Solution TD n° 1

Exercice n° 1

$f(x) = x^5 + 2x - 1$

1) $f(x)$ est un polynome donc continue sur $\mathbb{R}$ et sur $[-1, 1]$.

$f(-1) = -4$
$f(1) = 2$ $\Rightarrow f(-1) \cdot f(1) < 0$ donc il existe au moins une racine dans $[-1, 1]$.

unique ?

$f'(x) = 5x^4 + 2 > 0$ $f'(x) \neq 0$ et strictement croissante dans cet intervalle (strictement monotone).

NB : monotone veut dire croissante ou décroissante.

donc la solution $\bar{x}$ est unique dans $[-1, 1]$.

2) méthode de dichotomie (bissection).

$\bar{x} = ?$ $[-1, 1]$, $\varepsilon = 0{,}25$.

$x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$

n	a_n	b_n	$x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	$-1{,}00$	$1{,}00$	$x_0 = 0{,}00$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	—
1	$0{,}00$	$1{,}00$	$x_1 = 0{,}50$	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$0{,}50$
2	$0{,}00$	$0{,}50$	$x_2 = 0{,}25$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$0{,}25$

On arrête les itérations puisque $\lvert x_2 - x_1 \rvert \leq 0{,}25$, donc la racine de l'équation est $\bar{x} = 0{,}25$

Exercice n°2

$f(x) = \sqrt{x} - \cos x$, $[0,1]$, $\varepsilon = 10^{-2}$

$f(x)$ est continue sur $[0,1]$.

$f(0) = -1$
$f(1) = 0{,}459$ $\Rightarrow$ $f(0) \cdot f(1) < 0$, il existe au moins une racine dans $[0,1]$.

n	a_n	b_n	$x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	0,00	1,00	0,50	(−)	(+)	(−)	—
1	0,50	1,00	0,75	(−)	(+)	(+)	0,25
2	0,50	0,75	0,62	(−)	(+)	(−)	0,13
3	0,62	0,75	0,68	(−)	(+)	(+)	0,06
4	0,62	0,68	0,65	(−)	(+)	(+)	0,03
5	0,62	0,65	0,64				0,01

On arrête les itérations puisque $|x_5 - x_4| = 0{,}01 \leq \varepsilon$
donc la racine de l'équation $\sqrt{x} - \cos x = 0$.
est $\bar{x} = 0{,}64$.

Exercice n° 3 : méthode du point fixe.

$x^3 - x - 1 = 0$, $[1,2]$.

1) $g(x) \overset{?}{=} \sqrt[3]{x+1}$ converge vers $\bar{x}$?

Calculons d'abord $f(1)$ et $f(2)$

$\left.\begin{array}{l} f(1) = -1 \\ f(2) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$ donc il existe au moins une racine dans $[1,2]$

* conditions de stabilité

$\left.\begin{array}{l} g(1) = 1{,}26 \in [1,2] \\ g(2) = 1{,}44 \in [1,2] \end{array}\right. \Rightarrow \forall x \in [1,2] \Rightarrow g[1,2] \subset [1,2]$

* Conditions de contractabilité.

$g'(x) = \left[(x+1)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}}$

$= \frac{1}{3}(x+1)^{-2 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

donc $g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

$\Rightarrow |g'(x)| \overset{?}{\leq} k \overset{?}{<} 1$

on a : $g'(1) = 0{,}21$

$g'(2) = 0{,}16$

$k = \max\{0{,}21 , 0{,}16\} \Rightarrow k = 0{,}21 < 1$

$\Rightarrow$ g est contractante sur $[1,2]$.

Les deux conditions sont vérifiées donc la méthode du point fixe converge vers une solution $\bar{x}$.

2) $\bar{x} = ?$ $\quad \varepsilon = 10^{-2}$, $x_0 = 1,5$

on a : $\begin{cases} x_0 = 1,50 \\ x_{n+1} = g(x_n) . \end{cases}$

$x_1 = g(x_0) = g(1,50) = 1,36$, $|x_1 - x_0| = 0,14$

$x_2 = g(x_1) = g(1,36) = 1,33$, $|x_2 - x_1| = 0,03$

$x_3 = g(x_2) = g(1,33) = 1,33$, $|x_3 - x_2| = 0,00$

On arrête les itérations puisque $|x_3 - x_2| = 0 \leq 10^{-2}$

donc la racine de l'équation $x^3 - x - 1 = 0$

est $\boxed{\bar{x} = 1,33}$

Exercice n° 4

$\ln x - x^2 + 2 = 0$ $\quad [0,1\,,\,0,5]\,,\ \varepsilon = 10^{-3}$.

