

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n^3}{n!}$ est absolument convergente, donc elle est convergente.

II.4 Séries de fonctions :

- Une série de fonctions est une série dont le terme général est fonction de **x**.
 $u_n = u_n(x)$.

Une série de fonctions est une série dont le terme général est désignée par :

$$\sum u_n(x) \text{ ou } \sum f_n(x).$$

- Domaine de convergence de la série $\sum u_n(x)$ est l'ensemble des valeurs de x telle que la série converge.

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum u_n(x) \text{ converge} \right\}$$

II.4.1 Séries entières :

On appelle série entière réelle toute série de fonctions de la forme $\sum a_n x^n$

- Si $|x| < R \Rightarrow$ converge absolument.
- Si $|x| > R \Rightarrow$ diverge.
- Si $|x| = R \Rightarrow$ la série peut converger comme elle peut diverger.

R est le rayon de convergence ($0 \leq R < +\infty$) donné par les règles suivantes :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{ Règle de d'Alembert.}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \text{ Règle de Cauchy.}$$

Exemple :

Calculer le rayon de convergence R $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + 1)2^{n+1} x^n$ et étudier sa convergence en $x = \pm R$.

En déduire le domaine de convergence de la série.

Solution :

On a $a_n = (n^2 + 1)2^{n+1}$ et $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{((n+1)^2 + 1)2^{n+1+1}}{(n^2 + 1)2^{n+1}} \right|$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n^2 + 1 + 2n + 1)2^{n+2}}{(n^2 + 1)2^{n+1}} = 2$

$$\frac{1}{R} = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}$$

✚ Pour $x=R=\frac{1}{2}$,

$$\text{on a } \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + 1)2^{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + 1)2^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n^2 + 1)$$

qui est divergente car $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2(n^2 + 1) = +\infty \neq 0$

✚ Pour $x=-R=-\frac{1}{2}$,

$$\text{on a } \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + 1)2^{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n^2 + 1) (-1)^n \text{ qui est divergente car :}$$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2(n^2 + 1)(-1)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2(n^2 + 1) = +\infty \dots \dots \text{si } n \text{ est pair} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 2(n^2 + 1)(-1)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -2(n^2 + 1) = -\infty \dots \dots \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Deux limites différentes donc la limite n'existe pas.

Le domaine de convergence est donc $D_c = \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$.

Sources :

- **Luc Rozoy, Bernard Ycart**,2014, cours séries numériques, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- **Leila Douha**. Résumé sur les séries. Math3, Université Batna2.
- <https://www.fichier-pdf.fr/2015/01/29/02-series-numeriques-cours-complet-2/preview/page/1/>

K.CHERGUI