Socle Commun en Sciences et Technologie
Faculté de technologie
Université de Batna 2
Algérie

Le 12-09-2019
Semestre 3
1h30

Math 3

Examen Final

Exercice1. **(06 points) Interrogation**

1. Calculer les primitives représentées par les intégrales suivantes : **(01 pts)**

$$\int (x+1)^2 dx\,; \qquad \int sin^2 x\, dx\,;$$

2. Calculer la valeur des intégrales définies ci-dessous en utilisant la technique mentionnée : **(02 pts)**

$\int \frac{1}{x\, ln(x)}\, dx$; Changement de variable.

$\int x^2\, ln(x)\, dx$; Intégration par parties.

3. Tracer le domaine d'intégration délimité par les droites $y = 1 - x$, $y = 3 - x$, $y = x - 1$ et $y = x + 1$ en déduisant toutes les bornes d'intégration possibles sur ce domaine. **(02 pts)**

4. Calculer l'intégrale triple suivante : $\int_0^1\int_2^3\int_0^x 3x\, dz\, dx\, dy\,;$ **(01 pts)**

Exercice2. **(07 points)**

1. Invertire l'ordre d'intégration dans : $\int_0^1\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)\;dy\,dx$ **(03 pt)**

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{3^k}$ en calculant sa somme.**(02 pt)**

3. Etudier la nature de la série numérique : $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ **(02 pt)**

Exercice3. **(07 points)**

On considère l'intégrale : $\iint_D \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^4 dx\,dy$ où D est la zone limitée par les droites : $y = 1 - x$, $y = 0$ et $x = 0$

1. En posant $u = x + y$ et $v = x - y$, déterminer x et y en fonction de u et v. **(02 pt)**
2. Calculer le jacobian J. **(02 pt)**
3. Evaluer l'intégrale en utilisant le changement de variable proposé. **(03 pt)**

Chargés de cours: Dr L. DOUHA et Dr. S. GHOGGALI

Bon courage :)

Scanné avec CamScanner

Corrigé de l'examen final M3

2018/2019

Exercice n° 1

1) a) $\int (x+1)^2 dx = \int (x^2 + 2x + 1)\, dx$

$= \int x^2 dx + \int 2x\, dx + \int dx$

N.B $\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$

donc $\int (x+1)^2 dx = \frac{x^3}{3} + \cancel{2} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}} + x + C$

$$\boxed{\int (x+1)^2 dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C}$$

b) $\int \sin^2 x\, dx$

nous avons $\boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}}$ et $\boxed{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}}$

alors $\int \sin^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right) dx$

$= \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx$

et nous avons aussi : $\boxed{\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a} \sin ax + C}$

et $\boxed{\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C}$

donc l'intégrale devient : $\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) + C$

$$\Rightarrow \boxed{\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C}$$

2) a = $I = \int \frac{1}{x \ln x}\, dx$ par la méthode changement de variables.

on pose $\ln x = z \Rightarrow dz = \frac{dx}{x}$

alors :

$I = \int \frac{dx}{x \,\ln x}$ devient $\int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C$

remplaçons z par sa valeur $z = \ln x$.

nous aurons : $\boxed{I = \ln|\ln x| + C}$

b) $I = \int x^2 \ln x \, dx$ par la méthode intégration par parties.

nous avons $\int u.v' = u.v - \int u'.v$.

alors on pose $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$v' = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$

$$I = \underbrace{\ln x}_{u} . \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v} - \int \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v} . \underbrace{\frac{dx}{x}}_{u'}$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} + c\right)$$

$$\boxed{I = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C}$$

3) Domaine délimité par les droites $y = 1 - x$, $y = 3 - x$, $y = x - 1$ et $y = x + 1$.

