Solution TD n° 1 : Intégrales simples et multiples

Exercice n° 1

a) $I = \int x^2 e^x dx \Rightarrow$ par parties.

$$u = x^2 \qquad u' = 2x$$
$$v' = e^x \longrightarrow v = e^x$$

nous avons $\int u.v' = u.v - \int u'.v$

donc $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \underbrace{\int 2x e^x dx}_{I_1}$

intégrons I_1 par parties :

$$u = 2x \qquad u' = 2$$
$$v' = e^x \longrightarrow v = e^x$$

$$I_1 = 2x e^x - \int 2 e^x dx = 2x e^x - 2e^x + C$$

alors $\boxed{I = x^2 e^x - \underbrace{2x e^x + 2e^x}_{I_1} + C}$

b) Intégrant en utilisant un changement de variable :

$I = \int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx$ | posons $u = e^x$ alors :

quand $x \to 1$, $u \to e$

" $x \to 2$, $u \to e^2$

et $du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}$.

l'intégrale devient $I = \int_e^{e^2} \frac{\cancel{u}}{1+u} \cdot \frac{du}{\cancel{u}} = \int_e^{e^2} \frac{du}{1+u}$

$$= \ln|1+u| \Big|_e^{e^2} = \ln|1+e^2| - \ln|1+e|$$

et puisque touts les termes avec la valeur absolue sont positifs :→

$$\boxed{I = \ln \frac{1+e^2}{1+e}}$$

Exercice n° 2

a) 1ère méthode

$$I=\int_0^1\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos y\,dy\right]dx=\int_0^1 x\sin y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\int_0^1 x(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0)\,dx$$

$$=\int_0^1 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\left(\frac{(1)^2}{2}-\frac{(0)^2}{2}\right)\Rightarrow I=\frac{1}{2}$$

2ème méthode

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1 x\cos y\,dx\right]dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2}{2}\cos y\Big|_0^1dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos y\left(\frac{(1)^2}{2}-\frac{(0)^2}{2}\right)dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos y\,dy=\frac{1}{2}\sin y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)\Rightarrow I=\frac{1}{2}$$

3ème méthode

$$I=\int_0^1 x\,dx\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos y\,dy=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\cdot\sin y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{(1)^2}{2}-\frac{(0)^2}{2}\right)\cdot\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}$$

Conclusion

* quand les bornes d'intégration sont constantes, on commence à intégrer par rapport à x ou par rapport à y cela donne le même résultat.
* et aussi quand les bornes d'intégration sont constantes et les variables de la fonction sont séparables, on peut calculer l'intégrale par un produit de deux intégrales, comme celui de la 3ème méthode (ci-dessus).

b) $$I_1=\int_0^1\int_{x^2}^{x}(x+y)\,dy\,dx=\int_0^1 xy+\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{x}dx=\int_0^1\left[x^2+\frac{x^2}{2}-\left(x^3+\frac{x^4}{2}\right)\right]dx$$

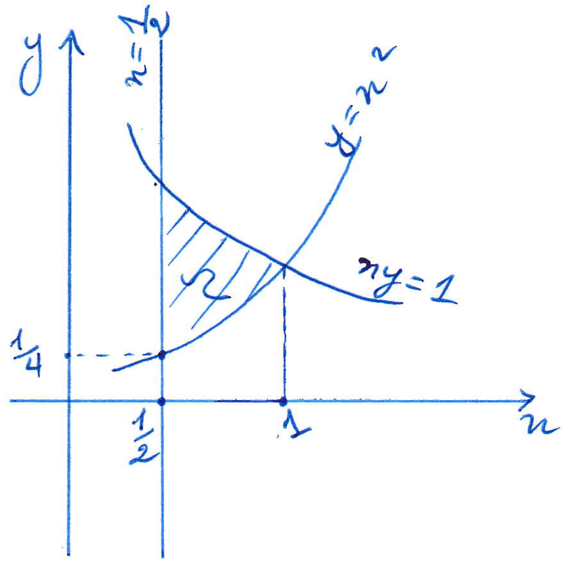
$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\Big|_0^1=\boxed{\frac{3}{20}}$$

