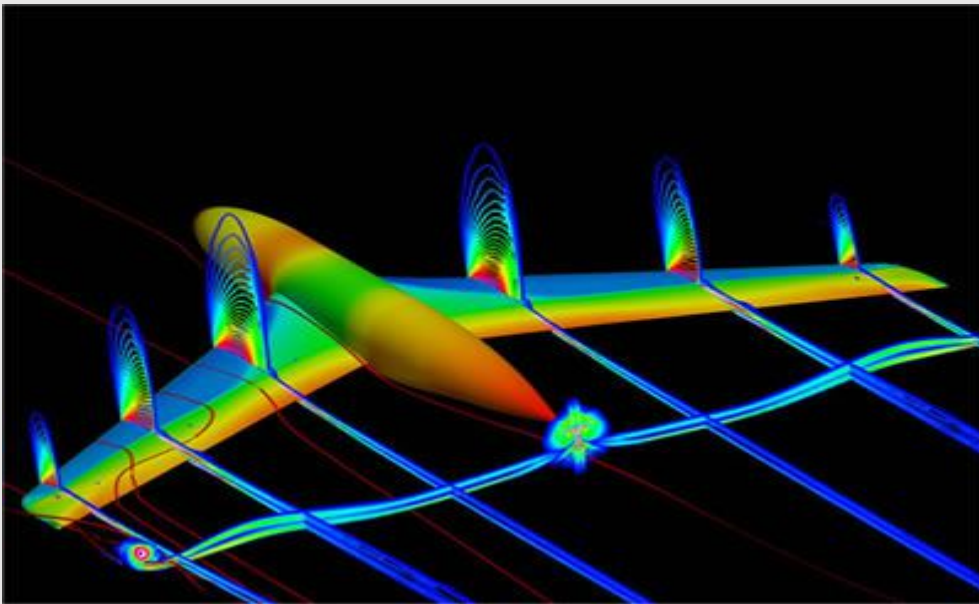


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE M'SILA  
FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

**Polycopie du cours**  
*Méthodes numériques Approfondies*

**Master 1 Energétique**



***Réalisé Par : Dr. Adel CHINE***

2018-2019

## Avant propos

Ce polycopié de cours, intitulé : Méthodes numériques approfondies, est destiné pour les étudiants de Master 1, option énergétique, de l'université de Mohamed BOUDIAF –M'sila. Le contenu de ce polycopié est compatible avec le programme de formation du Master S1, donné au niveau du département de Génie Mécanique de l'Université de M'sila. Des connaissances de base en mathématique, mécanique des fluides et transferts de chaleur sont indispensables, afin de mieux comprendre le contenu de ce polycopié pédagogique.

La modélisation numérique constitue actuellement un outil très important pour l'étude des phénomènes physiques qui intéressent puissamment la vie humaine (écoulements confinés et à surface libre, transfert de chaleur et de masse, réaction chimique et changement de phase, etc. ...). Ces phénomènes, dans la plupart sont gouvernés par des équations aux dérivées partielles complexes, nécessitent des méthodes numériques convenables pour les résoudre. Autrement dit, la compréhension des phénomènes physiques par des méthodes numériques.

Le but de ce polycopié pédagogique est d'initier l'étudiant du Master aux techniques numériques, permettant la résolution des équations aux dérivées partielles, en relation avec l'équation générale de transport (*méthode des différences finis et volumes finis*). Cette dernière est utilisée dans ce document pour décrire plusieurs phénomènes de transport, tels que : la diffusion stationnaire uni, bi et tridimensionnelle, le transport advectif-diffusif stationnaire et instationnaire multidimensionnelle.

Ce document pédagogique est divisé en trois chapitres, dont le premier chapitre est consacré à la démonstration de l'équation générale de transport. Un rappel sur les équations de conservation, ainsi que les conditions aux limites sont abordés aussi. Le deuxième chapitre est dédié à la présentation de la méthode des différences finis. Pour mieux simplifier la maîtrise de cette technique, cette dernière est utilisée dans ce chapitre pour résoudre plusieurs phénomènes de transport (*diffusions stationnaires multidimensionnelles, advection-diffusion stationnaire et instationnaire*). La méthode des volumes finis est abordée en détaille au dernier chapitre. Cette technique, très employée dans le domaine de la mécanique des fluides numérique, a été utilisée pour discrétiser la plupart des phénomènes de transport abordés en deuxième chapitre. On termine par une bibliographie, incluant les références des documents utilisées pour la rédaction de ce polycopié de cours.

# Table des matières

<b>Avant propos</b> .....	1
<b>I Modélisation mathématique des phénomènes de transferts</b>	
I.1 Introduction .....	3
I.2 Forme générale de l'équation de transport .....	3
I.2.1 Equation de conservation de la quantité de mouvement .....	6
I.2.2 Equation de conservation d'énergie .....	7
I.2.3 Equation de conservation des espèces .....	7
I.3 Classification des équations aux dérivées partielles d'ordre deux .....	8
I.4 Conditions aux limites .....	9
I.4.1 Conditions aux limites de Dirichlet .....	10
I.4.2 Conditions aux limites de Neumann .....	10
I.4.3 Conditions aux limites de Cauchy .....	11
I.4.4 Conditions initiales .....	11
<b>II Méthode des différences finis pour la résolution des problèmes de transport.</b>	
II.1 Introduction .....	13
II.2 Schémas numériques .....	13
II.2.1 Erreur de troncature .....	13
II.2.2 Schémas numériques pour les dérivées premières .....	15
II.2.2.1 Schéma décentré amont .....	16
II.2.2.2 Schéma décentré aval .....	16
II.2.2.3 Schéma centré .....	17
II.2.3 Schémas numériques pour les dérivées secondes .....	18
II.2.3.1 Schéma décentré amont .....	18
II.2.3.2 Schéma décentré aval .....	19
II.2.3.3 Schéma centré .....	20
II.2.4 Schémas numériques pour les fonctions à plusieurs variables .....	21
II.3 Problèmes elliptiques .....	22
II.3.1 Problème aux limites de Dirichlet ( <i>cas bidimensionnel</i> ) .....	22
II.3.1.1 Mise en équation du problème .....	22

II.3.1.2	Génération du maillage	23
II.3.1.3	Discrétisation numérique	24
II.3.1.4	Système d'équations algébriques	25
II.3.2	Problème aux limites de Neumann (cas bidimensionnel)	29
II.4	Problèmes paraboliques	29
II.4.1	Problème aux limites de Dirichlet	29
II.4.1.1	Mise en équation du problème	30
II.4.1.2	Génération du maillage	30
II.4.1.3	Discrétisation numérique	31
II.4.1.3.1	Schéma d'Euler explicite	31
II.4.1.3.2	Schéma d'Euler implicite	32
II.4.1.3.3	Schéma semi-implicite de Crank-Nicholson	35
II.4.2	Problème aux limites de Neumann	37
II.5	Problèmes hyperboliques	38
II.5.1	mise en équation du problème	38
II.5.2	Génération du maillage	39
II.5.3	Discrétisation numérique	39
II.5.3.1	Méthode explicite d'Euler	39
II.5.3.1.1	Détermination des valeurs de $\phi$ sur $\Omega$ à $t = \Delta t$	40
II.5.3.2	Méthode implicite d'Euler	41
II.5.3.2.1	Détermination des valeurs de $\phi$ sur $\Omega$ à $t = \Delta t$	41

### **III Méthode des volumes finis pour la résolution des problèmes de transport**

III.1	Introduction	45
III.2	Problèmes de diffusion stationnaire	45
III.2.1	Diffusion stationnaire unidimensionnelle	45
III.2.1.1	Formulation mathématique	46
III.2.1.2	Construction du maillage	46
III.2.1.3	Discrétisation de l'équation gouvernante	47
III.2.1.4	Système d'équations algébriques discrètes	49
III.2.2	Diffusion stationnaire bidimensionnelle	51
III.2.2.1	Formulation mathématique	51
III.2.2.2	Construction du maillage	51
III.2.2.3	Discrétisation de l'équation gouvernante	52
III.2.2.4	Système d'équations algébriques discrètes	54
III.2.3	Diffusion stationnaire tridimensionnelle	69

III.3 Problèmes de convection-diffusion stationnaire -----	72
III.3.1 Advection-diffusion stationnaire unidimensionnelle -----	72
III.3.1.1 Schéma centré pour le terme d'advection -----	74
III.3.1.1.1 Evaluation du schéma centré -----	75
III.3.1.2 Schéma Upwind pour le terme d'advection -----	78
III.3.1.2.1 Evaluation du schéma Upwind -----	80
III.3.1.3 Schéma exponentiel pour le terme d'advection -----	81
III.3.1.4 Schéma hybride pour le terme d'advection -----	84
III.3.1.4.1 Evaluation du schéma Hybride -----	86
III.3.1.4.2 Schéma Hybride pour les problèmes d'advection-diffusion bidimensionnels -----	87
III.3.1.4.3 Schéma Hybride pour les problèmes d'advection-diffusion tridimensionnels -----	87
III.3.1.5 Schéma loi de puissance pour le terme d'advection -----	88
III.4 Problèmes de transport instationnaires -----	89
IV Références bibliographiques -----	94

# **Chapitre I**

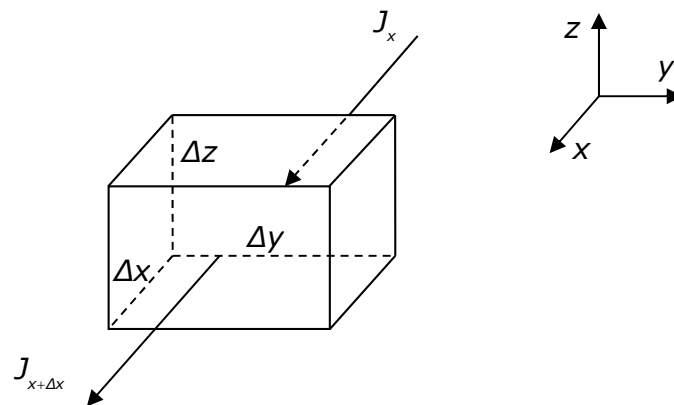
## **Modélisation mathématique des phénomènes de transfert**

## I.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de déterminer la forme mathématique des équations gouvernant les phénomènes physiques liés à l'engineering. On s'intéresse dans ce cours aux phénomènes de transfert de chaleur et de masse, gouvernées par les équations des bilans : Bilan de masse et de quantité mouvement, bilan d'énergie. Ces bilans, représentés par des équations aux dérivées partielles de deuxième ordre, généralement non linéaires, n'acceptent pas pour des situations réelles des solutions analytiques. C'est-à-dire, pour les résoudre on fait appel aux méthodes numériques (*méthode des différences finis, méthodes des volumes finis, etc. ...*). Pour que le problème physique soit bien posé de point de vue mathématique, il est nécessaire, en plus de(s) l'équation(s) gouvernant le problème à résoudre, de définir des conditions aux limites représentant l'état du phénomène aux limites du domaine de résolution. Pour cette raison une brève description des conditions aux limites usuelles, liées aux phénomènes de transfert de chaleur et de masse, est abordée à la fin de ce chapitre.

## I.2 Forme générale de l'équation de transport

Soit  $\Phi$  une quantité spécifique quelconque (*énergie par unité de masse, vitesse par unité de masse, ...etc.*). Supposons que cette quantité traversant un volume de contrôle  $V_c$  de taille  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  suivant les axes  $ox, oy, oz$  respectivement (*voir figure I.1*).



**Figure I.1** : Densité de Flux de  $\Phi$  traversant le volume de contrôle  $V_c$  suivant la direction  $x$

L'accumulation de  $\Phi$  au sein du volume de contrôle  $V_c$ , pendant un temps  $\Delta t$ , peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \text{Accumulation de } \Phi \text{ dans } V_C \text{ pendant } \Delta t = \\
 & \quad \text{Le flux net de } \Phi \text{ dans } V_C + \\
 & \quad \text{La génération de } \Phi \text{ au sein du } V_C \qquad (I.1)
 \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, on donne l'expression mathématique de chaque terme de l'éq. (I.1). Autrement dit, donner à l'éq. (I.1) son expression mathématique.

➤ **Accumulation de  $\Phi$**

L'accumulation de  $\Phi$  dans le volume de contrôle  $V_C$  au cours du temps  $\Delta t$  est donnée par :

$$(\rho\Phi\Delta V)_{t+\Delta t} - (\rho\Phi\Delta V)_t \qquad (I.2)$$

avec  $\rho$  désigne la masse volumique du fluide,  $\Delta V$  la taille du volume de contrôle  $V_C$  ( $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ ) et  $t$  le temps.

➤ **Flux net de  $\Phi$  dans  $V_C$**

Soit  $J_x$  la densité de flux de  $\Phi$  ( $J_x = (\rho\Delta V\Phi) / (\Delta y\Delta z\Delta t)$ , quantité de  $\Phi$  par unité de temps et de surface) entrant dans le volume de contrôle  $V_C$  par la face  $\Delta y\Delta z$  à  $x$ .  $J_{x+\Delta x}$  la densité de flux sortant de  $V_C$  par la face  $\Delta y\Delta z$  à  $x+\Delta x$ . Des flux similaires existes dans les directions  $y$  et  $z$ .