La droite $y = 1 - x$

x	0	1
y	1	0

La droite $y = 3 - x$

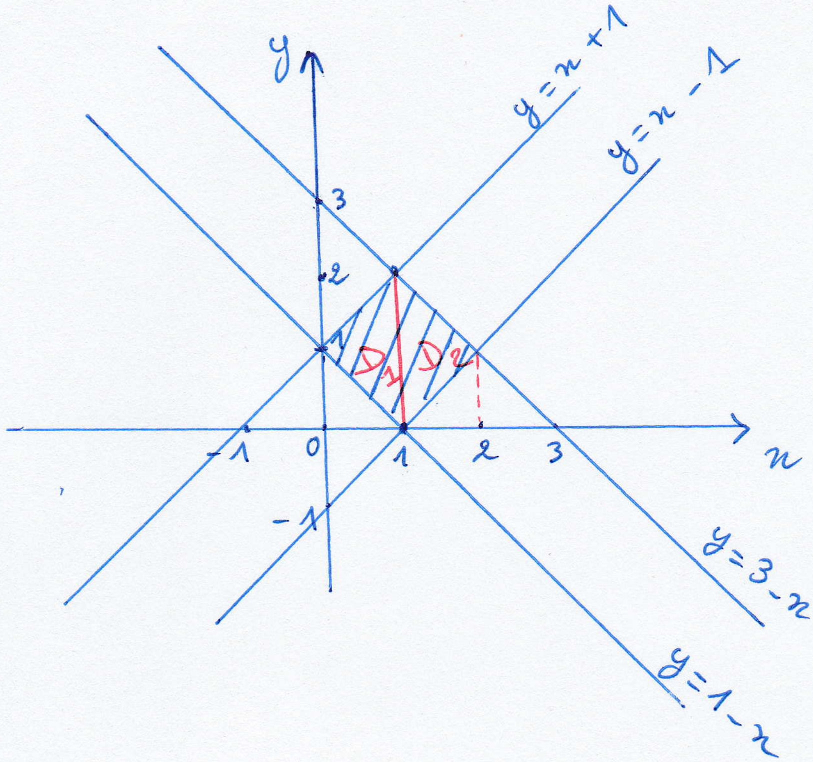
x	0	3
y	3	0

La droite $y = x - 1$

x	0	1
y	-1	0

La droite $y = x + 1$

x	0	1
y	1	2



Les bornes d'intégration possibles :

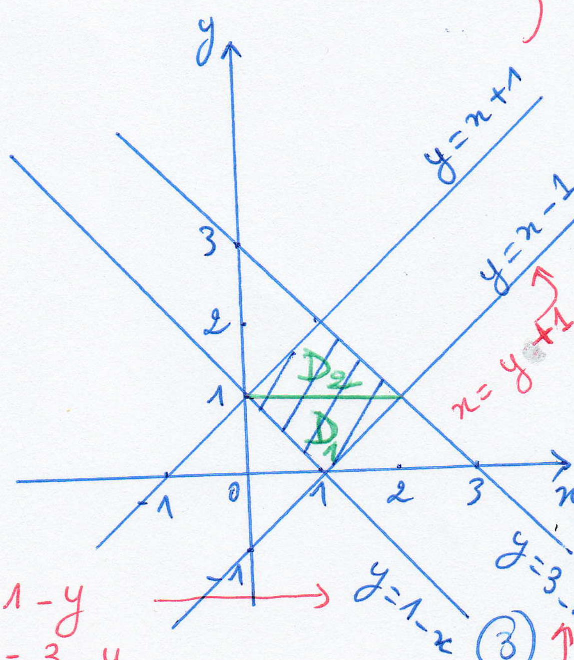
selon oy : nous avons deux domaines (en rouge)

$$D_1 : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \;;\; 1 - x \leq y \leq 1 + x \\ \text{et} \\ 1 \leq x \leq 2 \;;\; x - 1 \leq y \leq 3 - x \end{cases} \quad D_2$$

on tire $x = y - 1$

selon ox : nous avons deux domaines (en vert)

$$D_1 : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \;;\; 1 - y \leq x \leq y + 1 \\ \text{et} \\ 1 \leq y \leq 2 \quad y - 1 \leq x \leq 3 - y. \end{cases} \quad D_2$$



$x = 1 - y$

$x = 3 - y$

③

4) $I = \int_0^1 \int_2^3 \int_0^x 3x \, dz \, dx \, dy$

$= \int_0^1 \left[\int_2^3 \left[\int_0^x 3x \, dz \right] dx \right] dy$

$= \int_0^1 \left[\int_2^3 3xz \Big|_0^x dx \right] dy$

$= \int_0^1 \left[\int_2^3 3x(x-0) \, dx \right] dy$

$= \int_0^1 \left[\int_2^3 3x^2 \, dx \right] dy$

$= \int_0^1 \cancel{3} \cdot \frac{x^3}{\cancel{3}} \Big|_2^3 dy = \int_0^1 \left((3)^3 - (2)^3 \right) dy$

$= \int_0^1 (27 - 8) \, dy = \int_0^1 19 \, dy = 19y \Big|_0^1 = 19(1-0)$

$\boxed{I = 19}$

Exercice n°2

1) Invertire l'ordre d'intégration dans :

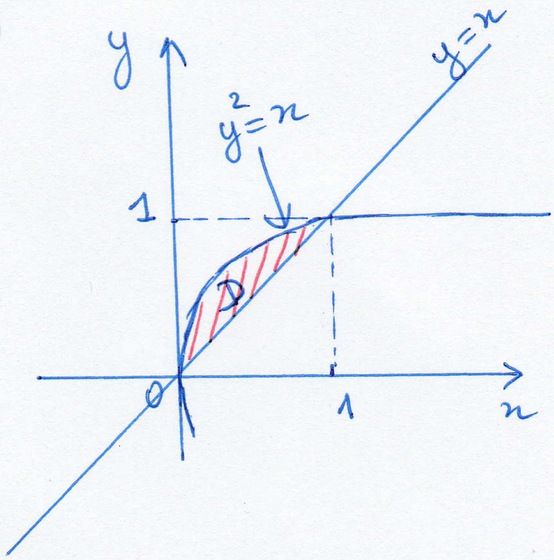
$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dy\, dx$$

cette intégrale est selon oy parce que les bornes de x sont fixes. alors $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq \sqrt{x} \end{cases}$

alors le domaine est délimité par la droite $y = x$

et la parabole $(y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x)$.

