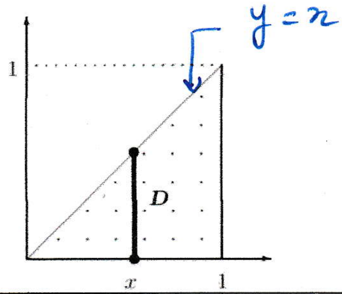
Université Mustafa Ben Boulaid Batna 2 — Faculté de Technologie — Département T.C.-S.T.
Unité d'Enseignement Fondamentale UEF4 — Maths 3 — Année Universitaire 2020/ 2021

Note :

Devoir à domicile : variante1



1) Calculez l'intégrale double suivante, puis changez l'ordre d'intégration. $I = \iint_D (x-y)dxdy$

$0 \le x \le 1$ 0,5 $0 \le y \le x$ 0,5

Selon l'axe ..oy..

I= $\int_0^1 \left[\int_0^x (x-y)\,dy\right]dx$ 0,25 $= \int_0^1 xy - \frac{y^2}{2}\Big|_0^x dx = \int_0^1 \left(x\times x - \frac{x^2}{2}\right)dx$

$= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right)dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1$

$= \frac{1}{6}(1^3 - 0^3) \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{6}}$ 0,25

Changement d'ordre $\Longrightarrow$ selon ox

selon l'axe ox : les bornes de y sont constantes.

$0 \le y \le 1$ 0,5 et $y \le x \le 1$ 0,5

$I = \int_0^1 \left[\int_y^1 (x-y)\,dx\right]dy$ 0,25 $= \int_0^1 \frac{x^2}{2} - yx\Big|_y^1 dy$

$= \int_0^1 \left[\left(\frac{(1)^2}{2} - y\times 1\right) - \left(\frac{y^2}{2} - y\times y\right)\right]dy = \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{2} - y\right) - \left(\frac{y^2}{2} - y^2\right)\right]dy$

$= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} - y + \frac{1}{2}\right)dy = \frac{y^3}{6} - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}y\Big|_0^1 = \frac{1^3}{6} - \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2}\times 1 - (0)$

$\boxed{I = \frac{1}{6}}$ 0,25

2) Etudier la nature des séries suivantes : a) $\sum_1^\infty n \sin\frac{1}{n}$ b) $\sum_1^\infty \frac{2^n n!}{n^n}$

a) $\sum_1^\infty n \sin \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ par équivalence et au voisinage de $\underline{0}$ $\sin x \simeq x$ donc :

$n \nearrow \Rightarrow \frac{1}{n} \searrow 0$ donc $\sin \frac{1}{n} \simeq \frac{1}{n}$ $\Rightarrow \sum_1^\infty n \sin \frac{1}{n} \simeq \sum_1^\infty n \cdot \frac{1}{n} \simeq \sum_1^\infty 1$

0,5

selon la condition nécessaire de la convergence

$\lim_{n \to \infty} u_n = 1 \neq 0$ 0,5 $\Rightarrow \sum_1^\infty 1$ Diverge $\Rightarrow \sum_1^\infty n \sin \frac{1}{n}$ Diverge 0,5

b) $\sum_1^\infty \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ utilisant le critère d'Alembert ;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(n+1)} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n} \cdot 2 \cdot \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!} \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{2^n} \cdot \cancel{n!}}$$

0,5

$$= \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2 \cdot \frac{1}{e} = \frac{2}{e} < 1 \Rightarrow$$

0,5

$\sum \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ Converge 0,5

N.B : $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$

et $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$

Sous Gr :……..

Nom Prénom :

Nom Prénom :

Nom Prénom :

Nom Prénom :