Le flux net de  $\Phi$  dans le volume de contrôle  $V_C$  durant le temps  $\Delta t$  peut traduire mathématiquement par :

$$(J_x - J_{x+\Delta x})\Delta y\Delta z\Delta t + (J_y - J_{y+\Delta y})\Delta x\Delta z\Delta t + (J_z - J_{z+\Delta z})\Delta x\Delta y\Delta t \qquad (I.3)$$

Pour un écoulement de fluide newtonien, le transport de la quantité  $\Phi$  se réalise, dans la plupart des cas, par advection et diffusion. Autrement dit, un transport mixte. Le transport dominant lié principalement à l'intensité du champ de vitesse d'écoulement.

La densité de flux transportée par advection, suivant la direction  $x$ , s'écrit comme suit :

$$J_{x_{adv}} = \rho u \Phi \qquad (I.4)$$



où,  $\rho u$  représente la densité de flux massique traversant la face  $\Delta y \Delta z$  du  $V_c$  à l'abscisse  $x$ , et  $u$  la composante, suivant la direction  $x$ , du champ de vitesse  $\vec{V}$  donné par :

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (\text{I.5})$$

de plus, la densité diffusive est donnée par :

$$J_{x_{diff}} = -\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (\text{I.6})$$

ici,  $\Gamma$  est la conductance diffusive, elle est exprimée en thermique, à titre d'exemple, par  $\frac{k}{C_p}$ .

De (I.4) et (I.6), on peut écrire :

$$\begin{cases} J_x = \left[ \rho u \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_x \\ J_{x+\Delta x} = \left[ \rho u \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{x+\Delta x} \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

### ➤ Génération net de $\Phi$ dans $V_c$

La génération net de  $\Phi$  dans le volume de contrôle  $V_c$  pendant un temps  $\Delta t$  est donnée par :

$$\psi \Delta V \Delta t \quad (\text{I.8})$$

avec  $\psi$ , désigne la génération du flux de  $\Phi$  par unité de volume.

de (I.2), (I.3) et (I.8), l'équation (I.1) devient :

$$\begin{aligned} (\rho \Phi \Delta V)_{t+\Delta t} - (\rho \Phi \Delta V)_t = & (J_x - J_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z \Delta t + \\ & (J_y - J_{y+\Delta y}) \Delta x \Delta z \Delta t + (J_z - J_{z+\Delta z}) \Delta x \Delta y \Delta t + \psi \Delta V \Delta t \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

On divise l'équation (I.9) par  $\Delta V \Delta t$ , on obtient :

$$\frac{(\rho \Phi)_{t+\Delta t} - (\rho \Phi)_t}{\Delta t} = \frac{(J_x - J_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \frac{(J_y - J_{y+\Delta y})}{\Delta y} + \frac{(J_z - J_{z+\Delta z})}{\Delta z} + \psi \quad (\text{I.10})$$

Supposant que  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  et  $\Delta t$  tous tends vers 0. L'équation (I.10) devient :

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} = -\frac{\partial J_x}{\partial x} - \frac{\partial J_y}{\partial y} - \frac{\partial J_z}{\partial z} + \psi \quad (\text{I.11})$$

ou bien :

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v\Phi)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w\Phi)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \psi \quad (\text{I.12})$$

Finalement, la forme vectorielle de l'équation (I.12) prend la forme :

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}\Phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \Phi) + \psi \quad (\text{I.13})$$

L'équation (I.13) représente la forme conservative de l'équation de transport générale.

Les équations gouvernantes des phénomènes de transport (*quantité de mouvement, énergie, masse, ...etc.*) peuvent se mettre sous la forme de l'équation (I.13). Dans ce qui suit, nous présenterons la forme différentielle des équations de conservation.

### I.2.1 Equation de conservation de la quantité de mouvement

Cette équation exprime, pour un point matériel, la conservation de la quantité de mouvement au sein d'un milieu en écoulement. Ou bien d'une autre façon, elle exprime l'égalité entre les forces extérieures agissant sur une particule fluide et la variation de sa quantité de mouvement. Elle est donnée, pour un écoulement unidimensionnel suivant la direction  $x$  de l'écoulement, par :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla \cdot (\mu \nabla u) + f_v \quad (\text{I.14})$$

avec :  $u$  représente la composante de la vitesse d'écoulement suivant la direction  $x$ ,  $p$  la pression statique au sein du fluide,  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide et  $f_v$  les forces de volume et de contraintes qui n'apparaissent pas dans le terme de diffusion.

Nous remarquons clairement que l'éq. (I.14) représente un cas particulier de l'éq. (I.13) avec :

$$\begin{cases} \Phi = u \\ \Gamma = \mu \\ \psi = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_v \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

## I.2.2 Equation de conservation d'énergie

Pour un écoulement à faible vitesse, l'équation de conservation d'énergie sans tenir compte de la dissipation visqueuse, peut se mettre comme suit :

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} h) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \psi_h \quad (\text{I.16})$$

Dans cette dernière équation,  $h$  désigne l'enthalpie spécifique,  $k$  la conductivité thermique,  $T$  la température et  $\psi_h$  le terme source.

Si on considère une matière incompressible et obéit à loi des gaz parfait, on peut mettre :

$$dh = C_p dT \quad (\text{I.17})$$

où,  $C_p$  représente la chaleur spécifique à pression constante.

On remplace l'éq. (I.17) dans l'éq. (I.16), on obtient :

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} h) = \nabla \cdot \left( \frac{k}{C_p} \nabla h \right) + \psi_h \quad (\text{I.18})$$

Par comparaison entre cette dernière équation et l'éq. (I.13), on constate que l'éq. (I.18) représente un cas particulier de l'éq. (I.13) avec :

$$\begin{cases} \Phi = h \\ \Gamma = \frac{k}{C_p} \\ \psi = \psi_h \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

## I.2.3 Equation de conservation des espèces

Selon la deuxième loi de Fick, l'équation de conservation d'une espèce chimique  $i$ , dans un mélange, peut s'écrire comme suit :

$$\frac{\partial(\rho C_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} C_i) = \nabla \cdot (\Gamma_i \nabla C_i) + \psi_i \quad (\text{I.20})$$

avec  $\rho$  désigne la masse volumique du mélange,  $C_i$  la fraction massique de l'espèce chimique  $i$  (rapport de la masse d'espèce  $i$  sur la masse du mélange),  $\Gamma_i$  le coefficient de diffusion de  $C_i$  et  $\psi_i$  la génération de  $C_i$  dans le mélange.

La comparaison de l'éq. (I.20) par l'éq. (I.13), nous permet de constater :

$$\begin{cases} \Phi = C_i \\ \Gamma = \Gamma_i \\ \psi = \psi_i \end{cases} \quad (\text{I.21})$$

### I.3 Classification des équations aux dérivées partielles d'ordre deux

La majorité des phénomènes physiques, notamment en énergétique, sont gouvernées par des équations aux dérivées partielles du second ordre (*équations de quantité de mouvement, équation de la chaleur, etc. ...*). Ces dernières peuvent s'exprimer mathématiquement comme suit :

$$a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, x, y, c^{te} \right) \quad (\text{I.22})$$

où  $f$  désigne l'inconnue, et  $a$ ,  $b$  et  $c$  des coefficients.

- Il faut noter que si  $a$ ,  $b$  et  $c$  représentent des constantes ou bien des fonctions de  $x$  et  $y$ , l'équation (I.22) représente une équation aux dérivées partielles (EDP) linéaire ;
- Si  $a$ ,  $b$  et  $c$  dépendent de  $f$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  alors l'EDP dite non linéaire.

De point de vue mathématique, L'EDP indiquée dans l'éq. (I.22) peut se classer comme suit :

- L'EDP est dite elliptique si  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  ;
- Si  $\Delta = 0$ , l'EDP dite parabolique ;
- Si  $\Delta > 0$ , l'EDP dite hyperbolique.

### **Exemple I.1**

#### **1. Equation de Laplace bidimensionnelle (*Equation elliptique*)**

Cette équation s'écrit mathématiquement comme suit :

$$\Delta\Phi = \nabla \cdot \nabla\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{I.23})$$

Pour cette dernière équation,  $\Delta = 0 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0$ , donc l'équation de Laplace est de type elliptique.

#### **2. Equation de La chaleur unidimensionnelle (*Equation parabolique*)**

La conduction stationnaire unidimensionnelle sans source de chaleur est gouvernée mathématiquement par l'EDP suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{I.24})$$

Pour l'éq. (I.24) on a  $\Delta = 0 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 0$ . Donc l'EDP est de type parabolique.

#### **3. Equation des ondes (*Equation hyperbolique*)**

L'équation de propagation stationnaire unidimensionnelle d'onde peut s'exprimer comme suit :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{I.25})$$

ou  $h$  représente l'amplitude d'onde.

Ici la variable  $y$  est remplacée par la variable  $t$ , et  $\Delta = 0 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 > 0$ . Donc l'EDP représenté par l'éq. (I.25) est de type hyperbolique.

## **I.4 Conditions aux limites**

Une condition aux limites représente l'état physique de la variable à résoudre aux limites du domaine d'étude. Par exemple, la valeur de la température sur la paroi d'une conduite, où s'écoule à l'intérieur de ce dernier un fluide. La nature mathématique des conditions aux limites dépend généralement de la forme mathématique de(s) équation(s) gouvernante(s) (*nature physique du problème*), et du nombre de variables

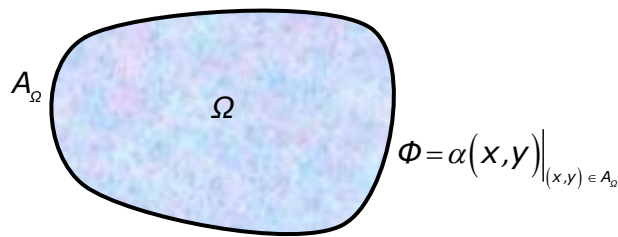
mis en jeu. Pour cette raison on trouve plusieurs types de conditions aux limites. Dans ce cours on s'intéresse plus particulièrement aux conditions aux limites suivant :

### I.4.1 Conditions aux limites de Dirichlet

On dit que la condition aux limites est de type Dirichlet, sur une portion ou la totalité de la frontière du domaine d'étude  $A_\Omega$ , si à cet endroit les valeurs de l'inconnue sont imposées. Mathématiquement cela peut se traduire par :

$$\Phi = \alpha(x, y) \text{ avec } (x, y) \in A_\Omega \quad (\text{I.26})$$

Dans l'éq. (I.26)  $\alpha$  désigne la valeur de la variable physique à déterminer  $\Phi$  sur la frontière du domaine d'étude  $\Omega$ .



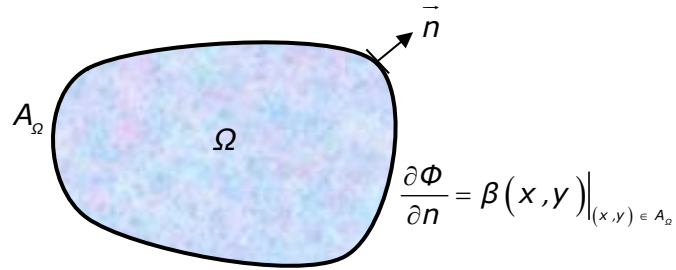
**Figure I.1** : Exemple de condition aux limites de Dirichlet

### I.4.2 Conditions aux limites de Neumann

Si le gradient de la variable  $\Phi$  est imposé sur la frontière  $A_\Omega$ , on dit qu'on a une condition aux limites de type Neumann. Dans ce cas, cette condition peut se mettre comme suit :

$$\nabla \Phi \cdot \vec{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \beta(x, y) \text{ avec } (x, y) \in A_\Omega \quad (\text{I.27})$$

Ici  $\vec{n}$  désigne le vecteur unitaire normal à  $A_\Omega$ , et  $\beta$  la valeur du gradient de  $\Phi$  à un point donné  $M(x, y)$  de  $A_\Omega$ .

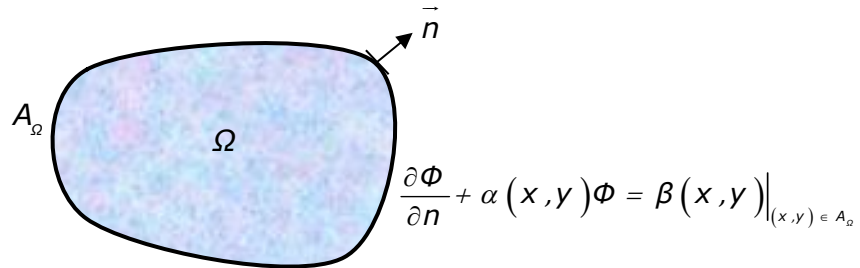


**Figure I.2 :** Exemple de conditions aux limites de Neumann

### I.4.3 Conditions aux limites de Cauchy

La condition aux limites de Cauchy consiste à imposer une condition mixte sur une portion ou bien la totalité de la frontière  $A_\Omega$ . Cette condition peut s'écrire mathématiquement comme suit :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \alpha(x, y) \Phi = \beta(x, y) \right|_{(x, y) \in A_\Omega} \quad (\text{I.28})$$



**Figure I.3 :** Exemple de condition aux limites de Cauchy

### I.4.4 Conditions initiales

On dit conditions initiales toute condition sur la propriété  $\Phi$  imposé à  $t=0$ . Cette condition, en plus des conditions aux limites, sont nécessaire pour la résolution des problèmes instationnaires. Les conditions initiales peuvent formuler comme suit :

$$\Phi(x, y, t=0) = \alpha_i(x, y) \quad \text{avec } (x, y) \in \Omega \quad (\text{I.29})$$

avec  $\alpha_i$  désigne les valeurs de  $\Phi$  dans le domaine d'étude à l'instant initiale  $t=t_0$ .

