Chapitre3 : Les séries numériques

III. 1 Généralités

Définition1 : Soit une suite numérique infinie donnée $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots\ldots, u_n, \ldots.$. On forme une série avec cette suite de nombres en séparant deux nombres consécutifs par le signe +. Les nombres $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots\ldots, u_n$.....sont les termes de cette série. La somme

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_n$ est dite n$^{\text{ième}}$ somme partielle de la série.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des nombres complexes ou réels, on appelle série de terme général u_n, et on note $\sum u_n$ la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i$.

Remarque : 1) On remarque que $S_n - S_{n-1} = u_n, \forall n \geq 1$

2) Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ définie à partir du rang n_0, la série de terme général u_n est donnée par la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{i=n_0}^{i=n} u_i$.

Définition2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des nombres complexes ou réels, on dit que la série de terme général u_n **converge**, si et seulement si la suite (S_n) est convergente.

Sa limite se note alors : $\boldsymbol{S} = \lim\limits_{N\to+\infty} S_N = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, $\boldsymbol{S}$ est appelée somme de la série.

Si une série n'est pas convergente, on dit qu'elle **diverge**.

Exemples :

- Etudier la nature et calculer la somme dans le cas de convergence des séries de termes généraux :

1) $\boldsymbol{u_n = \frac{1}{n(n+1)}}$

2) $\boldsymbol{v_n = \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$

Solution :

1) $\boldsymbol{\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{(a+b)n+a}{n(n+1)}}$

Par identification on trouve : a=1 et b = -1.

Alors $\boldsymbol{\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$ **,** nous aurons donc :

$$S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \boldsymbol{\frac{1}{n(n+1)}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \boldsymbol{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n$$

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-1+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n+1}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \mathbf{1}$ **;** c'est-à-dire, la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ est convergente vers sa somme **S=1.**

2) $\log\left(1-\frac{1}{n}\right) = \log\left(\frac{n-1}{n}\right) = \log(n-1) - \log(n)$

$S_n = \sum_2^{+\infty} \log\left(1-\frac{1}{n}\right) = \sum_2^{+\infty} \log(n-1) - \log(n)$

$S_n = u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n$

$$S_n = (\log(1)-\log(2)) + (\log(2)+\log(3)) + \cdots + (\log(n-2)-\log(n-1)) + (\log(n-1)-\log(n))$$

$S_n = -\log(n)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(-\log(n)) = -\infty$, donc $\sum_2^{+\infty} \log\left(1-\frac{1}{n}\right)$ est divergente.

Remarque :

Les premiers termes n'interviennent pas pour la convergence d'une série.

Tous les critères de convergence restent donc valables si les conditions demandées sont remplies (à partir d'un certain rang).

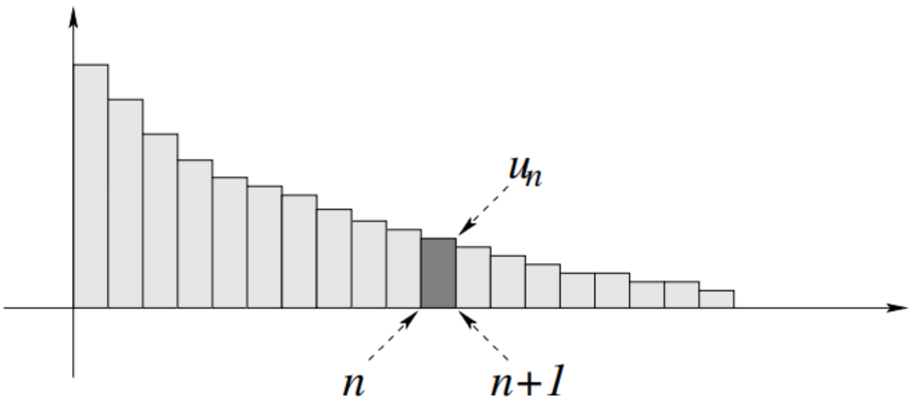

Figure1 : Somme d'une série sur [0, +∞ [.

À l'infini, la convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes. Changer un nombre fini de termes d'une série ajoute une même constante à toutes les sommes partielles à partir d'un certain rang. Cela ne change pas la nature, convergente ou divergente. Si elle est convergente, sa somme est évidemment modifiée (Figure1).

Théorème1 : condition nécessaire de convergence

Si la série réelle ou complexe $\sum u_n$ $converge$, alors la suite tend vers 0 à l'infini.

