Corrigé type de l'examen Final MATH3

Exercice n° 1

1) a) $\int \cos 5x \, dx = \frac{1}{5} \sin 5x + c.$ 0,5

b) $\int \frac{x}{1+x^2} dx$, on a $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c.$

alors ici : $f(x) = 1+x^2$ $\quad f'(x) = 2x$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln|1+x^2| + c.$$

dans notre exemple on a : $2 \underbrace{\int \frac{x}{1+x^2}} = \ln|1+x^2|$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c.$$ 0,5

2) a) $\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx$, changement de variable.

posons $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$\Rightarrow dx = x \, du.$

les bornes : si $x = 1 \longrightarrow u = \ln 1 = 0.$

si $x = e \longrightarrow u = \ln e = 1.$

nous aurons : $\int_0^1 \frac{u^n}{\cancel{x}} \times \cancel{x} \, du = \int_0^1 u^n \, du.$ 0,5

$$= \frac{u^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}(1^{n+1} - 0) = \boxed{\frac{1}{n+1}}$$ 0,5

b) $\int_0^1 x e^x dx$

Intégration par parties :

posons $u = x \longrightarrow u' = 1$

$v' = e^x \longrightarrow v = e^x$

$$\int u.v' = u.v - \int u'.v$$

alors $\int_0^1 x e^x = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$ 0,5

$$= (1 \times e^1 - 0\, e^0) - e^x \Big|_0^1$$

$$= e - (e^1 - e^0) = \cancel{e} - \cancel{e} + 1$$

$\int_0^1 x e^x = \boxed{1}$ 0,5

3) a) $\int_1^2 \int_3^4 f(x,y)\, dy\, dx \longrightarrow \int_3^4 \int_1^2 f(x,y)\, dx\, dy$ 1

b) $\int_0^2 \int_y^1 f(x,y)\, dx\, dy$

les bornes de y sont constantes $0 \le y \le 2$ $\Rightarrow$ selon ox

$y \le x \le 1$

changement d'ordre selon oy : donc les bornes de x constantes.

Dessiner le domaine :

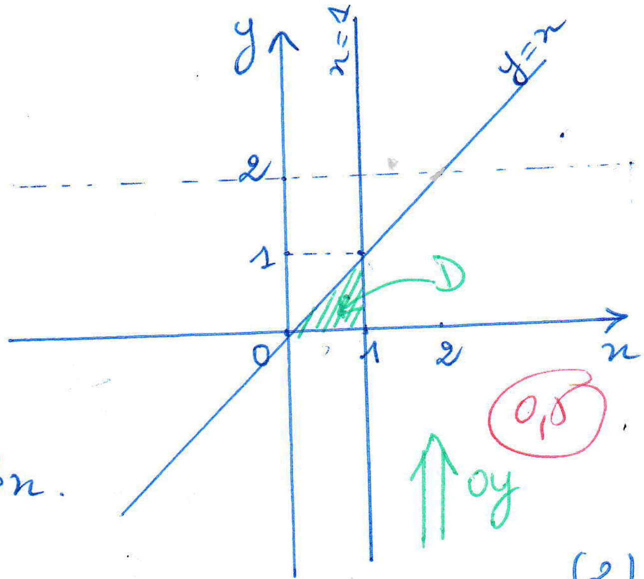
$y = 0 \qquad x = y$

$y = 2 \qquad x = 1$

selon oy : $0 \le x \le 1$ donc

$0 \le y \le x$

$$\int_0^2 \int_y^1 f(x,y)\, dx\, dy \Longrightarrow \int_0^1 \int_0^x f(x,y)\, dy\, dx.$$ 0,5



4) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\pi} x^3 \cos\left(\frac{1}{2}y\right) dy\, dx = I$

$0 \leq x \leq 1$

$0 \leq y \leq \pi$

$$I = \int_0^1 x^3\, dx \cdot \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{1}{2}y\right) dy$$

$$= \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2}y \Big|_0^{\pi}$$ 0,5

$$= \left(\frac{(1)^4}{4} - 0\right) \cdot 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \cancel{\sin 0}^{\,0}\right)$$

$$I = \frac{1}{4} \cdot 2 \times 1 \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2}}$$ 0,5