## **Chapitre II**

# **Méthode des différences finis pour la résolution des problèmes de transport**



## II.1 Introduction

La méthode des différences finis est l'un des méthodes numériques utilisée pour la résolution des équations aux dérivées partielles. Elle permet, en utilisant des schémas des différences finis, de transformer l'écriture différentielle des équations gouvernant les phénomènes de transport, en écriture algébrique pour les résoudre par la suite à l'aide des outils de l'analyse numérique.

Dans cette méthode on remplace le domaine continu du calcul par un ensemble de points (*Maillage*), et cherche une solution approchée sur ces points. Pour cette raison, on approxime les équations aux dérivées partielles par des développements limités de Taylor au voisinage des points de maillage. La solution du système d'équations algébriques, linéaires ou non linéaires, ainsi obtenu fournit donc la solution approchée du problème posé.

## II.2 Schémas numériques

La transformation des dérivées partielles en expressions algébriques est basée principalement sur les développements limités de Taylor. C'est-à-dire, des développements tronqués à un certain ordre qui dépend de la précision souhaité.

### II.2.1 Erreur de troncature

L'erreur de troncature désigne la partie tronquée de la formule de Taylor. Pour quantifier cette erreur, en considère le développement en série de Taylor de la fonction  $f$  au voisinage du point  $x = x_0$ , on écrit donc :

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0} + \frac{\Delta x^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{x_0} + \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} \left( \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right)_{x_0} + R_{n+1} \quad (\text{II.1})$$

avec  $x = x_0 + \Delta x$ , et  $\Delta x$  le pas de discrétisation (*distance entre deux points de maillage*).

Le dernier terme de l'équation  $R_{n+1}$  est nommé erreur de troncature, elle donnée par la formule de Lagrange par :

$$R_{n+1} = \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} \left( \frac{\partial^{n+1} f(\xi)}{\partial x^{n+1}} \right) \quad (\text{II.2})$$

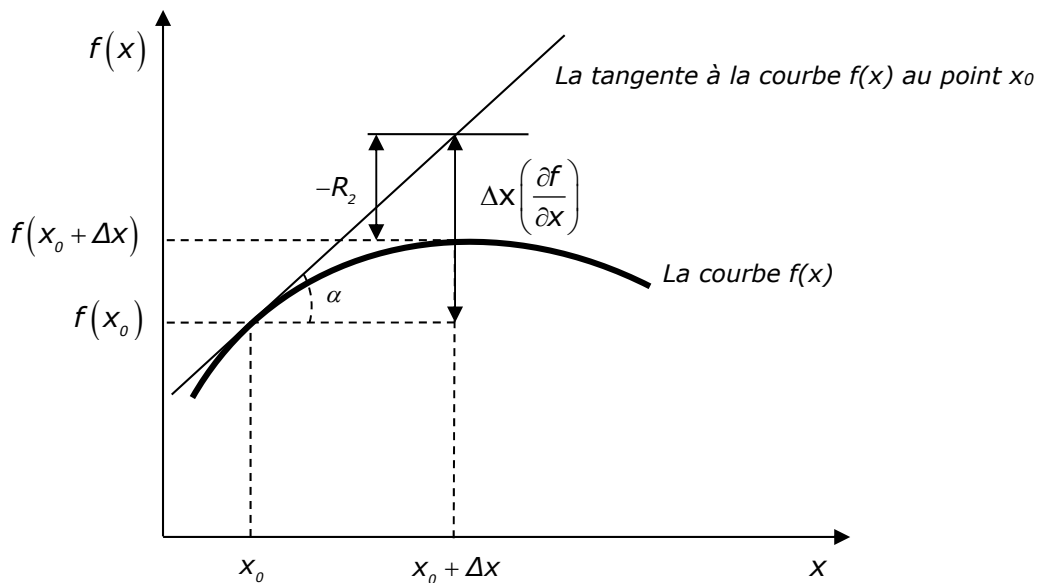
avec :  $x_0 \leq \xi \leq x_0 + \Delta x$ .

Pour mieux comprendre la signification mathématique de l'erreur de troncature, on utilise exclusivement l'éq. (II.1) tronquée au premier ordre. On écrit donc :

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0} \pm R_2 \quad (\text{II.3})$$

le signe  $\pm$  traduit l'allure de la courbe définissant la fonction  $f$  (concave ou convexe).

 **Courbe concave**



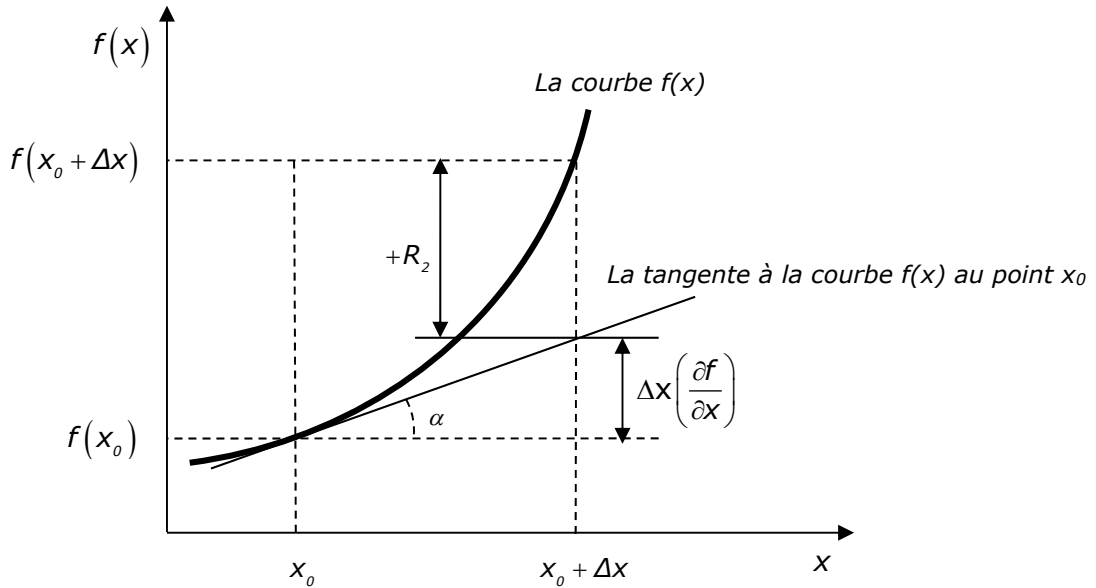
**Figure II.1** : Interprétation graphique du développement limité de Taylor d'ordre 1 par une courbe concave

La figure (II.1) représente la variation, en fonction de  $x$ , de la fonction arbitraire  $f(x)$ . Selon cette figure, l'erreur de troncature  $-R_2$  est de valeur négative à cause de la forme concave de  $f(x)$ . De plus la valeur de cette erreur est proportionnelle au pas  $\Delta x$ . Autrement dit, pour éliminer l'erreur de troncature il faut que  $\Delta x \rightarrow 0$ .

 **Courbe convexe**

La figure (II.2) montre la variation de la fonction  $f(x)$ , désignée par une courbe convexe, en fonction de l'abscisse  $x$ . De cette figure nous remarquons que la forme convexe de la courbe  $f(x)$  se traduit par une valeur positive de l'erreur de troncature.

Comme dans le cas de la courbe concave, la diminution de l'erreur de troncature nécessite la réduction de la taille de  $\Delta x$ .



**Figure II.2 :** Interprétation graphique du développement limité de Taylor d'ordre 1 par une courbe convexe

## II.2.2 Schémas numériques pour les dérivées premières

Comme nous avons signalés dans l'introduction de ce chapitre, en ce basant sur le développement limité de Taylor pour transformer l'écriture différentielle des dérivées premières en écriture algébrique.

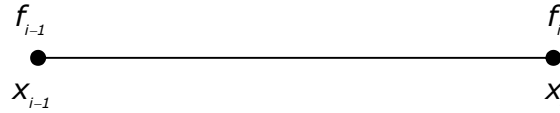
Dans le tableau (II.1) nous donnons la l'écriture indicielle équivalente des différents opérateurs et fonctions utilisés dans cette partie.

**Tableau II.1 :** Représentation indicielle des fonctions utilisées dans les développements limités de Taylor

Représentation ordinaire	Représentation indicielle
$f(x_i)$	$f_i$
$f(x_i, y_j, z_k)$	$f_{i,j,k}$
$x, y$ et $z$ aux nœuds $i, j$ et $k$ respectivement	$x_i, y_j, z_k$

### II.2.2.1 Schéma décentré amont

Soit le développement limité de la fonction  $f$  au voisinage du point  $x_i$  (voir figure II.3).



**Figure II.3** : Segment appartient à la courbe  $f(x)$  limité par les points  $x_{i-1}$  et  $x_i$

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial x^2} \right) \quad (\text{II.4})$$

avec :  $x_{i-1} \leq \xi \leq x_i$ .

De cette dernière équation on constate :

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial x^2} \right) \quad (\text{II.5})$$

avec toujours :  $x_{i-1} \leq \xi \leq x_i$ .

L'éq. (II.5) représente un schéma décentré amont, ce dernier utilisé pour exprimer la dérivée première de la fonction  $f$  au voisinage du point  $x_i$ .

### II.2.2.2 Schéma décentré aval



**Figure II.4** : Segment appartient à la courbe  $f(x)$  limité par les points  $x_i$  et  $x_{i+1}$

On a le développement limité de Taylor suivant :

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial x^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

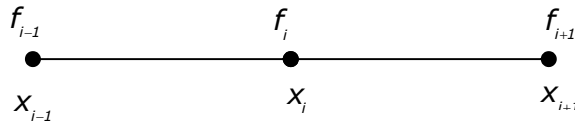
avec :  $x_i \leq \xi \leq x_{i+1}$ .

De l'éq. (II.6), on peut mettre :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} \left(\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial x^2}\right) \quad (\text{II.7})$$

On dit qu'on a approché la dérivée première de la fonction  $f$  par un schéma décentré aval, il est d'ordre 1.

### II.2.2.3 Schéma centré



**Figure II.5** : Segment appartient à la courbe  $f(x)$  limité par les points  $x_{i-1}$  et  $x_{i+1}$

L'utilisant des développements limités de Taylor suivants :

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i - \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3}\right), \quad x_{i-1} \leq \xi \leq x_i \quad (\text{II.8})$$

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3}\right), \quad x_i \leq \xi \leq x_{i+1} \quad (\text{II.9})$$

nous permet, en soustrayant l'éq. (II.8) de l'éq. (II.9), de calculer le schéma centré des différences finis. On écrit donc :

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2\Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + \frac{2\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3}\right)$$

donc :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{6} \left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3}\right), \quad x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+1} \quad (\text{II.10})$$

L'éq. (II.10) représente un schéma centré aux différences finis, il est d'ordre 2.

On peut avoir des schémas d'ordre supérieur, associés aux dérivées premières, en augmentant le nombre de points de discrétisation. Autrement dit, on utilise plus de termes dans le développement limité de Taylor.

**Exemple II.1 :**

Démontrer que la dérivée première de la fonction  $f$  au voisinage du point  $x_i$  peut donner comme suit :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i}{2\Delta x} + \frac{\Delta x^2}{3} \left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3}\right), \quad x_{i-2} \leq \xi \leq x_i$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2\Delta x} + \frac{\Delta x^2}{3} \left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3}\right), \quad x_i \leq \xi \leq x_{i+2}$$

**Exemple II.2 :**

Démontrer aussi que la dérivée de la fonction  $f$  peut s'approximer par :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i-2} - 6f_{i-1} + 3f_i + 2f_{i+1}}{6\Delta x} + O(\Delta x^3), \quad x_{i-2} \leq \xi \leq x_{i+1}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{-2f_{i-1} - 3f_i + 6f_{i+1} - f_{i+2}}{6\Delta x} + O(\Delta x^3), \quad x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+2}$$

Déduire, pour les deux schémas, l'expression de l'erreur de troncature.

### II.2.3 Schémas numériques pour les dérivées secondes

De la même manière que pour les dérivées première de la fonction  $f$ , on peut utiliser un schéma décentré amont, décentré aval ou centré pour évaluer la dérivée deuxième de la fonction  $f$  au voisinage de l'abscisse  $x_i$ . Il on est de même pour la précision, on peut aller à n'importe quel ordre.

#### II.2.3.1 Schéma décentré amont

Pour évaluer le schéma décentré amont, associé à la dérivée deuxième de la fonction  $f$  au voisinage de  $x_i$ , on utilise les développements limités de Taylor des fonctions  $f_{i-1}$  et  $f_{i-2}$ . On écrit donc :

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i - \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3}\right), \quad x_{i-1} \leq \xi \leq x_i \tag{II.11}$$

$$f_{i-2} = f_i - (2\Delta x) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i - \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3} \right), \quad x_{i-2} \leq \xi \leq x_i \quad (\text{II.12})$$

En multipliant l'éq. (II.11) par 2, on obtient :

$$2f_{i-1} = 2f_i - 2\Delta x \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{2\Delta x^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i - \frac{2\Delta x^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3} \right), \quad x_{i-1} \leq \xi \leq x_i \quad (\text{II.13})$$

En soustrayant l'éq. (II.13) de l'éq. (II.12), on trouve :

$$f_{i-2} - 2f_{i-1} = -f_i + \Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i - \Delta x^3 \left( \frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3} \right)$$

Finalement :

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{\Delta x^2} + \Delta x \left( \frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3} \right), \quad x_{i-2} \leq \xi \leq x_i \quad (\text{II.13})$$

L'éq. (II.13) désigne un schéma décentré amont pour la dérivée deuxième de  $f$  au voisinage de  $x_i$ , dont l'erreur de troncature est d'ordre un.