$f(0,1) = -0,312$
$f(0,5) = 1,056$ $\Big\} \Rightarrow f(0,1) \times f(0,5) < 0$ donc une racine existe dans $[0,1\,,\ 0,5]$.

$x = e^{x^2-2} = g_1(x)$

$x = \sqrt{\ln x + 2} = g_2(x)$

Convergence ?

* Condition de stabilité : $g_1(x) = e^{x^2-2}$.

$g_1(0,1) = 0,136$
$g_1(0,5) = 0,173$ $\Big\} \Rightarrow g_1[0,1\,,\,0,5] \subset [0,1\,,\,0,5]$.

* Condition de contractabilité :

$g_1'(x) = 2x\,e^{x^2-2}$ $\qquad |g_1'(x)| \overset{?}{\leq} k \overset{?}{<} 1$

$g_1'(0,1) = 0,027$

$g_1'(0,5) = 0,173$

$k = \max\{0,173\,,\ 0,027\} = 0,173$

$k = 0,173 < 1$

donc $g_1(x) = e^{x^2-2}$ est contractante sur $[0,1\,,\ 0,5]$. Les deux conditions sont vérifiées donc $g_1(x) = e^{x^2-2}$ converge vers $\bar{x}$.

* $\bar{x} = ?$

$$\begin{cases} x_0 = 0{,}300 \\ x_{n+1} = g_1(x_n) \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{0{,}1+0{,}5}{2}\right).$$

$x_1 = g_1(x_0) = g_1(0{,}300) = 0{,}148$, $|x_1 - x_0| = 0{,}152$.

$x_2 = g_1(x_1) = g_1(0{,}148) = 0{,}138$, $|x_2 - x_1| = 0{,}010$

$x_3 = g_1(x_2) = g_1(0{,}138) = 0{,}138$, $|x_3 - x_2| = 0{,}000$

On arrête les itérations puisque $|x_3 - x_2| = 0 \leq 10^{-3}$

donc $\boxed{\bar{x} = 0{,}138}$

Exercice n° 5 Newton _ Raphson.

$f(x) = x - e^{-2x} = 0$

1) la fonction est continue sur $[0,1]$.

$f(0) = -1$

$f(1) = 0{,}86$

$f(0) \times f(1) < 0$ donc la solution existe dans $[0,1]$.

$f'(x) = 1 + 2e^{-2x} > 0$ strictement croissante donc la solution est unique.

2) $f'(x) \neq 0$

$f''(x) = -4e^{-2x} \neq 0$

en plus $f(x)$ est continue et monotone sur $[0,1]$. les conditions de convergence sont vérifiées :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

x_0 ? $\quad f(0) \cdot f''(0)$ $> 0 \Rightarrow$ on prends $\underline{\underline{0}}$; $< 0 \Rightarrow$ on prends 1.

$\boxed{x_0 = 0}$ puisque $f(0) \cdot f''(0) > 0$.

$$x_1 = 0 - \frac{-1}{3} = 0{,}333$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0{,}422.$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0{,}426$$

done $\boxed{\bar{x} = 0{,}426}$

Exercice n° 6 Newton-Raphson.

$f(x) = x - 0{,}8 - 0{,}2 \sin x = 0$.

$I = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, $\varepsilon = 10^{-5}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

$f(x)$ est continue sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

$f(\frac{\pi}{4}) = -0{,}156$.

$f(\frac{\pi}{2}) = 0{,}57$

$\Rightarrow f(\frac{\pi}{4}) . f(\frac{\pi}{2}) < 0$ donc il existe au moins une racine dans $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

$f'(x) = 1 - 0{,}2 \cos x > 0$ donc $\neq 0$ et aussi $f(x)$ est strictement croissante.

$f''(x) = 0{,}2 \sin x \neq 0$

Résumé

- $f(\frac{\pi}{4}) . f(\frac{\pi}{2}) < 0$
- $f'(x) \neq 0$
- $f''(x) \neq 0$
- continue et monotone sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

Les conditions de convergence sont vérifiées alors : -

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

on a : $x_0 = \frac{\pi}{4}$ donc.

$$x_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{f(\frac{\pi}{4})}{f'(\frac{\pi}{4})} = 0,96712 \quad , |x_1 - x_0| = 0,18172$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,96433$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0,96433$$

$$|x_3 - x_2| = 0,00000 \leq 10^{-5}$$

donc $\bar{x} = 0,96433$.