$$I_2 = \int_1^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2x}} \cos(xy)\,dy\right] dx = \int_1^2 \frac{1}{x} \sin xy \Big|_0^{\frac{\pi}{2x}} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x}\Big(\overset{1}{\sin \cancel{x}\cdot\frac{\pi}{2\cancel{x}}} - \overset{0}{\sin 0}\Big)\, dx$$

$$= \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \boxed{\ln 2}$$

c) Calculons d'abord les points d'intersection des courbes délimitants Ω :-



$$\begin{cases} xy = 1 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (1,1)$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

<u>selon oy :-</u> les bornes de x sont constantes.

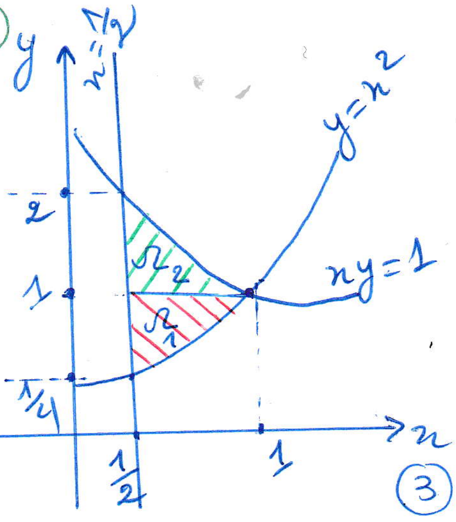
$$\iint_\Omega dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{x^2}^{\frac{1}{x}} dy\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} y \Big|_{x^2}^{\frac{1}{x}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{x} - x^2\right) dx$$

$$= \ln x - \frac{x^3}{3} \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \ln 1 - \frac{1}{3} - \left(\ln \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}\right)$$

$$= \ln 2 - \frac{7}{24}$$

<u>selon ox :</u> les bornes de y sont constantes :-

$$\iint_\Omega dx\,dy = \int_{\frac{1}{4}}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} dx\,dy + \int_{1}^{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{y}} dx\,dy$$



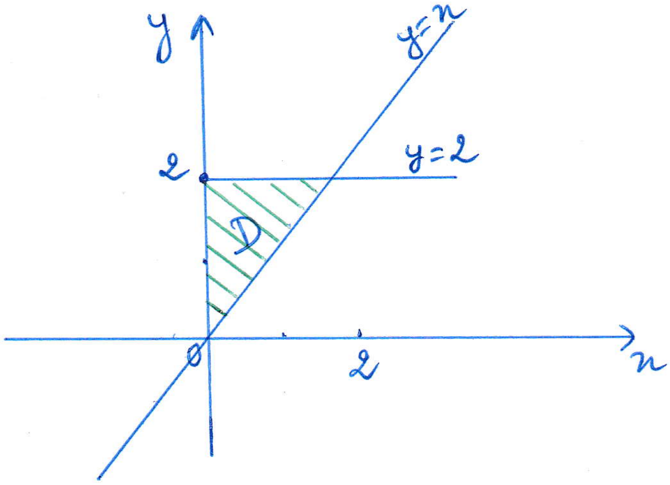
$$I = \int_{1/4}^{1} x\Big|_{1/2}^{\sqrt{y}} dy + \int_{1}^{2} x\Big|_{1/2}^{1/y} dy = \int_{1/4}^{1} \left(\sqrt{y} - \frac{1}{2}\right) dy + \int_{1}^{2} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right) dy$$

$$= \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\Big|_{1/4}^{1} - \frac{1}{2} y\Big|_{1/4}^{1} + \ln y\Big|_{1}^{2} - \frac{1}{2} y\Big|_{1}^{2} = \ln 2 - \frac{7}{24}$$