### II.2.3.2 Schéma décentré aval

Soit les deux développements suivant :

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i + \frac{\Delta x^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3} \right), \quad x_i \leq \xi \leq x_{i+1} \quad (\text{II.14})$$

$$f_{i+2} = f_i + (2\Delta x) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3} \right), \quad x_i \leq \xi \leq x_{i+2} \quad (\text{II.15})$$

$$(\text{II.15}) - 2 \times (\text{II.14}) \Rightarrow f_{i+2} - 2f_{i+1} = -f_i + \Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i + \Delta x^3 \left( \frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3} \right)$$

donc :

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{\Delta x^2} - \Delta x \left( \frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3} \right), \quad x_i \leq \xi \leq x_{i+2} \quad (\text{II.16})$$

L'éq. (II.16) représente un schéma décentré aval, qui peut être utilisé pour évaluer la dérivée 2<sup>ème</sup> de la fonction  $f$  au voisinage de  $x_i$ . La précision de ce schéma est d'ordre 1.

### II.2.3.3 Schéma centré

L'évaluation du schéma centré nécessite l'utilisation des deux développements suivants tronqués au quatrième ordre.

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i - \frac{\Delta x^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_i + \frac{\Delta x^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial x^4} \right), \quad x_{i-1} \leq \xi \leq x_i \quad (\text{II.17})$$

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i + \frac{\Delta x^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_i + \frac{\Delta x^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial x^4} \right), \quad x_i \leq \xi \leq x_{i+1} \quad (\text{II.18})$$

En sommant l'éq. (II.17) et l'éq. (II.18) on trouve :

$$f_{i-1} + f_{i+1} = 2f_i + \Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i + \frac{\Delta x^4}{12} \left( \frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial x^4} \right)$$

ou bien :

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \left( \frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial x^4} \right), \quad x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+1} \quad (\text{II.19})$$

L'éq. (II.19) représente un schéma aux différences finis centré d'ordre deux. Ce schéma est utilisé généralement pour évaluer les termes de diffusion dans les équations de conservation. Il peut être utilisé, dans le cas des écoulements à vitesse modérée, pour évaluer les termes d'advection (*schéma plus précis que les schémas décentrés*).

Il existe d'autres méthodes qui garantissent, pour les équations aux dérivées partielles, le passage de l'écriture différentielle à l'écriture algébrique (*méthodes d'approximations polynomiales, nodales, ...etc.*). Pour cette dernière on peut citer comme un exemple la formule de Lagrange. Elle est donnée par :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n L_i f_i \quad (\text{II.20})$$

où :

$$L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (\text{II.21})$$

Pour  $n = 3$  (approximation quadratique de la fonction  $f$ ), l'éq. (II.20) s'écrit comme suit :



$$f(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f_3 \quad (\text{II.22})$$

De l'éq. (II.22) on peut calculer facilement la dérivée première et deuxième de la fonction de  $f$ . On écrit donc :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{(2x-x_2-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f_1 + \frac{(2x-x_1-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f_2 + \frac{(2x-x_1-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f_3 \quad (\text{II.23})$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{2}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f_1 + \frac{2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f_2 + \frac{2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f_3 \quad (\text{II.24})$$

### Exemple II.3 :

Par l'utilisation des schémas décentré amont, décentré aval et centré, calculer la dérivée

deuxième de la fonction  $f(x) = \frac{(1 + \exp^{(x^2+1)})}{3}$  au point  $x = 2$ . On donne  $\Delta x = 0.1$ .

Calculer l'erreur de troncature pour chaque cas.

## II.2.4 Schémas numériques pour les fonctions à plusieurs variables

Soit  $f$  une fonction qui dépend de plusieurs variables, par exemple  $(x, y)$ . En se basant sur les schémas déjà cités auparavant, les dérivées de cette fonction par rapport à ces variables on notation indicielle peuvent s'écrire comme suit :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (\text{II.25})$$

l'éq. (II.25) indique le schéma centré, en différences finis, de la dérivée première de la fonction  $f$  par rapport à la variable  $x$ , elle est d'ordre deux.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y^2) \quad (\text{II.26})$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (\text{II.27})$$

l'éq. (II.27) représente le schéma centré, en différences finis, de la dérivée deuxième de la fonction  $f$  par rapport à la variable  $x$ , elle est d'ordre deux.

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{f_{i,j-1} - 2f_{i,j} + f_{i,j+1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2) \quad (\text{II.28})$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \frac{f_{i-1,j-1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i+1,j+1}}{4\Delta x \Delta y} + O(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (\text{II.29})$$

## II.3 Problèmes elliptiques

### II.3.1 Problème aux limites de Dirichlet (cas bidimensionnel)

En utilisant la méthode des différences finis, déterminer la distribution stationnaire de la quantité  $\phi$  au sein du domaine d'étude  $\Omega$  schématisé en figure (II.6). Dans cet exemple, il faut noter que le transport de  $\phi$  est purement diffusif (le gradient de  $\phi$  est engendré par l'application des conditions aux limites de type Dirichlet. Ce gradient est le seul responsable du transport diffusif de cette quantité au sein du domaine d'étude). On admet l'absence du terme source  $\psi$ .

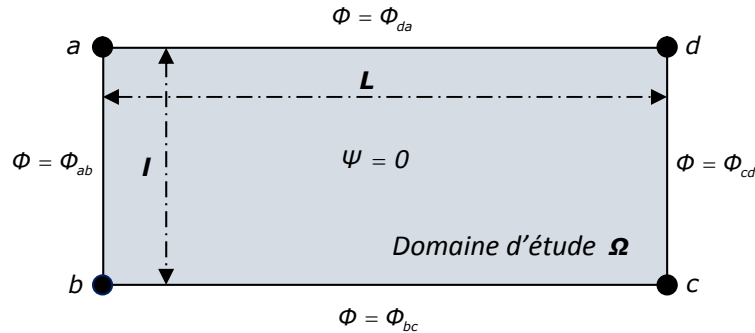


Figure II.6 : Géométrie du domaine d'étude  $\Omega$  (Diffusion bidimensionnelle)

Pour déterminer numériquement les valeurs de  $\phi$  dans le domaine d'étude  $\Omega$  on procède comme suit :

#### II.3.1.1 Mise en équation du problème

Comme nous avons indiqué précédemment (Chap. I, § I.2, éq. (I.13)), l'équation de transport générale est s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}\Phi) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\Phi) + \psi \quad (\text{II.30})$$

Selon les énoncés de l'exemple on a :

$\Phi = \Phi(x, y) \Rightarrow$  problème bidimensionnel ;

$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow$  phénomène stationnaire ;

$\mathbf{V} = 0 \Rightarrow$  pas d'écoulement à l'intérieur de  $\Omega$  ;

$\psi = 0 \Rightarrow$  absence du terme source ;

$\Gamma = Cte \Rightarrow$  conductance diffusive constantes.

De ces hypothèses simplificatrices, l'éq. (II.30) devient :

$$\Delta\Phi = \left( \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (\text{II.31})$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \Phi = \Phi_{ab}, (x = 0, 0 \leq y \leq l) \\ \Phi = \Phi_{bc}, (0 < x < L, y = 0) \\ \Phi = \Phi_{cd}, (x = L, 0 \leq y \leq l) \\ \Phi = \Phi_{ca}, (0 < x < L, y = l) \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

Finalement la distribution de  $\phi$  dans  $\Omega$  est gouvernée par l'éq. (II.31) et les conditions aux limites citées dans l'éq. (II.32).

### II.3.1.2 Génération du maillage

Le but du maillage est la division du domaine d'étude en sous domaines (*méthodes des volumes finis, méthode des éléments finis*), ou en un ensemble de points (*méthode des différences finis*), afin d'obtenir sur ce maillage une solution numérique approchée du problème à résoudre.

Pour notre problème, la génération du maillage dans le domaine d'étude  $\Omega$ , consiste à déterminer les coordonnées des points de maillage (*points de discrétisation*). Autrement dit, les pas de maillage  $\Delta x$  et  $\Delta y$ .

Pour un maillage régulier, les pas de discrétisation dans  $\Omega$  seront calculés par les formules suivantes :

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{L}{(n_x - 1)} \\ \Delta y = \frac{l}{(n_y - 1)} \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

avec  $\Delta x$  est le pas de discrétisation suivant l'axe des  $x$ ,  $\Delta y$  le pas de discrétisation suivant l'axe des  $y$ ,  $n_x$  le nombre de points de discrétisation par rapport à  $x$  et  $n_y$  le nombre de point de discrétisation suivant  $y$ .

Les coordonnées des points de maillage peut être aussi calculées par :

$$\begin{cases} x_i = (i - 1) \cdot \Delta x \\ y_j = (j - 1) \cdot \Delta y \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

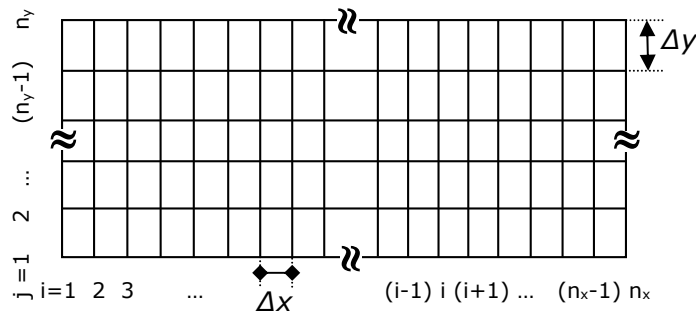


Figure II.7 : Exemple de maillage du domaine d'étude  $\Omega$

La figure (II.7) représente un exemple de maillage, dans le cas général, du domaine d'étude  $\Omega$ . Le pas discrétisation suivant la direction  $x$  est différent du pas de discrétisation suivant la direction  $y$ , c'est-à-dire ( $\Delta x \neq \Delta y$ ).

### II.3.1.3 Discrétisation numérique

La discrétisation numérique est l'écriture pour chaque point de maillage, où la quantité  $\phi$  est inconnue, une équation sous forme algébrique. Le système d'équations algébriques ainsi obtenu est donc déterminé. C'est-à-dire, le nombre d'équations égale au nombre d'inconnues.

Pour un point arbitraire  $(i, j)$  du domaine d'étude, l'éq. (II.31) s'écrit :

$$\left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_{i,j} = 0 \quad (\text{II.35})$$

L'utilisation des schémas des différences finis centrés d'ordre deux (voir éq. (II.19)), nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{\Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i+1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \\ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{\Phi_{i,j-1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j+1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2) \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

En substituant l'éq. (II.36), sans tenir compte des termes d'erreurs de troncature, dans l'éq. (II.35), on trouve :

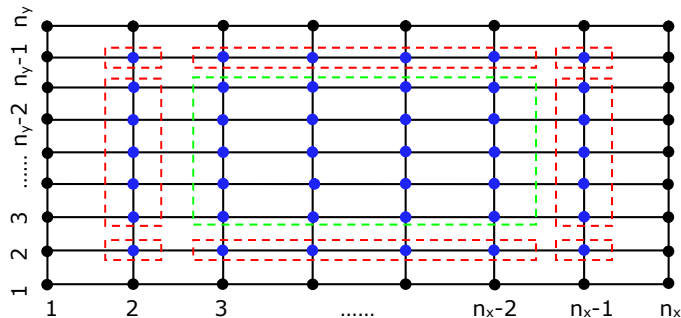
$$\frac{\Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Phi_{i,j-1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j+1}}{\Delta y^2} = 0 \quad (\text{II.37})$$

On pose  $\zeta = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2$ , la réarrangement de l'éq. (II.36) donne :

$$\Phi_{i-1,j} - 2(1 + \zeta)\Phi_{i,j} + \Phi_{i+1,j} + \zeta\Phi_{i,j-1} + \zeta\Phi_{i,j+1} = 0 \quad (\text{II.38})$$

Cette dernière équation représente la forme algébrique discrète de l'éq. (II.31) pour un point (nœud)  $(i, j)$  arbitraire du domaine d'étude  $\Omega$ . Noter bien que cette forme est valable seulement pour les nœuds, dont leurs nœuds adjacents, n'appartient pas aux limites du domaine d'étude  $\Omega$ .

#### II.3.1.4 Système d'équations algébriques



**Figure II.8 :** Exemple de nœuds de maillage sur le domaine d'étude  $\Omega$ . Nœuds noirs : valeurs de  $\Phi$  sont connues par les conditions aux limites de Dirichlet. Nœuds bleus : nœuds où on cherche à déterminer la valeur de  $\Phi$ .

Sur la figure (II.8) nous montrons un schéma descriptif des nœuds de maillage dans le domaine d'étude  $\Omega$ . Les nœuds noirs désignent les points où la valeur de  $\Phi$  est connue préalablement par les conditions aux limites de Dirichlet. Sur les nœuds bleus, la valeur de  $\Phi$  est inconnue, et qu'on doit le calculer numériquement.

La détermination du système d'équations algébriques (*équations discrètes*), consiste à écrire pour chaque point bleu une équation, en se basant sur la forme discrète générale (voir *éq. (II.38)*).