Autrement dit : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \ converge \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

Théorème2 : critère de divergence grossière

Si la suite réelle ou complexe (u_n) ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.

<u>Tenir bien que :</u>

- $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \to \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \ converge \\ \quad ou \\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \ diverge \end{cases}$

- $\lim_{n \to +\infty} u_n \neq 0 \to \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \ diverge$

- ***Très important*** on ne peut <u>jamais</u> dire que si $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \ converge$

<u>Exemples :</u>

- La série $\sum \frac{n}{n+1}$ diverge car $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 \neq 0$
- $\sum \frac{1}{n+2}$, on a $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n+2}\right) = 0$, donc ici il faut étudier la nature de la série car elle peut **converger** comme elle peut **diverger.**
- Déduire la limite du terme générale u_n de la série $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ qui est une série convergente.

  <u>Réponse :</u> $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente, et pour que cette série converge il est obligatoire que $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ soit égale à 0, parce que c'est la condition nécessaire de la convergence.

Théorème3 :

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes.

- La série somme $\sum (u_n + v_n)$ est convergente et on a $\sum_0^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_0^{+\infty} u_n + \sum_0^{+\infty} v_n$.
- Si λ est un scalaire, la série $\sum (\lambda u_n)$ est convergente $\to \sum_0^{+\infty} (\lambda u_n) = \lambda \sum_0^{+\infty} u_n$
- Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

III.2 Séries à termes positifs:

C'est une série dont les termes sont tous positifs, et sont plus faciles à étudier. Et dans ce cas $u_n \geq 0$ pour tout n. Une suite croissante (S_n) n∈ℕ n'a que deux comportements possibles. Soit elle est majorée et elle converge, soit elle tend vers +∞ et elle diverge.

- *Les deux séries les plus souvent utilisées sont la série géométrique, et la série de Riemann.*

II.2.1 Série géométrique : Le terme général d'une série géométrique est $u_n = q^n$ où **q** est la **raison** et 1 est le premier terme. Les sommes partielles ont une expression explicite.

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + \cdots + q^n = \begin{cases} n+1 & si \quad q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & si \quad q \neq 1 \end{cases}$$

La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, la somme est $\frac{1}{1-q}$, qui est le résultat de $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} = S$ (*dans le cas où* $q \neq 1$)

- $Donc\ si\ |q| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, et la série géométrique est convergente.

Si non la série géométrique diverge.

Exemples :

- Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 0}(3)^{-n}$, et si elle est convergente trouver sa somme S.

Solution :

On peut écrire la série $\sum_{n\geq 0}(3)^{-n}$ sous la forme $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{3}\right)^n$, on voit clairement que c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{3}$, et elle est convergente parce que $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, et la série converge vers sa somme $S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

- Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 0}(3)^n$.

Solution :

C'est une série géométrique de raison 3, $|3| > 1$, donc la série diverge.

III.2.2 Série de Riemann : elle est sous la forme $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\propto}}$, alors :

$$\begin{cases} si \quad \propto \leq 1 & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\propto}} \quad diverge. \\ si \quad \propto > 1 & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\propto}} \quad converge. \end{cases}$$

- *Cas particulier de la série de Riemann* :

Quand $\propto = 1$ ($le\ cas\ où\ la\ série\ de\ Riemann\ diverge$), elle est appelée *Série harmonique*, elle est notée par $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, et elle est toujours divergente.

Exemples :

- La série de Riemann $\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$ converge, car $\propto = 3 > 1$.
- La série de Riemann $\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, car $\propto = \frac{1}{2} < 1$.

III.2.3 Série de Bertrand : elle est sous la forme $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{\propto}(ln(n))^{\beta}}$ pour $\propto$ et β réels.

$$\begin{cases} \propto > \mathbf{1}: \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{\propto}(ln(n))^{\beta}}\ converge\ pour\ tout\ \beta \\ \boldsymbol{\alpha} < \mathbf{1}: \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{\propto}(ln(n))^{\beta}}\ diverge\ pour\ tout\beta \\ \propto = \mathbf{1}: \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{n}))^{\boldsymbol{\beta}}}\ converge\ si\ \beta > 1 \end{cases}$$

III.2.4 Critères de convergence :

➢ **Critères de comparaison :**

Théorème1: Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs vérifiant :

$$u_n \le v_n$$

A partir d'un certain rang. Alors :

- Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Théorème2: Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, si la limite non nulle :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = l \qquad l \neq 0$$

Existe, alors les deux séries sont de même nature.