Donc pour inverser l'ordre il faut dessiner le domaine



la droite $y = x$

x	0	1
y	0	1

la parabole $y^2 = x$

x	0	1
y	0	1

Donc selon ox nous aurons :-

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y^2 \leq x \leq y \end{cases}$$

donc $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dy\right] dx \xrightarrow{\text{devient}} \int_0^1 \left[\int_{y^2}^{y} f(x,y)\, dx\right] dy$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot 2}{3^n} = 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = 2 \sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$

c'est une série géométrique de raison $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$

donc la série est convergente.

Calcul de la somme :-

La somme partielle de la série géométrique est sous la forme $S_n = a \cdot r \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$ (Remarque : si n commence par $\underline{\underline{1}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^n$)

donc $S_n = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}$

$$S_n = \frac{\frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{\frac{1}{3}} = 4 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} 4\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 4$$

$\boxed{S = 4}$ donc la série converge vers $\underline{\underline{4}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $\Rightarrow$ nous avons quand $\lim_{n \to \infty} U_n \neq 0 \Rightarrow$ la série $\sum U_n$ Diverge.

donc $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$ $\Rightarrow$ la série est divergente

Exercice n° 3

$$I = \iint_D \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^4 dx\,dy$$

1) x et y en fonction de u et v ?

$$\begin{cases} u = x + y \quad \cdots\cdots (1) \\ v = x - y \quad \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

de (1) + (2) nous aurons $u + v = 2x \Rightarrow \boxed{x = \frac{u+v}{2}}$

de (1) − (2) nous aurons $u - v = 2y \Rightarrow \boxed{y = \frac{u-v}{2}}$

2) $J = ?$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$$

3) $I = \iint_D \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^4 dx\,dy$ devient $\iint_{D'} \frac{v^4}{u^4} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{|J|} du\,dv.$

déterminons les bornes de D' ?

D est limité par les droites $y = 1 - x$, $y = 0$ et $x = 0$.

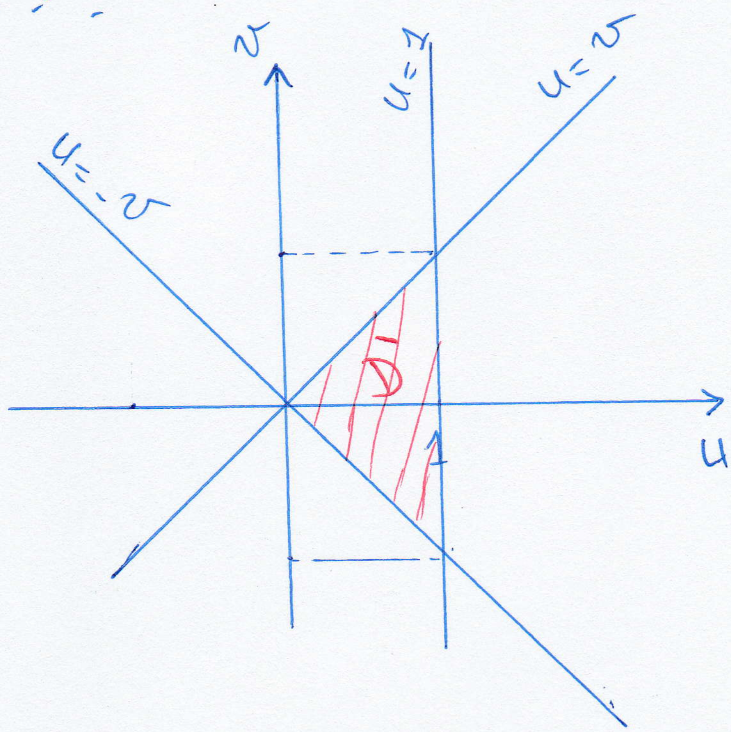
Alors : $y = 0 \Rightarrow \frac{u-v}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{u = v.}$

$x = 0 \Rightarrow \frac{u+v}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{u = -v}$

$y = 1 - x \Rightarrow \frac{u-v}{2} = 1 - \left(\frac{u+v}{2}\right) \Rightarrow \boxed{u = 1}$

Domaine régulier selon Ov :

$$\begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ -u \leq v \leq u \end{cases}$$



donc :

$$I = \int_0^1 \left[\int_{-u}^{u} \frac{v^4}{u^4} \cdot \frac{1}{2}\, dv \right] du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_{-u}^{u} \frac{v^4}{u^4}\, dv \right] du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{u^4} \cdot \frac{v^5}{5} \Big|_{-u}^{u} du = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{u^5}{5u^4} \right) - \left(\frac{(-u)^5}{5u^4} \right) \right] du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2}{5} \frac{u^5}{u^4}\, du = \frac{1}{5} \int_0^1 u\, du = \frac{1}{5} \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1$$

donc $I = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2} - 0 \right)$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{10}}$$