Pour simplifier le calcul du système d'équations algébriques, on divise la zone des nœuds bleus en neuf sous zones, et on procède comme suit :

▪ **Sous zone 1 : point (i = 2, j = 2)**

$$\Phi_{1,2} - 2(1 + \zeta)\Phi_{2,2} + \Phi_{3,2} + \zeta\Phi_{2,1} + \zeta\Phi_{2,3} = 0 \quad (\text{II.39})$$

Selon les conditions aux limites de Dirichlet on a :

$$\Phi_{1,2} = \Phi_{ab} \text{ et } \Phi_{2,1} = \Phi_{bc} \quad (\text{II.40})$$

En substituant l'éq. (II.40) dans l'éq. (II.39), on trouve :

$$-2(1 + \zeta)\Phi_{2,2} + \Phi_{3,2} + \zeta\Phi_{2,3} = -(\Phi_{ab} + \zeta\Phi_{bc}) \quad (\text{II.41})$$

▪ **Sous zone 2 : points (i = 2, 2 < j < n<sub>y</sub>-1)**

$$\Phi_{1,j} - 2(1 + \zeta)\Phi_{2,j} + \Phi_{3,j} + \zeta\Phi_{2,j-1} + \zeta\Phi_{2,j+1} = 0 \quad (\text{II.42})$$

On a la figure (II.8) :

$$\Phi_{1,j} = \Phi_{ab} \quad (\text{II.43})$$

On remplace l'éq. (II.43) dans l'éq. (II.42), on obtient :

$$-2(1 + \zeta)\Phi_{2,j} + \Phi_{3,j} + \zeta\Phi_{2,j-1} + \zeta\Phi_{2,j+1} = -\Phi_{ab} \quad (\text{II.44})$$

▪ **Sous zone 3 : point (i = 2, j = n<sub>y</sub>-1)**

$$\Phi_{1,n_y-1} - 2(1 + \zeta)\Phi_{2,n_y-1} + \Phi_{3,n_y-1} + \zeta\Phi_{2,n_y-2} + \zeta\Phi_{2,n_y} = 0 \quad (\text{II.45})$$

D'après les conditions aux limites, on a :

$$\Phi_{1,n_y-1} = \Phi_{ab} \text{ , } \Phi_{2,n_y} = \Phi_{da} \quad (\text{II.46})$$

Le remplacement de l'éq. (II.46) dans l'éq. (II.45) donne :

$$-2(1 + \zeta)\Phi_{2,n_y-1} + \Phi_{3,n_y-1} + \zeta\Phi_{2,n_y-2} = -(\Phi_{ab} + \zeta\Phi_{da}) \quad (\text{II.47})$$

▪ **Sous zone 4 : points ( $2 < i < n_x-1$ ,  $j = 2$ )**

$$\Phi_{i-1,2} - 2(1 + \zeta)\Phi_{i,2} + \Phi_{i+1,2} + \zeta\Phi_{i,1} + \zeta\Phi_{i,3} = 0 \quad (\text{II.48})$$

On a toujours selon les conditions aux limites :

$$\Phi_{i,1} = \Phi_{bc} \quad (\text{II.49})$$

Donc, l'éq. (II.48) devient :

$$\Phi_{i-1,2} - 2(1 + \zeta)\Phi_{i,2} + \Phi_{i+1,2} + \zeta\Phi_{i,3} = -\zeta\Phi_{bc} \quad (\text{II.50})$$

▪ **Sous zone 5 : points ( $2 < i < n_x-1$ ,  $2 < j < n_y-1$ )**

Dans cette zone, les conditions aux limites n'interviennent pas dans les équations algébriques. Autrement dit, la forme des équations algébriques à écrire dans cette zone est celui de l'éq. (II.38), on écrit donc :

$$\Phi_{i-1,j} - 2(1 + \zeta)\Phi_{i,j} + \Phi_{i+1,j} + \zeta\Phi_{i,j-1} + \zeta\Phi_{i,j+1} = 0 \quad (\text{II.51})$$

▪ **Sous zone 6 : points ( $2 < i < n_x-1$ ,  $j = n_y-1$ )**

$$\Phi_{i-1,n_y-1} - 2(1 + \zeta)\Phi_{i,n_y-1} + \Phi_{i+1,n_y-1} + \zeta\Phi_{i,n_y-2} + \zeta\Phi_{i,n_y} = 0 \quad (\text{II.52})$$

Dans cette zone, on a :

$$\Phi_{i,n_y} = \Phi_{da} \quad (\text{II.53})$$

En substituant l'éq. (II.52) dans l'éq. (II.51), cette dernière devient :

$$\Phi_{i-1,n_y-1} - 2(1 + \zeta)\Phi_{i,n_y-1} + \Phi_{i+1,n_y-1} + \zeta\Phi_{i,n_y-2} = -\zeta\Phi_{da} \quad (\text{II.54})$$

▪ **Sous zone 7 : point ( $i = n_x-1$ ,  $j = 2$ )**

$$\Phi_{n_x-2,2} - 2(1 + \zeta)\Phi_{n_x-1,2} + \Phi_{n_x,2} + \zeta\Phi_{n_x-1,1} + \zeta\Phi_{n_x-1,3} = 0 \quad (\text{II.55})$$

Mais d'après les conditions au limites on a pour cette zone :

$$\Phi_{n_x,2} = \Phi_{cd}, \quad \Phi_{n_x-1,1} = \Phi_{bc} \quad (\text{II.56})$$

En basant sur cette dernière équation, et après réarrangement de l'éq. (II.55), on trouve :

$$\Phi_{n_x-2,2} - 2(1 + \zeta)\Phi_{n_x-1,2} + \zeta\Phi_{n_x-1,3} = -(\Phi_{cd} + \zeta\Phi_{bc}) \quad (\text{II.57})$$

▪ **Sous zone 8 : points ( $i = n_x-1, 2 < j < n_y -1$ )**

En remplaçant la valeur des indices ( $i, j$ ) dans l'éq. (II.38), la forme indicelle des équations algébriques, dans la sous zone 8, s'écrivent comme suit :

$$\Phi_{n_x-2,j} - 2(1 + \zeta)\Phi_{n_x-1,j} + \Phi_{n_x,j} + \zeta\Phi_{n_x-1,j-1} + \zeta\Phi_{n_x-1,j+1} = 0 \quad (\text{II.58})$$

Les conditions aux limites exposées dans fig. (II.1) nous permettent de mettre :

$$\Phi_{n_x,j} = \Phi_{cd} \quad (\text{II.59})$$

En remplaçant l'éq. (II.59) dans l'éq. (II.58), on trouve :

$$\Phi_{n_x-2,j} - 2(1 + \zeta)\Phi_{n_x-1,j} + \zeta\Phi_{n_x-1,j-1} + \zeta\Phi_{n_x-1,j+1} = -\Phi_{cd} \quad (\text{II.60})$$

▪ **Sous zone 9 : point ( $i = n_x-1, j = n_y -1$ )**

Pour cette sous zone on a :

$$\Phi_{n_x-2,n_y-1} - 2(1 + \zeta)\Phi_{n_x-1,n_y-1} + \Phi_{n_x,n_y-1} + \zeta\Phi_{n_x-1,n_y-2} + \zeta\Phi_{n_x-1,n_y} = 0 \quad (\text{II.61})$$

On a aussi (voir fig. (II.1)) :

$$\Phi_{n_x-1,n_y} = \Phi_{da}, \text{ et } \Phi_{n_x,n_y-1} = \Phi_{cd} \quad (\text{II.62})$$

En remplaçant l'éq. (II.62) dans l'éq. (II.61), cette dernière devient :

$$\Phi_{n_x-2,n_y-1} - 2(1 + \zeta)\Phi_{n_x-1,n_y-1} + \zeta\Phi_{n_x-1,n_y-2} = -(\Phi_{cd} + \zeta\Phi_{da}) \quad (\text{II.63})$$

Finalement, la détermination des valeurs de  $\Phi$  dans le domaine d'étude  $\Omega$  peut se faire par la résolution, en utilisant les outils de l'analyse numérique, du système d'équations algébriques suivant :



$$\left\{ \begin{array}{l} -2(1+\zeta)\Phi_{2,2} + \Phi_{3,2} + \zeta\Phi_{2,3} = -(\Phi_{ab} + \zeta\Phi_{bc}) \\ -2(1+\zeta)\Phi_{2,j} + \Phi_{3,j} + \zeta\Phi_{2,j-1} + \zeta\Phi_{2,j+1} = -\Phi_{ab} \\ -2(1+\zeta)\Phi_{2,n_y-1} + \Phi_{3,n_y-1} + \zeta\Phi_{2,n_y-2} = -(\Phi_{ab} + \zeta\Phi_{da}) \\ \Phi_{i-1,2} - 2(1+\zeta)\Phi_{i,2} + \Phi_{i+1,2} + \zeta\Phi_{i,3} = -\zeta\Phi_{bc} \\ \Phi_{i-1,j} - 2(1+\zeta)\Phi_{i,j} + \Phi_{i+1,j} + \zeta\Phi_{i,j-1} + \zeta\Phi_{i,j+1} = 0 \\ \Phi_{i-1,n_y-1} - 2(1+\zeta)\Phi_{i,n_y-1} + \Phi_{i+1,n_y-1} + \zeta\Phi_{i,n_y-2} = -\zeta\Phi_{da} \\ \Phi_{n_x-2,2} - 2(1+\zeta)\Phi_{n_x-1,2} + \zeta\Phi_{n_x-1,3} = -(\Phi_{cd} + \zeta\Phi_{bc}) \\ \Phi_{n_x-2,j} - 2(1+\zeta)\Phi_{n_x-1,j} + \zeta\Phi_{n_x-1,j-1} + \zeta\Phi_{n_x-1,j+1} = -\Phi_{cd} \\ \Phi_{n_x-2,n_y-1} - 2(1+\zeta)\Phi_{n_x-1,n_y-1} + \zeta\Phi_{n_x-1,n_y-2} = -(\Phi_{cd} + \zeta\Phi_{da}) \end{array} \right. \quad (\text{II.64})$$

Notez bien que le nombre d'équations à résoudre (ou nombre d'inconnues) est égale à  $(n_x - 2) \cdot (n_y - 2)$  équations.

### II.3.2 Problème aux limites de Neumann (cas bidimensionnel)

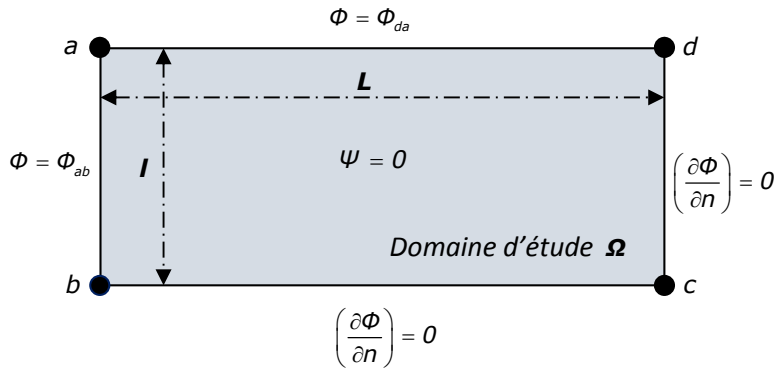


Figure II.9 : Géométrie du domaine d'étude  $\Omega$  associée au problème elliptique de Neumann.

Déterminer la distribution stationnaire de la fonction  $\Phi$  dans le domaine  $\Omega$  donné dans la fig. (II.9). Les données géométriques de  $\Omega$  ainsi que les conditions aux limites sont mentionnées en fig. (II.9).

## II.4 Problèmes paraboliques

### II.4.1 Problème aux limites de Dirichlet

$$\Phi(x=0, t > 0) = \Phi_A \qquad \Phi(x=L, t > 0) = \Phi_B$$



$$\Phi(0 \leq x \leq L, t=0) = \Phi_0$$

Figure II.10 : Barre rectiligne solide avec conditions aux limites et initiale sur  $\Phi$

Dans cette partie on détermine numériquement la distribution spatio-temporelle de  $\Phi$  dans la barre solide schématisée dans la fig. (II.10). On considère  $L$  la longueur de la barre, et  $D$  la durée du phénomène transitoire.

### II.4.1.1 Mise en équation du problème

L'application des conditions spécifiques du problème parabolique cité ci-dessus, à l'équation de conservation générale (éq. (II.30)), vont réduire la forme de cette dernière à l'équation suivante :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Gamma^* \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (\text{II.65})$$

avec :

$$\Gamma^* = \frac{\Gamma}{\rho} = c^{te} \quad (\text{II.66})$$

Les conditions aux limites et initiale indiquées sur la fig. (II.10) peuvent s'écrire comme suit :

#### Condition initiale

$$\Phi = \Phi_0 \quad \text{pour} \quad (x \in [0, L], t = 0) \quad (\text{II.67})$$

#### Condition aux limites

$$\begin{cases} \Phi = \Phi_A & \text{pour} \quad (x = 0, t > 0) \\ \Phi = \Phi_B & \text{pour} \quad (x = L, t > 0) \end{cases} \quad (\text{II.68})$$

### II.4.1.2 Génération du maillage

La construction du maillage dans le domaine spatio-temporel  $\Omega_{LxD}$  consiste à déterminer les pas de discrétisation spatial  $\Delta x$  et temporel  $\Delta t$  dans un domaine bidimensionnel défini par :  $\Omega_{LxD} = [0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq D]$ .

Pour un maillage structuré,  $\Delta x$  et  $\Delta t$  peuvent se déterminer respectivement par :

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{L}{(n_x - 1)} \\ \Delta t = \frac{D}{(n_t - 1)} \end{cases} \quad (\text{II.69})$$

avec  $n_x$  et  $n_t$  désignent respectivement le nombre de nœuds de maillage dans la direction spatiale et temporelle.