* On peut conclure qu'il faut toujours choisir le chemin qui nous donne un domaine régulier, il est plus facile à intégrer.

d) $I = \int_0^2 \int_x^2 e^{y^2}\, dy\, dx$

d'après les bornes de x qui sont constantes le chemin est $\underline{oy}$:



changeons l'ordre d'intégration selon ox : $\Rightarrow$ les bornes de y sont constantes alors : $0 \leq y \leq 2$ donc $0 \leq x \leq y$

$$\int_0^2 \int_x^2 e^{y^2}\, dy\, dx \Longrightarrow \int_0^2 \int_0^y e^{y^2}\, dx\, dy$$

Exercice n°3

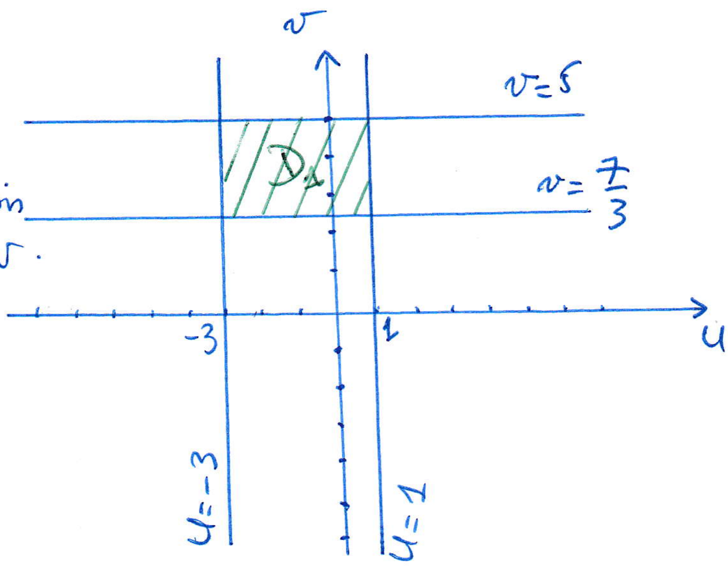
a) $I = \int_{D_1} (y-x)\,dx\,dy$; $y = x+1$, $y = x-3$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x + 5$

nous avons : $u = y - x$ et $v = y + \frac{1}{3}x$

de $\begin{cases} y = x+1 \\ y = x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x = 1 \\ y - x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ u = -3 \end{cases}$

et de $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \\ y = -\frac{1}{3}x + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + \frac{1}{3}x = \frac{7}{3} \\ y + \frac{1}{3}x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{7}{3} \\ v = 5 \end{cases}$

donc : $-3 \leq u \leq 1$
$\frac{7}{3} \leq v \leq 5$



$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ $x = ?$ en fonction
$y = ?$ de u et v.

nous avons :

$\begin{cases} u = y - x & \text{......} (1) \\ v = y + \frac{1}{3}x & \text{....} (2) \end{cases}$

$(1) - (2) \Rightarrow u - v = -x - \frac{1}{3}x \Rightarrow x = -\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v$

$\frac{1}{3} \times (1) + (2) \Rightarrow \frac{1}{3}u + v = \frac{1}{3}y + y \Rightarrow y = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v$

donc $J = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)$

$= -\frac{3}{4} \Rightarrow |J| = \left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

alors $I = \int_{-3}^{1} \left[\int_{\frac{7}{3}}^{5} u \cdot \frac{3}{4} \, dv \right] du$

$$= \int_{-3}^{1} \frac{3}{4} u v \Big|_{\frac{7}{3}}^{5} du = \int_{-3}^{1} \frac{3}{4} u \left(5 - \frac{7}{3}\right) du$$

$$I = \int_{-3}^{1} \frac{\cancel{3}}{4} \cdot u \cdot \frac{8}{\cancel{3}} \, du = 2 \int_{-3}^{1} u \, du = \cancel{2} \cdot \frac{u^2}{\cancel{2}} \Big|_{-3}^{1}$$

