Université Batna 2 - Institut d'Hygiène et Securité 2020/2021

$1^{ère}$ Année

Solution : TD N° 01

Raisonnement Mathématique

Exo : 01 : ① : Négation à un quantificateur

$P : (\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 0)$, non $P : (\exists x \in \mathbb{R})(x^2 < 0)$

② : Négation à deux quantificateurs

Sa négation est : $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$

$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y \neq 0)$.

③ : a/ fausse, sa négation $\exists x (x = -1) \in \mathbb{R}$ telque $(x+1)^2 \not> 0$

b/ fausse, sa négation est : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \neq -1$

c/ fausse, car, il existe deux solutions. sa négation est $\exists$ au moins x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$, telque $2x^2 + 3x + 1 = 0$.

d/ fausse, sa négation $\exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, telque $xz = xy$ et $x \neq y$ {le cas $(x, y, z) = \{1, 2, 0\}$}.

Exo : 02 : a/ Commençons par essayer de démontrer la propriété directe : n^2 impair $\Rightarrow$ n impair

si n^2 est impair alors $\exists K \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 = 2K + 1$

or $2K + 1$ est strictement positif donc :

$\exists K \in \mathbb{N}$ tel que $n = \sqrt{2K+1}$

Et la on doit montrer que la racine carrée d'un

impair est impair, ce qui n'est pas si simple.
Nous allons voir qu'il est plus simple de prouver la proposition contraposée :

n pair $\Rightarrow n^2$ pair. Si n est pair alors $\exists k \in \mathbb{N}$ telque $n = 2k$, donc $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Si on pose $2k^2 = m$
or $2k^2$ est un entier naturel donc
alors $\exists m \in \mathbb{N}$ telque $n^2 = 2m$ donc n^2 est pair.

- On a donc montré que la contraposée de n^2 impair $\Rightarrow n$ impair était vraie, donc la propriété directe n^2 impair $\Rightarrow n$ impair est vraie.

b/ Montrons la propriété directe : n impair $\Rightarrow n^2$ impair
Si n est impair alors $\exists k \in \mathbb{N}$ telque $n = 2k+1$
donc $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k) + 1$ donc si on pose $2k^2+2k = m$
or $2k^2+2k$ est un entier naturel donc
alors $\exists m \in \mathbb{N} / n^2 = 2m+1$ donc n^2 est impair

c/ On a donc les deux propriétés :

$$\left\{\begin{array}{l} n^2 \text{ impair} \Rightarrow n \text{ impair} \\ n \text{ impair} \Rightarrow n^2 \text{ impair} \end{array}\right\} \text{ qui se traduit par } n \text{ impair} \Leftrightarrow n^2 \text{ impair}$$

<u>Exp : 03</u> : $\sqrt{2}$ est irrationnel.
<u>Par l'absurde</u> : Supposons $\sqrt{2}$ est rationnel, alors il existe des entiers p et q sans diviseurs communs $PGCD(p,q) = 1$ telque $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On l'écrit $p^2 = 2q^2$. On remarque que si p est impair, p^2 l'est aussi, d'après l'exercice précédent. Donc forcement p est pair c.à.d il existe un entier p_0 telque $p = 2p_0$. Ainsi $q^2 = 2p_0^2$. Pour la même raison, q est pair, $q = 2q_0$, cela signifie que p et q admettent 2 comme diviseur commun,

Contradiction, Car P et q sont premiers entre eux.
On conclue que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exp : 04

Raisonnement par disjonction de cas, si n est pair alors il existe un entier m tel que $n=2m$ donc
$n(n+1)=2m(2m+1)=2k$, ainsi $n(n+1)$ est pair.
si n est entier impair alors il existe un autre entier m tel que $n=2m+1$, donc $n(n+1)=(2m+1)(2m+2)$
$=2(2m+1)(m+1)=2k$.

Exp : 05

Par récurrence, on a $P(0)$ est vraie, Supposons que $P(n)$ est vraie aussi, c.à.d $0\leq U_n\leq 3$
montrons que $0\leq U_{n+1}\leq 3$.
Comme $0\leq U_n\leq 3$, alors $0+6\leq U_n+6\leq 3+6$, c.à.d
$0\leq U_n+6\leq 9$, alors On obtient en Calculant la racine Carrée $\sqrt{0}\leq\sqrt{U_n+6}\leq\sqrt{9}=3$. Ainsi $0\leq U_{n+1}\leq 3$.