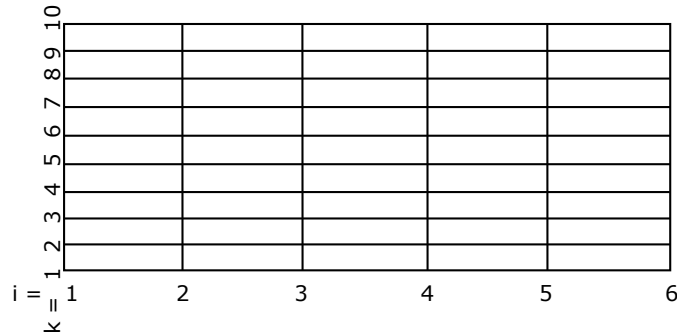


Figure II.11 : Exemple de maillage du domaine spatio-temporel  $\Omega_{LxD}$  ( $n_x = 6$ ,  $n_t = 10$ )

La figure (II.11) représente un exemple de maillage structuré (à pas fixe) dans un domaine spatio-temporel  $\Omega_{LxD}$ . Dans cet exemple on a pris  $n_x = 6$  et  $n_t = 10$ .

### II.4.1.3 Discrétisation numérique

Pour un point donné  $(i, k)$  (représentation indicielle du point  $(x, t)$ ) du domaine d'étude spatio-temporel  $\Omega$ , l'éq. (II.65) s'écrit comme suit :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_i^k = \Gamma^* \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_i^k \quad (\text{II.70})$$

On utilise un schéma décentré aval des différences finis (schéma progressif) pour exprimer la dérivée temporelle au voisinage du point  $(i, k)$ , on écrit donc :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_i^k = \frac{\Phi_i^{k+1} - \Phi_i^k}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (\text{II.71})$$

Il existe plusieurs schémas pour exprimer la dérivée seconde spatiale. Parmi eux on peut citer les plus reconnus : le schéma explicite d'Euler, le schéma implicite d'Euler et le schéma semi-implicite de Crank-Nicolson.

#### II.4.1.3.1 Schéma d'Euler explicite

L'utilisation du schéma d'Euler explicite pour la dérivée seconde de  $\Phi$  par rapport à  $x$  donne :

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_i^k = \frac{\Phi_{i-1}^k - 2\Phi_i^k + \Phi_{i+1}^k}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (\text{II.72})$$

En remplaçant, sans tenir compte les erreurs de troncature, les éqts. (II.71) et (II.72) dans l'éq. (II.70), cette dernière devient :

$$\frac{\Phi_i^{k+1} - \Phi_i^k}{\Delta t} = \Gamma^* \frac{\Phi_{i-1}^k - 2\Phi_i^k + \Phi_{i+1}^k}{\Delta x^2} \quad (\text{II.73})$$

Après réarrangement de l'éq. (II.73) on trouve :

$$\Phi_i^{k+1} = \xi \Phi_{i-1}^k + (1 - 2\xi) \Phi_i^k + \xi \Phi_{i+1}^k \quad (\text{II.74})$$

ici :

$$\xi = \frac{\Delta t \cdot \Gamma^*}{\Delta x^2} \quad (\text{II.75})$$

L'éq. (II.74) désigne la forme discrète de l'éq. (II.65), obtenue par l'application du schéma numérique explicite d'Euler. L'étude de la stabilité et de la convergence de ce schéma indique que la stabilité et la convergent de ce dernier est assurer sauf si  $\xi \leq \frac{1}{2}$ .

Autrement dit, ce schéma est conditionnellement stable.

Noter bien que les valeurs de  $\Phi$  dans  $\Omega$  seront calculées explicitement (*directement*) par la formule (II.74).

#### **II.4.1.3.2 Schéma d'Euler implicite**

L'application du schéma implicite d'Euler à la dérivée deuxième de  $\Phi$  par rapport à  $x$  paru dans l'éq. (II.65), nous permet d'écrire :

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_i^k = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_i^{k+1} = \frac{\Phi_{i-1}^{k+1} - 2\Phi_i^{k+1} + \Phi_{i+1}^{k+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (\text{II.76})$$

En substituant les éqts. (II.71) et (II.76), sans les erreurs de troncature, dans l'éq. (II.70), on écrit :

$$\frac{\Phi_i^{k+1} - \Phi_i^k}{\Delta t} = \Gamma^* \frac{\Phi_{i-1}^{k+1} - 2\Phi_i^{k+1} + \Phi_{i+1}^{k+1}}{\Delta x^2} \quad (\text{II.77})$$

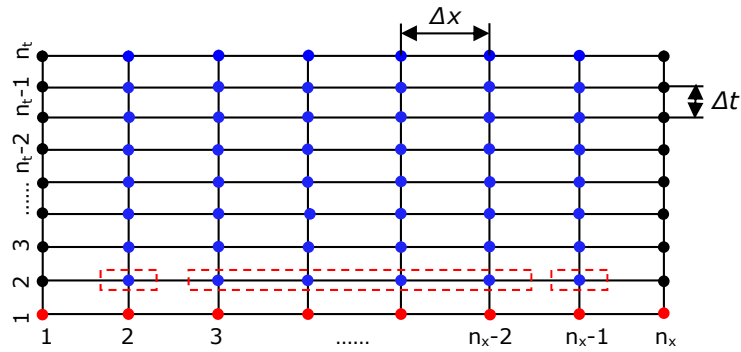
Après réorganisation de l'éq. (II.77), on trouve :

$$\xi \Phi_{i-1}^{k+1} - (1 + 2\xi) \Phi_i^{k+1} + \xi \Phi_{i+1}^{k+1} = -\Phi_i^k \quad (\text{II.78})$$

avec toujours :  $\xi = \frac{\Delta t \cdot \Gamma^*}{\Delta x^2}$

L'équation (II.78) désigne la forme discrète de l'équation parabolique (II.65), obtenu par l'application du schéma implicite d'Euler.

### Système d'équations algébriques



**Figure II.12 :** Exemple de nœuds de maillage sur le domaine d'étude spatio-temporel  $\Omega_{LxD}$ . Nœuds noirs : valeurs de  $\Phi$  sont connues par les conditions aux limites de Dirichlet. Nœuds rouges : valeurs de  $\Phi$  sont connues par la condition initiale. Nœuds bleus : nœuds où on cherche à déterminer les valeurs de  $\Phi$ .

La figure (II.12) représente, pour un cas général, les nœuds de maillage construits sur le domaine d'étude  $\Omega$ . Les nœuds rouges désignent les points où la valeur de  $\Phi$  est donnée par la condition initiale. Sur les nœuds noirs,  $\Phi$  est donnée par les conditions aux limites, et en fin les nœuds bleus sont les points où  $\Phi$  est inconnue et doit être calculée numériquement pour chaque pas du temps  $\Delta t$ .

Pour déterminer les valeurs de  $\Phi$  le long de la barre solide en fonction du temps  $t$ , on doit construire et résoudre, pour chaque pas du temps  $\Delta t$ , un système d'équations algébriques à  $(n_x - 2)$  équations et  $(n_x - 2)$  inconnues. On procède donc comme suit :

- **Système d'équations algébriques pour  $k = 1$  ( $t = \Delta t$ )**
- **Sous zone 1 : point ( $i = 2$ )**

On remplace les valeurs de  $i$  et  $k$  dans l'équation (II.78), on trouve :

$$\xi \Phi_1^2 - (1 + 2\xi) \Phi_2^2 + \xi \Phi_3^2 = -\Phi_2^1 \quad (\text{II.79})$$

D'après les conditions aux limites et initiale, on a :

$$\begin{cases} \Phi_2^1 = \Phi_0 & (CI) \\ \Phi_1^2 = \Phi_A & (CL) \end{cases} \quad (II.80)$$

En substituant l'éq. (II.80) dans l'éq. (II.79), on trouve :

$$-(1 + 2\xi)\Phi_2^2 + \xi\Phi_3^2 = -(\Phi_0 + \xi\Phi_A) \quad (II.81)$$

▪ **Sous zone 2 : points (2 < i < n<sub>x</sub>-1)**

Dans cette zone l'équation algébrique discrète pour les points  $i$  prend la forme suivante :

$$\xi\Phi_{i-1}^2 - (1 + 2\xi)\Phi_i^2 + \xi\Phi_{i+1}^2 = -\Phi_i^1 \quad (II.82)$$

Selon la condition initiale, on a :

$$\Phi_i^1 = \Phi_0 \quad (CI) \quad (II.83)$$

En remplaçant l'éq. (II.83) dans l'éq.(II.82) on trouve :

$$\xi\Phi_{i-1}^2 - (1 + 2\xi)\Phi_i^2 + \xi\Phi_{i+1}^2 = -\Phi_0 \quad (II.84)$$

▪ **Sous zone 3 : point (i = n<sub>x</sub>-1)**

On a dans cette zone :

$$\xi\Phi_{n_x-2}^2 - (1 + 2\xi)\Phi_{n_x-1}^2 + \xi\Phi_{n_x}^2 = -\Phi_{n_x-1}^1 \quad (II.85)$$

On a aussi :

$$\begin{cases} \Phi_{n_x-1}^1 = \Phi_0 & (CI) \\ \Phi_{n_x}^2 = \Phi_B & (CL) \end{cases} \quad (II.86)$$

On remplace l'éq. (II.86) dans l'éq. (II.85), on obtient :

$$\xi\Phi_{n_x-2}^2 - (1 + 2\xi)\Phi_{n_x-1}^2 = -(\Phi_0 + \xi\Phi_B) \quad (II.87)$$

L'éq. (II.87) désigne la forme discrète de l'équation algébrique (II.65) pour le point ( $i = n_x - 1, k = 2$ ). Géométriquement ce point est désigné par ( $x = L - \Delta x, t = \Delta t$ ).

Le système d'équations algébriques à résoudre, pour déterminer les valeurs de  $\Phi$  dans les points ( $2 \leq i \leq n_x - 1, k = 1$ ), peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} -(1+2\xi)\Phi_2^2 + \xi\Phi_3^2 = -(\Phi_0 + \xi\Phi_A) & \text{pour } (i=2) \\ \xi\Phi_{i-1}^2 - (1+2\xi)\Phi_i^2 + \xi\Phi_{i+1}^2 = -\Phi_0 & \text{pour } (2 < i < n_x - 1) \\ \xi\Phi_{n_x-2}^2 - (1+2\xi)\Phi_{n_x-1}^2 = -(\Phi_0 + \xi\Phi_B) & \text{pour } (i=n_x - 1) \end{cases} \quad (\text{II.88})$$

Pour déterminer les valeurs de  $\Phi$  dans le reste du domaine d'étude ( $i = 2$  à  $n_x - 1$ ,  $k = 3$  à  $n_t$ ), on refait le même travail qu'on a effectué pour les points ( $i = 2$  à  $n_x - 1$ ,  $k = 1$ ). C'est-à-dire, on résout pour chaque pas de temps  $\Delta t$  un système d'équations algébriques déterminé, de  $(n_x - 2)$  équations à  $(n_x - 2)$  inconnues.

L'étude de la stabilité et de la convergence du schéma d'Euler implicite, confirme que ce dernier est inconditionnellement stable. Autrement dit, il est convergent est stable quelque soit la valeur de  $\Delta x$  et  $\Delta t$ . N'oublier pas que la rapidité et la précision de la méthode reste toujours fonction du bon choix de  $\Delta x$  et  $\Delta t$ .

#### II.4.1.3.3 Schéma semi-implicite de Crank-Nicholson

La seule différence entre les trois schémas numériques, utilisés pour le problème parabolique, est la manière de l'évaluation de la dérivée seconde spatiale de  $\Phi$  à l'instant  $t$ . Pour le schéma explicite d'Euler, la dérivée seconde spatiale de  $\Phi$  à  $t$  est évaluée par un schéma centré des différences finis au même instant. Pour le schéma implicite d'Euler, cette dérivée est évaluée par un schéma centré des différences finis à l'instant  $t + \Delta t$ . Finalement, le schéma semi-implicite considère que cette dérivée est égale à la moyenne entre la dérivée seconde spatiale de  $\Phi$  à  $t + \Delta t$  et celle de  $\Phi$  à  $t$ , en utilisant bien sûr un schéma centré des différences finis pour calculer ces deux dernières.

L'application du schéma semi-implicite à la dérivée seconde spatiale de  $\Phi$  donne :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_i^k &= \frac{1}{2} \left( \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_i^k + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_i^{k+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi_{i-1}^k - 2\Phi_i^k + \Phi_{i+1}^k}{\Delta x^2} + \frac{\Phi_{i-1}^{k+1} - 2\Phi_i^{k+1} + \Phi_{i+1}^{k+1}}{\Delta x^2} \right) + O(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (\text{II.89})$$

En remplaçant, sans tenir compte les erreurs de troncature ( $O(\Delta x^2)$  et  $O(\Delta t)$ ), les éqts. (II.71) et (II.89) dans l'éq. (II.70), on trouve :

$$\frac{\Phi_i^{k+1} - \Phi_i^k}{\Delta t} = \frac{\Gamma^*}{2} \left( \frac{\Phi_{i-1}^k - 2\Phi_i^k + \Phi_{i+1}^k}{\Delta x^2} + \frac{\Phi_{i-1}^{k+1} - 2\Phi_i^{k+1} + \Phi_{i+1}^{k+1}}{\Delta x^2} \right) \quad (\text{II.90})$$

Après réarrangement de l'éq. (II.90) on trouve :

$$\xi\Phi_{i-1}^{k+1} - 2(1 + \xi)\Phi_i^{k+1} + \xi\Phi_{i+1}^{k+1} = -\xi\Phi_{i-1}^k - 2(1 - \xi)\Phi_i^k - \xi\Phi_{i+1}^k \quad (\text{II.91})$$

avec :

$$\xi = \frac{\Delta t \cdot \Gamma^*}{\Delta x^2} \quad (\text{II.92})$$

L'équation (II.91) est la forme algébrique discrète, obtenue par l'application du schéma semi-implicite de Crank-Nicholson à l'équation (II.70).