$$I = (1)^2 - (-3)^2 = 1 - 9 = -8 \Rightarrow \boxed{I = -8}$$

b) $I = \iint_{D_2} \frac{1}{x^2+y^2} \, dx\, dy$ utilisant un changement de variable

polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$

$$J = r$$

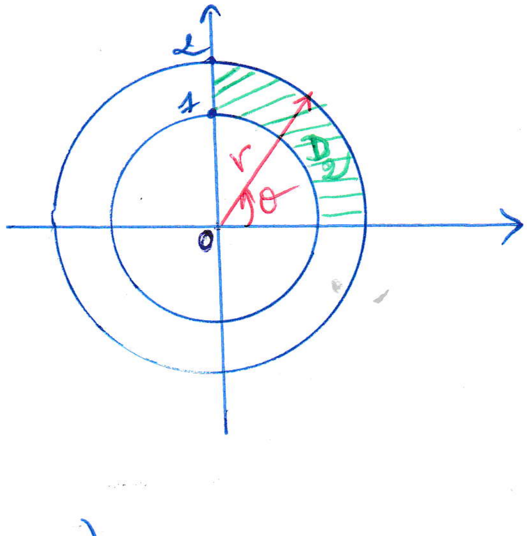
<u>les bornes de r et de θ ?</u> nous avons :

$x \geq 0 \Rightarrow r\cos\theta \geq 0 \Rightarrow \cos\theta \geq 0$
$y \geq 0 \Rightarrow r\sin\theta \geq 0 \Rightarrow \sin\theta \geq 0$
$\Big\}$ 1er quart du cercle $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \Rightarrow 1 \leq r^2 \leq 4 \Rightarrow 1 \leq r \leq 2$$

l'intégrale devient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_1^2 \frac{1}{r^2} \cdot r \, dr \right] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_1^2 \frac{1}{r} \, dr \right] d\theta$$



Des bornes constantes et les variables séparables donc :

$$I = \int_1^2 \frac{dr}{r} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \ln r \Big|_1^2 \cdot \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (\ln 2 - \cancel{\ln 1}^{\,0}) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$$

$$I = \frac{\pi}{2} \ln 2$$

Exercice n°4 :

$$I_1 = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 xyz\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 x\,dx \cdot \int_0^1 y\,dy \cdot \int_0^1 z\,dz$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

$$I_2 = \int_0^1\Big[\int_0^x\Big[\int_0^{x+y} xyz\,dz\Big]dy\Big]dx = \int_0^1\Big[\int_0^x xy\frac{z^2}{2}\Big|_0^{x+y} dy\Big]dx$$

$$= \int_0^1\Big[\int_0^x\Big(xy\,\frac{(x+y)^2}{2} - 0\Big)dy\Big]dx = \int_0^1\Big[\int_0^x \frac{xy}{2}(x^2+y^2+2xy)\,dy\Big]dx$$

$$= \int_0^1\int_0^x \Big(\frac{x^3y}{2} + \frac{xy^3}{2} + x^2y^2\Big)dy\Big]dx = \int_0^1 \frac{x^3y^2}{4} + \frac{xy^4}{8} + \frac{x^2y^3}{3}\Big|_0^x dx$$

$$= \int_0^1\Big(\frac{x^5}{4} + \frac{x^5}{8} + \frac{x^5}{3}\Big)dx = \int_0^1 \frac{17}{24}x^5\,dx = \frac{17}{24}\cdot\frac{x^6}{6}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{17}{144}}$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^2 z\rho^2\sin\theta\,dz\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int_0^1\rho^2\,d\rho \cdot \int_0^2 z\,dz$$

$$= -\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1 \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_0^2$$

$$= -\Big[\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\Big]\cdot\Big[\frac{1}{3} - 0\Big]\cdot\Big[\frac{4}{2} - 0\Big]$$

$$= +1\cdot\frac{1}{3}\cdot 2 \implies \boxed{I_3 = \frac{2}{3}}$$