Solution TD n°2 (exercices non traités durant la séance de TD)

EX:01

A) 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$, $U_n = \frac{1}{n^2+3n+2}$ Changeons la forme de U_n pour pouvoir calculer S_n ?

les deux solutions de l'équation $n^2+3n+2=0$ sont $n_1=-1$ et $n_2=-2$

donc on peut écrire n^2+3n+2 sous la forme $(n+1)\cdot(n+2)$.

alors $\frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{a}{(n+1)} + \frac{b}{(n+2)} = \frac{a(n+2)+b(n+1)}{(n+1)\cdot(n+2)}$

$= \frac{n(a+b)+2a+b}{(n+1)(n+2)}$ par identification avec $\frac{1}{n^2+3n+2}$

nous aurons $\begin{cases} a+b=0 & \Rightarrow a=-b \\ 2a+b=1 & \Rightarrow b=-1 \end{cases}$ donc $a=1$

alors $\frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = U_n$ maintenant on peut calculer S_n

$S_n = U_0+U_1+\dots+U_{n-1}+U_n$
$= (1-\cancel{\frac{1}{2}}) + (\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}) + \cancel{\dots} + (\cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n+1}}) + (\cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2})$

$S_n = 1 - \frac{1}{n+2}$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+2} = \boxed{1} \Rightarrow$ la limite fini $\Rightarrow \sum \frac{1}{n^2+3n+2}$ $\underline{\underline{CV}}$

B) 2) $\sum_{n\geq 1} \log n$, $\lim_{n\to\infty} \log n = \infty \neq 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \log n$ $\underline{\underline{DV}}$

3) $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\frac{n+1}{n}\cdot\pi\right)$, $\lim_{n\to\infty} \cos\left(\overset{\nearrow 1}{\frac{\cancel{n+1}}{n}}\cdot\pi\right) = \cos\pi = -1 \neq 0 \Rightarrow$ $\underline{\underline{DV}}$

4) $\sum_{n\geq 0} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$, $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = +\infty - \infty$ (F.I)

$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow$ la série doit être étudier

$S_n = U_0+U_1+U_2+\dots+U_{n-1}+U_n$

$S_n = (\cancel{\sqrt{1}} - 0) + (\cancel{\sqrt{2}} - \cancel{\sqrt{1}}) + (\cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{2}}) + \cancel{\dots} + (\cancel{\sqrt{n}} - \cancel{\sqrt{n-1}}) + (\sqrt{n+1} - \cancel{\sqrt{n}})$

$S_n = \sqrt{n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} = +\infty \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ DV

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ← x

nous avons au voisinage de 0 $\ln(1+x) \simeq x$

dans notre cas on doit vérifier que x est au voisinage de 0

$n \nearrow \infty$ $\frac{1}{\sqrt{n}} \searrow 0$ donc on est au voisinage de 0 donc on peut appliquer la formule si dessus et nous aurons $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{n}}$

donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \simeq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\simeq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ c'est la série harmonique DV

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge par équivalence.

EX; 02

1) $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(n+\ln n)}$ nous avons $n(n+\ln n) = n^2 + n\ln n$

alors $n^2 + n\ln n \geq n^2 \Rightarrow \frac{1}{n^2+n\ln n} \leq \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(n+\ln n)} \leq \sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n^2}$ série de Rieman $\alpha = 2 > 1$ CV

$\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(n+\ln n)}$ CV

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln n}}$, nous avons pour tout $n > 1 \Rightarrow n \geq \ln n$

$\Rightarrow \sqrt{n} \geq \sqrt{\ln n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{\ln n}} \Rightarrow \sum\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \sum\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{\ln n}}$

$\Rightarrow \sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \leq \sum\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{\ln n}} \Rightarrow \sum\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{\ln n}}$ DV par comparaison

série de Rieman $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ DV

4) $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{\sqrt{n^5+1}}$ par équivalence $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{\sqrt{n^5+1}} \simeq \sum_{n\geq 1} \frac{2n}{(n^5)^{\frac{1}{2}}}$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{\sqrt{n^5+1}} \simeq \sum_{n\geq 1} \frac{2n}{n^{\frac{5}{2}}} = 2 \sum \frac{1}{n^{\frac{5}{2}} . n^{-1}}$$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{\sqrt{n^5+1}} \simeq 2 \sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ série de Rieman $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ CV

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{\sqrt{n^5+1}}$ $\underline{\underline{CV}}$.