Cas particulier « Quotient » :

Posons $v_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$; avec α=le degré du dénominateur−degré du numérateur.

Et $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}$ sera sous la forme : $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}u_n$

Le théorème de comparaison permet d'utiliser des équivalents.

Soient (u_n) et (v_n) à termes strictement positifs, équivalentes au voisinage de $+\infty$.

$$u_n \approx v_n \Leftrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (convergentes ou divergentes).

<u>Théorème3:</u> **comparaison série et intégrale impropre**

Soit $f: [a, +\infty[\rightarrow R$ intégrale sur tout intervalle borné inclus dans $[a, +\infty[$, **décroissante** et **positive.** Alors l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *et la série* $\sum f(n)$ sont de même nature (convergentes ou divergentes).

<u>Exemples :</u>

Trouver la nature des séries numériques suivantes :

1) $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^3+1}$
2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$
3) $\sum_{n\geq 3} \frac{\ln(n)}{n}$
4) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(logn)^2}$
5) $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n^2}$

<u>Solution :</u>

1) Nous avons : $n^3 + 1 > n^3 \Rightarrow \frac{1}{n^3+1} < \frac{1}{n^3} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^3+1} < \sum \frac{1}{n^3}$

$\sum \frac{1}{n^3}$ Série de Riemann α =3>1, donc elle est convergente

Par conséquent $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^3+1}$ converge selon le critère de comparaison.

2)

$\boxed{\textbf{\textit{NB :}} \text{ Au voisinage de zéro, } \sin x \approx x \cdots\cdots *}$

Alors assurons nous que $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$.

$\lim_{n\rightarrow+\infty} \frac{1}{2^n}=0$, c'est-à-dire $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ *est au voisinage de* 0 ;

donc d'après la relation (*) $\sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \approx \frac{1}{2^n}$, et par conséquent

$$\sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \approx \sum \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow \sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \approx \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique convergente $\left(\left|\frac{1}{2}\right| < 1\right)$, donc par équivalence à $+\infty$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ est convergente.

3)$\forall n \geq 3, \ln n \geq 1 \Rightarrow \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 3} \frac{\ln(n)}{n} \geq \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n}$$

$\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n}$ est la série harmonique, elle est divergente, alors selon le critère de comparaison, $\sum_{n\geq 3} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge aussi.

4) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(logn)^2}$

Série de Bertrand $\propto = 1$ et $\beta = 2 > 1$ donc la série converge.

5) $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n^2}$

$f'(n) = -2n^2 e^{-n^2} < 0$ donc $f(n)$ est décroissante et positive.

On a ; $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt = -\frac{1}{2}\, e^{-t^2}\Big|_0^x = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}\left(e^{-x^2} - e^0\right) = \frac{1}{2}$

Donc l'intégrale converge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n^2}$ converge.

- **<u>Critère de d'Alembert :</u>**

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Si la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

Existe alors :

1) Si $l < 1$ $alors$ $\sum u_n$ converge
2) Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge
3) Si $l = 1, on\ ne\ peut\ rien\ conclure\ et\ on\ change\ de\ crière$

<u>Exemple:</u>

Soit la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} \times \frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} \times \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1$$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!}$ Diverge

- **Critère de Cauchy :**

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Si la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$

Existe alors :

1)Si $l < 1\ alors\ \sum u_n$ converge

2)Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge

3)Si $l = 1, on\ ne\ peut\ rien\ conclure\ et\ on\ change\ de\ crière$

Exemple :

Etudier la convergence de la série :

$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$$

Solution :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1$$

Donc la série est convergente.

III.3 Séries à termes quelconques :

III.3.1 Séries alternées :

Définition : Une série alternée est notée $\sum(-1)^n u_n$, avec $u_n \geq 0$. Pour tout n$\in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = (-1)^0 u_0 + (-1)^1 u_1 + (-1)^2 u_2 + \cdots\cdots = u_0 - u_1 + u_2 - \ldots\ldots$$

Convergence des séries alternées :

- ***Critère spécial séries alternées « Théorème de Leibniz » :***

On considère la série alternée $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$:

- Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

- Si (u_n) est décroissante ;

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n$ est convergente.

Exemple :

Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

Solution :

Nous avons $u_n = \frac{1}{n} > 0$, donc c'est bien une série alternée.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$
- $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$, donc u_n est décroissante.