### **Système d'équations algébriques**

Dans cette partie on montre la méthode de calcul des valeurs de l'inconnues  $\Phi$ , en basant sur l'éq. (II.91), dans le domaine spatio-temporel  $\Omega$  pendant un pas de temps  $\Delta t$  de la période transitoire  $D$ .

- **Système d'équations algébriques pour  $k = 1$  ( $t = \Delta t$ )**
- **Sous zone 1 : point ( $i = 2$ )**

Dans cette sous zone l'éq. (II.91) prend la forme :

$$\xi\Phi_1^2 - 2(1 + \xi)\Phi_2^2 + \xi\Phi_3^2 = -\xi\Phi_1^1 - 2(1 - \xi)\Phi_2^1 - \xi\Phi_3^1 \quad (\text{II.93})$$

D'après les conditions aux limites et initiales, citées dans la fig. (II.10), on a :

$$\begin{cases} \Phi_1^2 = \Phi_A \\ \Phi_{i=1:n_x}^1 = \Phi_0 \end{cases} \quad (\text{II.94})$$

En substituant l'éq. (II.94) dans l'éq. (II.93), on trouve :

$$-2(1 + \xi)\Phi_2^2 + \xi\Phi_3^2 = -(\xi\Phi_A + 2\Phi_0) \quad (\text{II.95})$$

- **Sous zone 2 : points ( $2 < i < n_x - 1$ )**

On remplace les valeurs de  $i$  et  $k$  dans l'éq. (II.91), on écrit :

$$\xi\Phi_{i-1}^2 - 2(1 + \xi)\Phi_i^2 + \xi\Phi_{i+1}^2 = -\xi\Phi_{i-1}^1 - 2(1 - \xi)\Phi_i^1 - \xi\Phi_{i+1}^1 \quad (\text{II.96})$$

En substituant l'éq. (II.94) dans l'éq. (II.96), on obtient :

$$\xi\Phi_{i-1}^2 - 2(1 + \xi)\Phi_i^2 + \xi\Phi_{i+1}^2 = -2\Phi_0 \quad (\text{II.97})$$



avec :  $2 < i < n_x - 1$ .

▪ **Sous zone 3 : point (i = n<sub>x</sub>-1)**

Pour cette sous zone l'éq. (II.91) devient :

$$\xi \Phi_{n_x-2}^2 - 2(1 + \xi) \Phi_{n_x-1}^2 + \xi \Phi_{n_x}^2 = -\xi \Phi_{n_x-2}^1 - 2(1 - \xi) \Phi_{n_x-1}^1 - \xi \Phi_{n_x}^1 \quad (\text{II.98})$$

L'application des conditions aux limites et initiale, citées dans la fig. (II.10), à l'éq. (II.98), nous permet de rendre cette dernière sous la forme :

$$\xi \Phi_{n_x-2}^2 - 2(1 + \xi) \Phi_{n_x-1}^2 = -(\xi \Phi_B + 2\Phi_0) \quad (\text{II.99})$$

La solution du problème hyperbolique cité dans cette partie par la méthode de Crank-Nicholson, consiste à résoudre le système d'équations algébriques à  $(n_x - 2)$  équations et  $(n_x - 2)$  inconnues d'écrit par les éqts. (II.95), (II.97) et (II.99), pour chaque pas de temps  $\Delta t$  de l'intervalle temporel  $D$ . Ce système d'équations peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} -2(1 + \xi) \Phi_2^2 + \xi \Phi_3^2 = -(\xi \Phi_A + 2\Phi_0) & \text{pour } (i = 2) \\ \xi \Phi_{i-1}^2 - 2(1 + \xi) \Phi_i^2 + \xi \Phi_{i+1}^2 = -2\Phi_0 & \text{pour } (2 < i < n_x - 1) \\ \xi \Phi_{n_x-2}^2 - 2(1 + \xi) \Phi_{n_x-1}^2 = -(\xi \Phi_B + \Phi_0) & \text{pour } (i = n_x - 1) \end{cases} \quad (\text{II.100})$$

Le schéma semi-implicite de Crank-Nicholson est inconditionnellement stable. C'est-à-dire, il est stable et convergent quelque soit la valeur de  $\xi$ .

## II.4.2 Problème aux limites de Neumann

$$\underbrace{\Phi(x = 0, t > 0) = \Phi_A \qquad \qquad \qquad \nabla \Phi \cdot \vec{n} \Big|_{(x=L, t>0)} = \beta (\Phi_{n_x} - \Phi_\infty)}_{\Phi(0 \leq x \leq L, t = 0) = \Phi_0}$$

**Figure II.13** : Géométrie du domaine d'étude associé au problème aux limites de Neumann (Problème parabolique)

Déterminer, en utilisant la méthode des différences finis, les valeurs de la quantité spécifique  $\Phi$  le long de la barre rectiligne schématisée en fig. (II.13). Les conditions aux limites et initiale sont indiquées sur cette dernière (*utiliser les trois méthodes citées auparavant*).

## II.5 Problèmes hyperboliques

Résoudre, dans le domaine  $\Omega$  schématisé ci-dessous, et par la méthode des différences finis, le problème hyperbolique gouverné par l'équation aux dérivées partiales suivante :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \Sigma^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \quad (\text{II.101})$$

dont, cette dernière satisfait les conditions initiales subséquentes :

$$\begin{cases} \Phi(0 \leq x \leq L, t = 0) = \alpha_1(x) \\ \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{(0 \leq x \leq L, t=0)} = \alpha_2(x) \end{cases} \quad (\text{II.102})$$

et les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \Phi(x = 0, t > 0) = \beta_1(t) \\ \Phi(x = L, t > 0) = \beta_2(t) \end{cases} \quad (\text{II.103})$$

$$\begin{array}{ccc} \Phi(x = 0, t > 0) = \beta_1(t) & & \Phi(x = L, t > 0) = \beta_2(t) \\ \hline \underbrace{\hspace{15em}} & & \\ \Phi(0 \leq x \leq L, t = 0) = \alpha_1(x) & \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{(0 \leq x \leq L, t=0)} = \alpha_2(x) & \end{array}$$

**Figure II.14** : Géométrie du domaine d'étude et conditions aux limites et initiales associées au problème hyperbolique

### II.5.1 Mise en équation du problème

Afin d'éviter la réécriture des équations, la mise en équation du problème hyperbolique est déjà fait dans l'énoncé du problème. Donc, l'équation gouvernant le problème hyperbolique à résoudre, ainsi que les conditions aux limites et initiales associées, sont indiquées dans les éqts. (II.101), (II.102) et (II.103).

## II.5.2 Génération du maillage

On suit les mêmes étapes déjà indiquées dans le paragraphe (*Chap. II, § 4.1.2, voir aussi fig. (II.11)*).

## II.5.3 Discrétisation numérique

Dans cette partie on écrit pour chaque point de maillage du domaine spatio-temporel  $\Omega$  une équation. Pour un point arbitraire  $(i, k)$  dans  $\Omega$ , l'équation (II.101) s'écrit :

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right)_i^k = \Sigma^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_i^k \quad (\text{II.104})$$

La transformation de l'écriture algébrique des opérateurs différentiels, parus dans l'équation (II.104), sera réalisée par deux méthodes. Ces dernières sont respectivement la méthode explicite et la méthode implicite d'Euler.

### II.5.3.1 Méthode explicite d'Euler

En utilisant, pour les dérivées secondes spatiale et temporelle, des schémas centrés de différences finis. On écrit donc :

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right)_i^k = \frac{\Phi_i^{k-1} - 2\Phi_i^k + \Phi_i^{k+1}}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2) \quad (\text{II.105})$$

et

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_i^k = \frac{\Phi_{i-1}^k - 2\Phi_i^k + \Phi_{i+1}^k}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (\text{II.106})$$

En substituant, sans tenir compte les erreurs de troncature  $(O(\Delta t^2), O(\Delta x^2))$ , les éqts. (II.105) et (II.106) dans l'éq. (II.104), on écrit :

$$\frac{\Phi_i^{k-1} - 2\Phi_i^k + \Phi_i^{k+1}}{\Delta t^2} = \Sigma^2 \frac{\Phi_{i-1}^k - 2\Phi_i^k + \Phi_{i+1}^k}{\Delta x^2} \quad (\text{II.107})$$

On met  $\xi = \frac{\Delta t \cdot \Sigma}{\Delta x}$ , et on réorganise l'équation (II.107), on obtient :

$$\Phi_i^{k+1} = \xi^2 \Phi_{i-1}^k + 2(1 - \xi^2) \Phi_i^k + \xi^2 \Phi_{i+1}^k - \Phi_i^{k-1} \quad (\text{II.108})$$

Cette dernière équation désigne la forme algébrique discrète de l'équation (II.101), obtenue par l'application de la méthode explicite d'Euler sur un point arbitraire du maillage (voir fig. (II.12)).

### II.5.3.1.1 Détermination des valeurs de $\Phi$ sur $\Omega$ à $t = \Delta t$

Pour  $t = \Delta t$  ( $k = 1$ ) l'éq. (II.108) devient :

$$\Phi_i^2 = \xi^2 \Phi_{i-1}^1 + 2(1 - \xi^2) \Phi_i^1 + \xi^2 \Phi_{i+1}^1 - \Phi_i^0 \quad (\text{II.109})$$

On sait bien que :

$$\Phi_i^1 = \alpha_{1,i=1:n_x} \quad (\text{CI}) \quad (\text{II.110})$$

On remarque dans l'éq. (II.109) la valeur de  $\Phi_i^0$  est inconnue. Cette dernière peut être déterminée par l'utilisation de la deuxième condition initiale.

D'après l'éq. (II.102) on a :

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{i=1:n_x}^1 = \alpha_{2,i} \quad (\text{CI}) \quad (\text{II.111})$$

On applique un schéma centré de différences finis à l'éq. (II.111), on écrit donc :

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{i=1:n_x}^1 = \frac{\Phi_i^2 - \Phi_i^0}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (\text{II.112})$$

En négligeant l'erreur de troncature, et en substituant l'éq. (II.112) dans l'éq. (II.111), on trouve :

$$\Phi_i^0 = \Phi_i^2 - 2\Delta t \alpha_{2,i} \quad (\text{II.113})$$

En remplaçant les éqts. (II.110) et (II.113) dans l'éq. (II.109), on obtient :

$$\Phi_i^2 = \frac{\xi^2}{2} \alpha_{1,i-1} + (1 - \xi^2) \alpha_{1,i} + \frac{\xi^2}{2} \alpha_{1,i+1} + \Delta t \alpha_{2,i} \quad (\text{II.114})$$

L'éq. (II.114) nous permet de calculer les valeurs de  $\Phi$  pour  $0 < x < L$  et  $t = \Delta t$ . Pour  $t > \Delta t$  on utilise l'éq. (II.108) avec les conditions aux limites (II.103).

L'étude de la stabilité et de la convergence du schéma explicite montre que la solution obtenue par ce dernier est stable et convergente si et seulement si  $\xi \leq 1$ .

### II.5.3.2 Méthode implicite d'Euler

On ce qui concerne cette méthode, la dérivée seconde temporelle est toujours évaluée par l'équation (II.105), par contre la dérivée seconde spatiale devra évaluer comme suit :

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_i^k = \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi_{i-1}^{k-1} - 2\Phi_i^{k-1} + \Phi_{i+1}^{k-1}}{\Delta x^2} + \frac{\Phi_{i-1}^{k+1} - 2\Phi_i^{k+1} + \Phi_{i+1}^{k+1}}{\Delta x^2} \right) + O(\Delta x^2) \quad (\text{II.115})$$

On omet les erreurs de troncature, et on remplace les éqts. (II.105) et (II.115) dans l'éq. (II.104). on écrit donc :

$$\frac{\Phi_i^{k-1} - 2\Phi_i^k + \Phi_i^{k+1}}{\Delta t^2} = \frac{\Sigma^2}{2} \left( \frac{\Phi_{i-1}^{k-1} - 2\Phi_i^{k-1} + \Phi_{i+1}^{k-1}}{\Delta x^2} + \frac{\Phi_{i-1}^{k+1} - 2\Phi_i^{k+1} + \Phi_{i+1}^{k+1}}{\Delta x^2} \right) \quad (\text{II.116})$$

En réorganisant l'éq. (II.116) on trouve :

$$\xi^2 \Phi_{i-1}^{k+1} - 2(1 + \xi^2) \Phi_i^{k+1} + \xi^2 \Phi_{i+1}^{k+1} = -\xi^2 \Phi_{i-1}^{k-1} + 2(1 + \xi^2) \Phi_i^{k-1} - \xi^2 \Phi_{i+1}^{k-1} - 4\Phi_i^k \quad (\text{II.117})$$

Ici on a  $\xi = \frac{\Delta t \cdot \Sigma}{\Delta x}$ .