5) $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{\sqrt{n^4+1}}$ par équivalence

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{\sqrt{n^4+1}} \simeq 2 \sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^2} = 2 \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 . n^{-1}} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{\sqrt{n^4+1}} \simeq 2 \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

c'est la série harmonique $\underline{\underline{DV}}$ $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{\sqrt{n^4+1}}$ $\underline{\underline{DV}}$.

6) $\sum_{n\geq 1} n e^{-n^2}$

<u>Rappel</u>: critère de comparaison avec une intégrale :

soit $\sum u_n$ à termes positifs décroissants $\Rightarrow$ u_n décroissante.

on pose $u_n = f(n)$:

si $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.

alors pour notre série vérifions d'abord si u_n est décroissante ?

$u_n = n e^{-n^2}$ si le signe de la dérivée est négatif cela veut dire que u_n est décroissante ?

$$u_n' = (n)' \times e^{-n^2} + (e^{-n^2})' \times n = e^{-n^2} + (-2n e^{-n^2}) \times n = e^{-n^2} - 2n^2 e^{-n^2}$$

$u_n' = \underbrace{e^{-n^2}}_{\text{toujours positif}} \underbrace{(1-2n^2)}_{\text{négatif}} < 0$ $\Rightarrow$ la dérivée est négative

$\Rightarrow u_n$ est décroissante.

maintenant on pose $f(x) = x e^{-x^2}$ $x \in [0, +\infty[$

calculons l'intégrale impropre :

$$\int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x e^{-x^2} dx \begin{cases} \text{si } l = \text{fini } \underline{\underline{CV}} \\ \text{si } l = \infty \ \underline{\underline{DV}} \end{cases}$$

alors : - nous avons $\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)}$

dans notre exemple : $x e^{-x^2} \nearrow f(x) = -x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x$

donc $\int -2x e^{-x^2} dx = e^{-x^2}$ d'après la formule

$$\Rightarrow \int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$$

calculons maintenant la limite puisque c'est une intégrale impropre

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b x e^{-x^2} dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}\left(e^{-b^2} - e^{-1}\right) = -\frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left(e^{-b^2} - e^{-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\cancel{e^{-\infty}}^{\,0} - \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e} \ \underline{\underline{\text{finie}}}.$$

l finie $\Rightarrow$ l'intégrale converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} n e^{-n^2}$ $\underline{\underline{CV}}$

7) $\sum_{n\geq 2} \frac{a^n}{n^a}$, $a > 0$ utilisant le critère d'Alembert.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{(n+1)}}{(n+1)^a} \cdot \frac{n^a}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{a^n} \cdot a \cdot n^a}{(n+1)^a \cdot \cancel{a^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} a \cdot \left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n+1}}\right)^a = \boxed{a}$$

* si $0 \leq a < 1 \Rightarrow \sum \frac{a^n}{n^a}$ CV

* si $a > 1 \Rightarrow \sum \frac{a^n}{n^a}$ DV.