Les deux conditions sont satisfaites, alors la série alternée $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

➢ ***Théorème 2 :***

- Toute série absolument convergente est convergente, mais la réciproque est fausse.
- Une série qui est convergente sans être absolument convergente (avec la valeur absolue) est dite *semi-convergente.*

Exemples :

1) La série de l'exemple précédent $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente car : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente d'après Leibniz et $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n\geq1}\frac{1}{n}$ est divergente.
2) $\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n n^3}{n!}$ est absolument convergente alors, elle est convergente car :

$\left|\frac{(-1)^n n^3}{n!}\right| = \frac{n^3}{n!}$, donc on va étudier sa nature autant qu'une série à termes positifs,

Appliquons le critère de d'Alembert : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^3}\times\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)n!}\times\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)}\times\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = 0 < 1$, $\sum_{n\geq1}\left|\frac{(-1)^n n^3}{n!}\right|$ est convergente $\Rightarrow$

$\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n n^3}{n!}$ est absolument convergente, donc elle est convergente.

III.4 Séries de fonctions :

- Une série de fonctions est une série dont le terme général est fonction de x. $u_n = u_n(x)$.

Une série de fonctions est une série dont le terme général est désignée par :

$$\sum u_n(x) \text{ ou } \sum f_n(x).$$

- Domaine de convergence de la série $\sum u_n(x)$ est l'ensemble des valeurs de x telle que la série converge.

$$D = \left\{x \in R: \sum u_n(x)\, converge\right\}$$

III.4.1 Séries entières :

On appelle série entière réelle toute série de fonctions de la forme $\sum a_n\, x^n$

- Si |x|< $R \Rightarrow$ converge absolument.
- Si $|x| > R \Rightarrow$ diverge.
- Si |x| = R $\Rightarrow$ la série peut converger comme elle peut diverger.

R est le rayon de convergence $(0 \leq R < +\infty)$ donné par les règles suivantes :

$\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ Règle de d'Alembert.

$\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ Règle de Cauchy.

Exemple :

Calculer le rayon de convergence R $\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)2^{n+1}\,x^n$ et étudier sa convergence en x=$\pm R$.

En déduire le domaine de convergence de la série.

Solution :

On a $a_{n=}(n^2+1)2^{n+1}$ et $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{((n+1)^2+1)2^{n+1+1}}{(n^2+1)2^{n+1}}\right|$ $= \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n^2+1+2n+1)2^n2^2}{(n^2+1)2^n2} = 2$

$$\frac{1}{R} = 2 \;\Rightarrow R = \frac{1}{2}$$

- Pour x=R=$\frac{1}{2}$,

on a $\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)2^{n+1}\,x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)2^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}2(n^2+1)$

qui est divergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} 2(n^2+1) = +\infty \neq 0$

- Pour x= $-$R= $-\frac{1}{2}$,

on a $\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)2^{n+1}\,x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}2(n^2+1)\,(-1)^n$ qui est divergente car :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 2(n^2+1)(-1)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2(n^2+1) = +\infty \cdots\cdots si\ n\ est\ pair \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2(n^2+1)(-1)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} -2(n^2+1) = -\infty \cdots\cdots si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

Deux limites différentes donc la limite n'existe pas.

Le domaine de convergence est donc $D_c = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

III.5. Séries de Fourier :

La série de Fourier d'une fonction $y = f(x)$ définie sur le segment $[-\pi, \pi]$ est la série suivante :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

Avec

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \qquad n = 1,2,3, \dots \dots$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \qquad n = 1,2,3, \dots \dots$

Théorème de Direchlet :

Soit :

- *f(x)* est continue sur $[a, b]$
- *f(x)* est dérivable par morceaux sur $[a, b]$
- *et* $\forall x_0 \in [a, b];\ f({x_0}^+)$ *et* $f({x_0}^-)$ *finies et existent.*

Alors : la série de Fourier converge vers :

$$\begin{cases} f(x) & si\ f(x) est\ continue\ en\ x\ \ et\ \ Sf(x) = f(x) \\ \frac{1}{2}[f({x_0}^+) + f({x_0}^-)] & si\ f(x)\ est\ discontinue\ en\ x\ et\ Sf(x) = \frac{1}{2}[f({x_0}^+) + f({x_0}^-)] \end{cases}$$

Si la fonction f(x) :

- Est paire alors $b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \qquad n = 1,2,3, \dots \dots$$

- Est impaire alors $a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \qquad n = 1,2,3, \dots \dots$$

Remarques ;

