TD N° 02 : Les Séries

EXERCICE N° 01

A. Calculer les sommes partielles des séries suivantes. En déduire leur somme et leur nature :

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

B. En examinant la limite du terme général, montrez que les séries suivantes sont divergentes :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \text{arctg}(n)$ 2. $\sum_{n\geq 1} \log(n)$ 3. $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\frac{n+1}{n}.\pi\right)$ 4. $\sum_{n\geq 0} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

C. Déterminez la nature des séries suivantes en cherchant un équivalent de u_n

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[9]{n^3+n^2+1}}{\sqrt{n^4+n^3+2}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

EXERCICE N° 02 :

Déterminer la nature des séries numériques à termes positifs suivantes :

1. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n+ln(n))}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln n}}$ 3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+5}{3^n+11}$ 4. $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{\sqrt{n^5+1}}$

5. $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{\sqrt{n^4+1}}$ 6. $\sum_{n\geq 1} ne^{-n^2}$ 7. $\sum_{n\geq 2} \frac{a^n}{n^a}, a > 0$ 8. $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n\log(n)}$

EXERCICE N° 03 :

A. Montrez que la série alternée suivante est convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

B. Etudier la convergence absolue et la semi –convergence des séries suivantes :

1. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n.\frac{n^3}{n!}$ 2. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}.\tan\frac{1}{n^2}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n.\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

EXERCICE N° 04 :

A. Trouver le rayon de convergence des séries entières suivantes. En déduire leur domaine de convergence :

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!}.x^n$ 3. $\sum_{0}^{\infty}(3+(-1)^n.2^{n-1}).x^n$

B. Trouver le domaine de convergence des séries de fonctions suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0} x^n$ 2. $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.2^{nx}.$

Exercices supplémentaires

1. Trouvez la nature des séries numériques suivantes :

$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2.\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} ln(1+e^{-n})$, $\sum_{n\geq 1} e^{\frac{1}{n}}$, $\sum_{n\geq 0} a^n n^2$, $a>0$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$, $\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, $\sum_{n\geq 1}\frac{a^n n!}{n^n}$, $a>0$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n-2}}$, $\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n}$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$, $\sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{n^\alpha+n+1}$, $\alpha\leq 2$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ncos^2(n)}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{5^n+(-2)^n}{10^n}$, $\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

$\sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{(1+n^2)^3}$ $\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ $\sum_{n\geq 1}\cos\left(\frac{n+1}{n}.\pi\right)$ $\sum_{n\geq 1}\frac{3n-2}{n^2+1}$ $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$

$\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{(n)^{2+n}}$, $\sum_{n\geq 1}\frac{2n^2+2}{n^3+6n}$, $\sum_{n\geq 1}\frac{2n+5}{5n^3+3n^2}$, $\sum_{n\geq 1} e^{sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}$, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\sqrt{n}}$.

2. En utilisant la limite des suites des sommes partielles, déterminez la nature des séries suivantes :

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{7^{n-2}}$ $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ $\sum_{n\geq 2}\frac{2}{n^2-1}$

3. Etudiez la convergence absolue et la semi convergence des séries suivantes :

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ $\sum_{n\geq 1}(-1)^n.\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

4. Déterminez le rayon et le domaine de convergence des séries entières suivantes :

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n.x^n}{n!}$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ $\sum_0^{\infty} n!\,x^n$