Exercice n° 2

a) $\displaystyle I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy.$

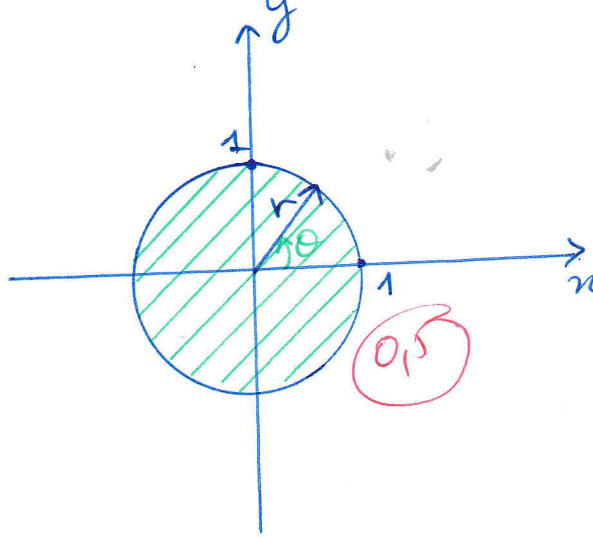
les coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $|J| = r.$

$$\frac{1}{1+x^2+y^2} = \frac{1}{1+r^2}$$

Déssiner le domaine : $x^2+y^2 = 1$ équation d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $r = 1$

$0 \leq r \leq 1$ 0,5

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ 0,5



$$I = \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+r^2} \cdot r \cdot d\theta\, dr$$ 0,5

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \frac{r}{1+r^2}\, d\theta\right] dr$$

$$I = \int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\,\theta\Big|_0^{2\pi} dr \quad 0{,}5 \quad = \int_0^1 \frac{r}{1+r^2}(2\pi - 0)\,dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\,dr \quad 0{,}5 \quad = \cancel{2}\pi \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \ln|1+r^2| \Big|_0^1 \quad 0{,}5$$

$$= \pi(\ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{0})$$

$$\boxed{I = \pi \ln 2} \quad 0{,}5$$

b) $$I = \int_0^1\int_0^2\int_1^2 (2x + yz)\,dz\,dy\,dx \quad 0{,}5$$

$$= \int_0^1 \Big[\int_0^2 \Big[\int_1^2 (2x+yz)\,dz\Big]\,dy\Big]\,dx = \int_0^1 \Big[\int_0^2 2xz + y\frac{z^2}{2}\Big|_1^2 dy\Big]\,dx \quad 0{,}5$$

$$= \int_0^1 \Big[\int_0^2 \Big[2x(2) + y\frac{(2)^2}{2} - \Big(2x\times 1 + y\frac{(1)^2}{2}\Big)\Big]\,dy\Big]\,dx$$

$$= \int_0^1 \Big[\int_0^2 \Big(2x + \frac{3}{2}y\Big)\,dy\Big]\,dx \quad 0{,}5 \quad = \int_0^1 2xy + \frac{3}{2}\frac{y^2}{2}\Big|_0^2 dx$$

$$= \int_0^1 \Big(2x\times 2 + \frac{3}{4}(2)^2 - 0\Big)\,dx = \int_0^1 (4x+3)\,dx = 4.\frac{x^2}{2} + 3x\Big|_0^1$$

$$I = 2(1)^2 + 3\times 1 - 0 \Rightarrow \boxed{I = 5} \quad 0{,}5$$

<u>Exercice n°3</u>

1) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{(n+1)} + \frac{B}{(n+2)}$ par identification $\boxed{A=1}$ et $\boxed{B=-1}$

donc $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)}$

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{n-1} + U_n$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cancel{\cdots} + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n+1}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+2}$$ 0,5

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} 1 - \cancel{\frac{1}{n+2}} = \boxed{1}$$ 0,5 donc la série converge.

2) a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ série de Rieman $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$ diverge. 1

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+e^{-n})$

$\lim_{n \to +\infty} e^{-n} = e^{-\infty} = 0$ donc e^{-n} est au voisinage de $\underline{0}$.

alors $\ln(1+e^{-n}) \simeq e^{-n}$ 0,5 donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+e^{-n}) \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

c'est une série géométrique de raison $q = \frac{1}{e} < 1$ donc elle converge et par équivalence à ∞ 0,5

$\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+e^{-n})$ CV

c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$ $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1 \neq 0$

$\lim_{n \to \infty} U_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$ diverge 1

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ utilisant le critère de d'Alembert.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a^n} \cdot \frac{a^{(n+1)}}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n!} \cdot \cancel{a^n} \cdot a}{\cancel{a^n} \cdot (n+1) \cdot \cancel{n!}}$$ 0,5

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{(n+1)} = 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \text{ CV}$$ 0,5

3) a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2}$

série alternée utilisant la convergence absolue.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{1}{(n+1)^2} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

utilisant le critère de comparaison :

$$(n+1)^2 \geq n^2 \Rightarrow \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

série de Rieman $\alpha = 2 > 1$ convergente $\Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ est absolument convergente $\Rightarrow$ CV 1

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot n^{-\frac{1}{2}}$, utilisant la convergence absolue.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \cdot n^{-\frac{1}{2}} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$ série de Rieman $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ DV.

1

passant au critère de Leibniz :

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$

2) $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\sqrt{n+1} > \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{U_{n+1}} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{U_n} < 0$

U_n est décroissante $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot n^{-\frac{1}{2}}$ est semi-convergente

1