* si $a = 1 \Rightarrow$ la série devient $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n}$ (on remplace $a=1$ dans la série)

donc $\sum \frac{1}{n}$ c'est la série harmonique **DV**

EX : 03

Rappel : La série alternée $\sum (-1)^n u_n$

- Critère de Leibniz
  $$\begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0 \\ u_n \text{ décroissante} \end{cases}$$
  $\Downarrow$
  $\sum (-1)^n u_n$
  - CV
  - si les deux conditions ne sont pas satisfaites DV
- la convergence absolue
  $\sum |(-1)^n u_n| = \sum u_n$
  - CV $\Downarrow$ $\sum (-1)^n u_n$ est absolument convergente. (ABS - CV). $\Downarrow$ $\sum (-1)^n u_n$ CV
  - DV $\Downarrow$ Critère de Leibniz
    - CV $\Downarrow$ $\sum (-1)^n u_n$ est Semi - CV.
    - DV $\Downarrow$ $\sum (-1)^n u_n$ DV

A) $$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$$

Critère de Leibniz

1) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$ première condition satisfaite.

2) décroissance de u_n ? $u_{n+1} < u_n$?

$$u_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n+2-1} = \frac{1}{2n+1}$$ donc $u_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$

nous avons $2n+1 > 2n-1 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{u_{n+1}} < \underbrace{\frac{1}{2n-1}}_{u_n} \Rightarrow u_n$ décroissante

* la deuxième condition est aussi satisfaite $\Rightarrow \sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ $\underline{\underline{CV}}$

B) 1) $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \cdot \frac{n^3}{n!}$, $\sum_{n\geq 2} \left| (-1)^n \cdot \frac{n^3}{n!} \right| = \sum_{n\geq 2} \frac{n^3}{n!}$ utilisant d'Alembert.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 \cdot \cancel{n!}}{n^3 \cdot (n+1) \cdot \cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n+1}$$

$l = 0 < 1$ CV $\Rightarrow \sum_{n\geq 2} (-1)^n \cdot \frac{n^3}{n!}$ est $\underline{\text{ABS}}$_CV $\Rightarrow$ CV

2) $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \sqrt{n}\, \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}$, au voisinage de $\underline{0} \Rightarrow \operatorname{tg} x \simeq x$ et $n \nearrow \infty \Rightarrow \frac{1}{n^2} \searrow 0$

* par équivalence. donc $\operatorname{tg} \frac{1}{n^2} \simeq \frac{1}{n^2}$ au voisinage de $\underline{0}$.

donc $\sum_{n\geq 2} \left| (-1)^n \sqrt{n}\, \operatorname{tg} \frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n\geq 2} \sqrt{n}\, \operatorname{tg} \frac{1}{n^2} \simeq \sum_{n\geq 2} \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \sum \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2}$

donc $\sum_{n\geq 2} \sqrt{n}\, \operatorname{tg} \frac{1}{n^2} \simeq \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ série de Riemann $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ CV $\Rightarrow \sum_{n\geq 2} \sqrt{n}\, \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}$ CV

$\Rightarrow \sum (-1)^n \sqrt{n}\, \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}$ est ABS_CV. $\Rightarrow$ CV

3) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \left| (-1)^n \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \right| = \sum_{n\geq 1} \sqrt{n^2+1} - n$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)\left(\sqrt{n^2+1} + n\right)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \sum \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

donc $\sum_{n\geq 1} \sqrt{n^2+1} - n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \simeq \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ série harmonique DV

alors $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$ <u>diverge absolument</u> $\Rightarrow$ il faut passer au critère de Leibniz

* Critère de Leibniz

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} = 0$ première condition satisfaite ($\lim_{n\to\infty} u_n = 0$)

$u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1} + (n+1)}$; $\sqrt{(n+1)^2+1} + (n+1) > \sqrt{n^2+1} + n$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1} + (n+1)}}_{u_{n+1}} < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}}_{u_n}$$

donc u_n est décroissante $\Rightarrow$ deuxième condition satisfaite.

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \text{ est semi-CV.}$$

parce que : $\begin{cases} \sum \left| (-1)^n \sqrt{n^2+1} - n \right| \text{ DV} \\ \sum (-1)^n \sqrt{n^2+1} - n \text{ CV (Leibniz)} \end{cases} \Rightarrow \sum (-1)^n \sqrt{n^2+1} - n$ Semi-CV.