- $\sin(x)\ est\ une\ fonction\ impair$
- $\cos(x)\ est\ une\ fonction\ pair$
- *f(x)* impaire→ $\int_{-a}^{a} f(x) dx = 0$
- *f(x)* paire → $\int_{-a}^{a} f(x) dx = 2 \int_0^{a} f(x) dx$

- Toute fonction *f(x)* qui satisfait aux conditions de Direchlet dans le domaine $[-s, s]$ a pour développement aux points de discontinuité situés à l'intérieur de ce domaine :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{s}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{s}\right)\right]$$

Avec

$$a_n = \frac{1}{s}\int_{-s}^{s} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{s}\right)dx \qquad n = 1,2,3,\dots\dots$$

$$b_n = \frac{1}{s}\int_{-s}^{s} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{s}\right)dx \qquad n = 1,2,3,\dots\dots$$

Exemple1 :

Développer en série de Fourier la fonction :

$$\begin{cases} -2 & pour\ -\pi < x \leq 0 \\ 3 & pour\ 0 < x < \pi \end{cases}$$

Solution :

Calculons les coefficients de la série de Fourier. On trouve :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-2)dx + \int_{0}^{\pi} 3dx\right] = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \qquad n = 1,2,3,\dots\dots$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx\right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-2)\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} 3\cos(nx)dx\right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \qquad n = 1,2,3,\dots\dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-2)\sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi} 3\sin(nx)dx\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{\text{n}}\cos(\text{nx})\Big|\begin{matrix}0\\-\pi\end{matrix} - \frac{3}{n}\cos(nx)\Big|\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix}\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{n}(1-\cos(n\pi) - \frac{3}{n}(\cos(nx)-1)\right] = \frac{5}{n\pi}(1-\cos(n\pi))$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & si\ n\ pair \\ \dfrac{10}{n\pi} & si\ n\ impair \end{cases}$$

D'où il vient :

$$f(x) = \frac{1}{2} + \left[\frac{10}{\pi}sinx + \frac{10}{3\pi}sin3x + \frac{2}{\pi}sin5x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\right]$$

Au point de discontinuité *x=0,* la fonction prend la valeur f(0)=0.5

Exemple2 :

Soit *f* une fonction ni paire, ni impaire périodique de période 10, définie par :

$$\begin{cases} 0 & pour -5 < x \le 0 \\ 3 & pour\ 0 < x < 5 \end{cases}$$

1) Déterminer les coefficients de Fourier
2) Donner la série de Fourier associée à *f*

Solution :

$$a_0 = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)dx$$

$$a_0 = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{5} f(x)dx\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} (0)dx + \int_{0}^{5} 3dx\right] = 3$$

$$a_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{5})\,dx \qquad n = 1,2,3,\ldots\ldots..$$

$$a_n = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{5})dx + \int_{0}^{5} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{5})dx\right]$$

$$a_n = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0}(0)\cos(\frac{n\pi x}{5})dx + \int_{0}^{5} 3\cos(\frac{n\pi x}{5})dx\right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{5})\,dx \qquad n = 1,2,3,\ldots\ldots..$$

$$b_n = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{5})dx + \int_{0}^{5} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{5})dx\right]$$

$$b_n = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0}(0)\sin(\frac{n\pi x}{5})dx + \int_{0}^{5} 3\sin(\frac{n\pi x}{5})dx\right]$$

$$b_n=\frac{1}{5}\left[\int_0^5 3\sin(\frac{n\pi x}{5})dx\right]=-\frac{3}{n\pi}\left(cos\frac{n\pi 5}{5}-cos0\right)$$

$$b_n=\begin{cases}0 & si\ n\ pair\\ \dfrac{6}{n\pi} & si\ n\ impair\end{cases}$$

D'où il vient :

$$f(x)=\frac{3}{2}+\left[\frac{6}{\pi}sin\frac{\pi x}{5}+\frac{3}{\pi}sin\frac{3\pi x}{5}+\cdots\ldots..\right]$$

Sources :

- **Luc Rozoy, Bernard Ycart**,2014, cours séries numériques, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- **L. Pujo-Menjouet**, Cours d'Analyse IV. Suites et Séries de fonctions, Université Claude Bernard, Lyon I, France
- **Leila Douha**. Résumé sur les séries. Math3, Université Batna2.
- ***Site web :*** https://www.fichier-pdf.fr/2015/01/29/02-series-numeriques-cours-complet- 2/preview/page/1/
- **OURAGH Youcef.** Aide-Mémoire de Mathématiques pour Ingénieurs, Collection le cours de mathématique.