Corrigé type du TD n°4 : des séries numériques

Exercice n°1

1) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{(n+1)} + \frac{B}{(n+2)}$$ par identification $\boxed{A=1}$ et $\boxed{B=-1}$

donc $$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n$$
$$= \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \cancel{\dots} + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \cancel{\tfrac{1}{n+1}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{(n+1)}} - \tfrac{1}{(n+2)}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\to 0} = \boxed{1}$$

donc $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ CV et $\boxed{S=1}$

2) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n$$
$$= \left(\cancel{\sqrt{2}} - \sqrt{1}\right) + \left(\cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{2}}\right) + \cancel{\dots} + \left(\cancel{\sqrt{n}} - \cancel{\sqrt{n-1}}\right) + \left(\sqrt{n+1} - \cancel{\sqrt{n}}\right)$$

$$S_n = \sqrt{n+1} - 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - 1\right) = \boxed{+\infty}$$

donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ DV.

b) 1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $\quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ DV.

Rappel

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \ , \ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e \ , \ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}}$$

2) $\sum_{n\geq 1} \ln(n)^2$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(n)^2 = +\infty \neq 0$

$$\sum_{n\geq 1} \ln(n)^2 \ \underline{DV}.$$

c) 1) $\sum_{n\geq 1} \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$ est convergente $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sin^3\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

2) $\sum_{n\geq 0} \cos n$ divergente, alors on ne peut pas déduire $\lim_{n\to+\infty} \cos n$.

Exercice n°2

1) $\sum_{n\geq 0} \frac{5^n+(-2)^n}{10^n} = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{5}{10}\right)^n + \sum_{n\geq 0}\left(-\frac{2}{10}\right)^n$

Somme de deux séries géométriques.

$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{5}{10}\right)^n$ série géométrique $|q| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1 \Rightarrow CV$.

$\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{2}{10}\right)^n$ " " $|q| = \left|-\frac{1}{5}\right| < 1 \Rightarrow CV$.

$$\sum_{(1)} CV + \sum_{(2)} CV = \sum CV.$$

donc $\sum_{n\geq 0} \frac{5^n+(-2)^n}{10^n}$ CV.

2) $\sum_{n\geq 0} \cos n$ $\quad |\cos n| < 1 \Rightarrow -1 < \cos n < 1$

deux limites différentes $\Rightarrow$ la limite n'existe pas $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \cos n$ $\underline{DV}$.

3) $\sum_{n\geq 2} \frac{\ln(n)}{n 2^n}$ nous avons $\ln n < n$ pour tout $n \geq 2$.

$$\Rightarrow \frac{\ln n}{2^n} < \frac{n}{2^n}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln n}{n 2^n} < \frac{n}{n 2^n} = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 2} \frac{\ln(n)}{n 2^n} < \sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$ série géométrique $|q| = \frac{1}{2} < 1$ CV

$\Rightarrow$ par comparaison $\sum_{n\geq 2} \frac{\ln n}{n 2^n}$ CV.

4) $\sum_{n\geq 1} n e^{-n^2}$

$f(n) = n e^{-n^2}$ positive

$f'(n) = -2n^2 e^{-n^2} < 0 \Rightarrow f(n)$ est décroissante.

les deux conditions sont satisfaites positive et décroissante,

alors nous avons $\int_1^{+\infty} t e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} \int_1^{x} -2t e^{-t^2} dt$.

$$= e^{-t^2} \Big|_1^x = e^{-x^2} - e^{-(1)^2} = \left(e^{-x^2} - \frac{1}{e}\right) \times -\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2e} - \frac{1}{2} e^{-x^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{\cancel{e^{-x^2}}^{\,0}}{2} + \frac{1}{2e} = \boxed{\frac{1}{2e}}$$

l'intégrale $\int_1^{+\infty} t e^{-t^2} dt$ CV $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} n e^{-n^2}$ CV.

5) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$ série de Bertrand $\alpha = 2 > 1$ CV.

6) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n (\log n)^4}$ série de Bertrand $\alpha = 1 \Rightarrow \beta = 4 > 1$

CV

7) $\sum_{n\geq 0} 2^n$ série géométrique $|q| = 2 > 1$ DV.

8) $\sum_{n\geq 3} 3^{-n+2} + 2^{-n+3} = \sum_{n\geq 3} 3^{-n} \cdot 3^2 + 2^{-n} \cdot 2^3$

$= 9 \sum_{n\geq 3} \left(\frac{1}{3}\right)^n + 8 \sum_{n\geq 3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

CV + CV = CV

$\Rightarrow \sum_{n\geq 3} 3^{-n+2} + 2^{-n+3}$ CV

9) $\sum_{n\geq 0} \ln(1 + e^{-2n})$

on a au voisinage de $\underline{0}$ $\ln(1+u_n) \simeq u_n$

$n \to +\infty \Rightarrow e^{-2n} \longrightarrow 0$ donc on est au voisinage de $\underline{0}$

donc $\ln(1+u_n) \simeq u_n$ et $\ln(1+e^{-2n}) \underset{+\infty}{\sim} e^{-2n}$.

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \ln(1+e^{-2n}) \underset{+\infty}{\sim} \sum_{n\geq 0} e^{-2n} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{e^2}\right)^n$

série géométrique.

$q = \frac{1}{e^2} < 1$ CV

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \ln(1+e^{-2n})$ CV.

10) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n \sin^2(n)}$

on a $0 < \sin^2 n < 1$

$\Rightarrow 0 < n \sin^2 n < n$

$\Rightarrow \frac{1}{n \sin^2 n} > \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n \sin^2(n)} > \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$

série harmonique DV $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n \sin^2 n}$ DV

11) $\sum_{n\geq 0} \frac{1+\sqrt{n}}{n^2+3}$

$$\frac{1+\sqrt{n}}{n^2+3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^2 \cdot n^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{1+\sqrt{n}}{n^2+3} \underset{+\infty}{\sim} \sum \frac{1}{n^{3/2}}$$ série de Rieman $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ CV

$$\Rightarrow \sum \frac{\sqrt{n}+1}{n^2+3} \text{ CV.}$$

Exercice n°3

1) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!}$ d'Alembert.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} = \frac{\cancel{(n+1)}.(n+1)^n.\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}.\cancel{n!}.n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!} \text{ DV.}$$

2) $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n$ Cauchy.

$$\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{\frac{1}{n}} = \left[\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^{\cancel{n}}\right]^{\frac{1}{\cancel{n}}}, \text{ donc } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+4}$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}} < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n \text{ CV}$$

3) $\sum_{n\geq 2} (\ln n)^{-n}$ Cauchy.

$$\sqrt[n]{u_n} = [u_n]^{\frac{1}{n}} = \left[(\ln n)^{-\cancel{n}}\right]^{\frac{1}{\cancel{n}}} = \frac{1}{\ln n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 2} (\ln n)^{-n} \text{ CV.}$$

4) $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n}$ D'Alembert.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)}{2^{(n+1)}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{(n+1)\cdot \cancel{2^n}}{\cancel{2^n}\cdot 2 \cdot n} = \frac{(n+1)}{2n}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n} \text{ CV}$$

5) $\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ D'Alembert.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2 \cdot \cancel{(n!)^2} \cdot \cancel{(2n)!}}{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot \cancel{2n!} \cdot \cancel{(n!)^2}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \quad \text{donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4} < 1 \text{ CV.}$$

6) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{(n+1)!}$ D'Alembert.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^3}{(n+2)!} \times \frac{(n+1)!}{n^3} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{\cancel{(n+1)!}}{(n+2)\cdot\cancel{(n+1)!}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \cancel{\left(\frac{n+1}{n}\right)^3}^{\,1} \cdot \frac{1}{(n+2)} = 0 < 1 \text{ C.V.}$$