EX : 04 (séries entières)

A) $\sum a_n x^n$ pour trouver le rayon de convergence "R" $\rightarrow$ $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ ou $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

$$D_c =]-R, R[.$$

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \underbrace{\frac{1}{n!}}_{a_n} x^n$ $R = ?$ utilisant d'Alembert.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1 \cdot \cancel{n!}}{(n+1) \cdot \cancel{n!}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{R} = 0 \Rightarrow R = \frac{1}{0} = +\infty.$$

$$D_c =]-\infty, +\infty[.$$

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n\geq 1} \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n} \cdot x^n$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{(n+1)} \cdot n\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$$

$$\frac{1}{R} = 1 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow D_c =]-1, 1[$$

aux bornes :-

* $x = -1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ série alternée $\Rightarrow$ Leibniz $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \\ u_{n+1} < u_n \end{cases}$

u_n décroissante, alors $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ CV donc à $x=-1 \Rightarrow \sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ CV

* $\underline{x=1} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \Rightarrow$ c'est la série harmonique DV

donc à $x=1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ DV

alors $D_C = [-1, 1[$

3) $\sum_0^{\infty} (3+(-1)^n \cdot 2^{n-1}) \cdot x^n = \sum_0^{\infty} \underbrace{3}_{a_{n_1}} x^n + \sum_0^{\infty} \underbrace{(-1)^n \cdot 2^{n-1}}_{a_{n_2}} x^n$

Utilisons le critère de Cauchy :

a) $\frac{1}{R_1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n_1}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = \lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}} = 3^{\frac{1}{\infty}} = 3^0 = 1$

$$\frac{1}{R_1} = 1 \Rightarrow \boxed{R_1 = 1}$$

b) $\frac{1}{R_2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n_2}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n 2^{n-1}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{n-1}} =$

$= \lim_{n\to\infty} (2^{n-1})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{\left(\frac{n-1}{n}\right)\to 1} = \boxed{2}$

$$\frac{1}{R_2} = 2 \Rightarrow \boxed{R_2 = \frac{1}{2}}$$

$$R_C = \inf(R_1, R_2) = \inf\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2}$$

donc le domaine de convergence

$$D_C = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[.$$

B) 1) $\sum_{n\geq 0} x^n$ série géométrique de raison $r = x$.

converge pour $|x| < 1$ c.à.d $-1 < x < 1$

alors $D_C =]-1, 1[$

aux bornes : - * $\underline{x=-1}$: $\sum x^n = \sum (-1)^n \begin{cases} \to \sum 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ \to \sum -1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

deux limites différentes $\Rightarrow \sum x^n$ DV à $x=-1$

* $\underline{x = 1}$ $\Rightarrow \sum x^n = \sum 1$, $\lim_{n\to\infty} u_n = 1 \neq 0$ DV

$\sum x^n$ DV à $x = 1$

donc le domaine de convergence D_C reste ouvert

à $x = 1$ et à $x = -1$ $D_c =]-1, 1[$.

2) $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 2^{nx}$ série de fonction donc $u_n(x) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n 2^{nx}$

alors quelle est le domaine de convergence de x?

Utilisant Cauchy : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n 2^{nx}}$

$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\cancel{n}} \cdot 2^{\cancel{n}x}\right]^{\frac{1}{\cancel{n}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\overset{\to 0}{\cancel{\frac{1}{n}}}+1\right) \cdot 2^x = 2^x$

d'après Cauchy la série converge si $l = 2^x < 1$

donc $\ln 2^x < \ln 1 \Rightarrow x < 0$. c,à,d $D_C =]-\infty, 0[$

<u>aux bornes :-</u>

$\underline{x = 0}$: $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 2^{n\times 0} = \sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

appliquons la condition necessaire de la convergence :-

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0 \Rightarrow$ DV

La série diverge pour $x = 0$

alors $D_C =]-\infty, 0[$