L'éq. (II.117) nous permet de calculer les valeurs de la quantité spécifique  $\Phi$  dans tous le domaine d'étude  $\Omega$  le long de la période transitoire  $D$ .

#### II.5.3.2.1 Détermination des valeurs de $\Phi$ sur $\Omega$ à $t = \Delta t$

A cet instant l'équation (II.117) prend la forme :

$$\xi^2 \Phi_{i-1}^2 - 2(1 + \xi^2) \Phi_i^2 + \xi^2 \Phi_{i+1}^2 = -\xi^2 \Phi_{i-1}^0 + 2(1 + \xi^2) \Phi_i^0 - \xi^2 \Phi_{i+1}^0 - 4\Phi_i^1 \quad (\text{II.118})$$

En substituant les éqts. (II.110) et (II.113) dans l'éq. (II.118), on obtient :

$$\begin{aligned} \xi^2 \Phi_{i-1}^2 - 2(1 + \xi^2) \Phi_i^2 + \xi^2 \Phi_{i+1}^2 = \\ \Delta t \xi^2 \alpha_{2,i-1} - 2\Delta t (1 + \xi^2) \alpha_{2,i} + \Delta t \xi^2 \alpha_{2,i+1} - 2\alpha_{1,i} \end{aligned} \quad (\text{II.119})$$

#### ▪ Sous zone 1 : point (i = 2)

On remplace la valeur de  $i$  dans l'éq. (II.119), on obtient :

$$\begin{aligned} \xi^2 \Phi_1^2 - 2(1 + \xi^2) \Phi_2^2 + \xi^2 \Phi_3^2 = \\ \Delta t \xi^2 \alpha_{2,1} - 2\Delta t (1 + \xi^2) \alpha_{2,2} + \Delta t \xi^2 \alpha_{2,3} - 2\alpha_{1,2} \end{aligned} \quad (\text{II.120})$$

Mais on a d'après l'éq. (II.103) (*condition aux limites en amont du domaine  $\Omega$* ) :

$$\Phi_1^2 = \beta_1^2 \quad (\text{II.121})$$

On remplace cette dernière équation dans l'éq. (II.120), on obtient :

$$\begin{aligned} -2(1 + \xi^2) \Phi_2^2 + \xi^2 \Phi_3^2 = \\ \Delta t \xi^2 \alpha_{2,1} - 2\Delta t (1 + \xi^2) \alpha_{2,2} + \Delta t \xi^2 \alpha_{2,3} - 2\alpha_{1,2} - \xi^2 \beta_1^2 \end{aligned} \quad (\text{II.122})$$

▪ **Sous zone 2 : point ( $2 < i < n_x - 1$ )**

Les points concernant cette zone restent gouvernés par l'éq. (II.119).

▪ **Sous zone 3 : point ( $i = n_x - 1$ )**

Ici l'éq. (II.119) prend la forme :

$$\begin{aligned} \xi^2 \Phi_{n_x-2}^2 - 2(1 + \xi^2) \Phi_{n_x-1}^2 + \xi^2 \Phi_{n_x}^2 = \\ \Delta t \xi^2 \alpha_{2,n_x-2} - 2\Delta t (1 + \xi^2) \alpha_{2,n_x-1} + \Delta t \xi^2 \alpha_{2,n_x} - 2\alpha_{1,n_x-1} \end{aligned} \quad (\text{II.123})$$

L'éq. (II.103) indique que (*condition aux limites de Dirichlet en aval du  $\Omega$* ) :

$$\Phi_{n_x}^2 = \beta_{n_x}^2 \quad (\text{II.124})$$

En substituant l'éq. (II.124) dans l'éq. (II.123), on arrive à :

$$\begin{aligned} \xi^2 \Phi_{n_x-2}^2 - 2(1 + \xi^2) \Phi_{n_x-1}^2 = \\ \Delta t \xi^2 \alpha_{2,n_x-2} - 2\Delta t (1 + \xi^2) \alpha_{2,n_x-1} + \Delta t \xi^2 \alpha_{2,n_x} - 2\alpha_{1,n_x-1} - \xi^2 \beta_{n_x}^2 \end{aligned} \quad (\text{II.125})$$

La détermination des valeurs de  $\Phi$  dans  $\Omega$  pour  $t = \Delta t$  nécessite la résolution, en utilisant les techniques de l'analyse numérique, du système d'équations algébriques suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -2(1 + \xi^2)\Phi_2^2 + \xi^2\Phi_3^2 = \\ \Delta t \xi^2 \alpha_{2,1} - 2\Delta t(1 + \xi^2)\alpha_{2,2} + \Delta t \xi^2 \alpha_{2,3} - 2\alpha_{1,2} - \xi^2 \beta_1^2 \quad \text{pour } (i = 2) \\ \xi^2 \Phi_{i-1}^2 - 2(1 + \xi^2)\Phi_i^2 + \xi^2 \Phi_{i+1}^2 = \\ \Delta t \xi^2 \alpha_{2,i-1} - 2\Delta t(1 + \xi^2)\alpha_{2,i} + \Delta t \xi^2 \alpha_{2,i+1} - 2\alpha_{1,i} \quad \text{pour } (2 < i < n_x - 1) \\ \xi^2 \Phi_{n_x-2}^2 - 2(1 + \xi^2)\Phi_{n_x-1}^2 = \\ \Delta t \xi^2 \alpha_{2,n_x-2} - 2\Delta t(1 + \xi^2)\alpha_{2,n_x-1} + \Delta t \xi^2 \alpha_{2,n_x} - \\ 2\alpha_{1,n_x-1} - \xi^2 \beta_{n_x}^2 \quad \text{pour } (i = n_x - 1) \end{array} \right. \quad (\text{II.126})$$

Pour  $t \succ \Delta t$  on refaire le même travail. C'est-à-dire, pour chaque temps  $t$  de l'intervalle transitoire  $D$ , on résout un système d'équations comportant  $(n_x - 2)$  équations et  $(n_x - 2)$  inconnues.

La méthode implicite pour les problèmes hyperbolique est inconditionnellement stable.

## **CHAPITRE III**

### **Méthode des volumes finis pour la résolution des problèmes de transport**



## III.1 Introduction

La simulation numérique des phénomènes physiques, notamment les phénomènes de transport de masse et de quantité de mouvement, par la méthode des volumes finis, peut constituer une véritable expérience numérique. Lorsque la méthode est appliquée avec soin, cette technique permet d'obtenir de façon plus précise les quantités physiques liées aux phénomènes étudiés (*champ de vitesse, température, concentration, ...etc.*).

La méthode des volumes finis est une technique numérique qui nous permet de résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles de type elliptique, parabolique et hyperbolique. Dans cette méthode on divise le domaine d'étude en sous domaine dite volumes finis, où sera effectuée l'intégration de(s) l'équation(s) différentielle(s) à résoudre. L'ensemble des équations intégrées ainsi obtenues, constitue donc le système d'équations algébriques qu'on doit résoudre, en utilisant les techniques de l'analyse numérique, pour déterminer les inconnues du problème.

## III.2 Problèmes de diffusion stationnaire

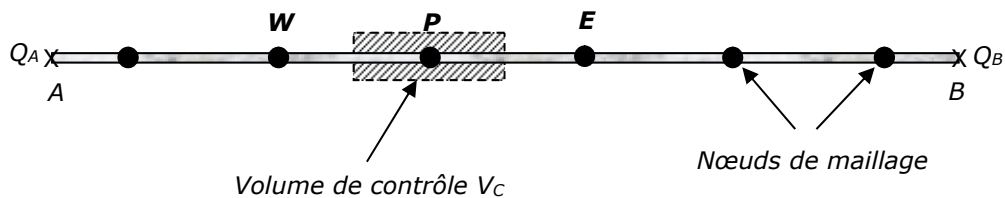
### III.2.1 Diffusion stationnaire unidimensionnelle

Dans le cas général, le problème de diffusion unidimensionnel de la quantité physique  $\phi$  est gouverné par l'équation aux dérivées partiales suivantes (*voir chap. I, éq. (I.13)*) :

$$\frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + \psi = 0 \quad (\text{III.1})$$

Dans l'éq. (II.1)  $\Gamma$  désigne le coefficient de diffusion et  $\psi$  le terme source.

Dans ce qui suit, on résout cette dernière équation dans le domaine unidimensionnel  $\Omega$ , avec les conditions aux limites comme indiqué dans la figure III.1.



**Figure III.1** : Domaine d'étude  $\Omega$  de la diffusion stationnaire unidimensionnelle de la quantité physique  $\phi$

Le calcul numérique de la quantité  $\phi$  au sein du domaine  $\Omega$  se fait comme suit :

### III.2.1.1 Formulation mathématique

Le phénomène de diffusion stationnaire unidimensionnelle, au sein du  $\Omega$ , peut se traduire mathématiquement par l'équation gouvernante (III.1) et les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \Phi(x=0) = \Phi_A \\ \Phi(x=L) = \Phi_B \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Cette dernière équation est nécessaire pour résoudre numériquement l'éq. (III.1).

### III.2.1.2 Construction du maillage

La deuxième démarche de la résolution numérique est la construction du maillage (*dans ce cours on travaille avec les maillages à pas fixe*). Autrement dit, la division du domaine d'étude  $\Omega$  en sous-domaines dites volumes finis, ou volumes de contrôle  $V_c$  (voir Fig. III.1). Chaque nœud de maillage représente un point pivot du volume de contrôle associé à ce point. C'est-à-dire les limites amont et aval d'un volume de contrôle sont placés aux milieux des nœuds adjacents amont et aval respectivement et le point pivot.

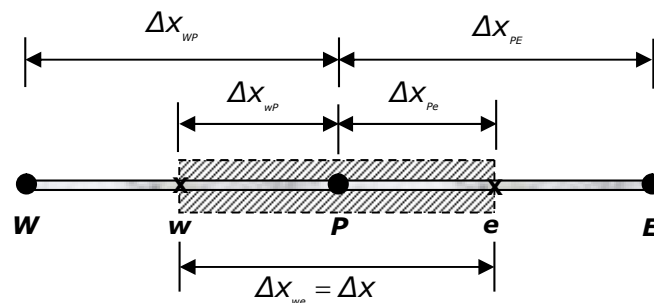


Figure III.2 : Caractéristiques géométriques d'un volume de contrôle arbitraire

La figure (III.1) représente un volume de contrôle arbitraire, dont ces caractéristiques géométriques sont :

$P$  : nœud pivot du volume de contrôle  $V_c$  ;

$W, E$  : nœuds adjacents Ouest et Est respectivement par rapport au point pivot  $P$  ;

$w, e$  : faces Ouest et Est du volume de contrôle  $V_c$  respectivement ;

$\Delta x_{WP}$  : distance entre les nœuds  $W$  et  $P$  ;

$\Delta x_{PE}$  : distance entre les nœuds  $P$  et  $E$  ;

$\Delta x_{wP}$  : distance entre la face Ouest du  $V_c$  et le point pivot  $P$  ;

$\Delta x_{Pe}$  : distance entre la face Est du  $V_c$  et le point pivot  $P$  ;

$\Delta x = \Delta x_{we}$  : la taille du volume de contrôle  $V_c$  .

### III.2.1.3 Discrétisation de l'équation gouvernante

La discrétisation de l'équation gouvernante consiste à intégrer l'éq. (III.1) sur le volume de contrôle  $V_c$ , on écrit donc :

$$\int_{V_c} \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right) dV + \int_{V_c} \psi dV = 0 \quad (\text{III.3})$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_{V_c} \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right) dV &= \int_{A_e} \left[ \Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right]_e dA \\ &= \int_{A_e} \Gamma \frac{d\Phi}{dx} dA - \int_{A_w} \Gamma \frac{d\Phi}{dx} dA \\ &= \left( \Gamma \frac{d\Phi}{dx} A \right)_e - \left( \Gamma \frac{d\Phi}{dx} A \right)_w \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

On a aussi :

$$\int_{V_c} \psi dV = \bar{\psi} V_c \quad (\text{III.5})$$

En substituant les éqs. (III.4) et (III.5) dans l'éq. (III.3), on trouve :

$$\left( \Gamma \frac{d\Phi}{dx} A \right)_e - \left( \Gamma \frac{d\Phi}{dx} A \right)_w + \bar{\psi} V_c = 0 \quad (\text{III.6})$$

Dans cette dernière équation on a :

$A$  : désigne la surface d'une facette arbitraire du volume de contrôle ;

$V_c$  : la taille du volume ;

$\bar{\psi}$  : valeur moyenne du flux de  $\Phi$  par unité de volume.

Physiquement l'éq. (II.6) peut s'interpréter comme suit :

Le flux diffusif sortant de la face Est du  $V_C$  moins le flux diffusif entrant de la face  
Ouest du  $V_C$  égale à la génération de  $\Phi$  dans  $V_C$

Ce qui signifie que l'éq. (II.6) représente une équation de bilan pour la quantité  $\Phi$  dans  $V_C$ .

Dans ce qui suit on détermine, en utilisant des schémas centrés de type différences finis, les termes des flux diffusifs de l'éq. (III.6) (*flux diffusifs dans les faces Ouest et Est du volume de contrôle  $V_C$* ), on écrit donc :

$$\left( \Gamma \frac{d\Phi}{dx} A \right)_e = \Gamma_e A_e \left( \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) \quad (III.7)$$

$$\left( \Gamma \frac{d\Phi}{dx} A \right)_w = \Gamma_w A_w \left( \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) \quad (III.8)$$

On peut mettre aussi, en utilisant des schémas des différences finis centrés :

$$\begin{cases} \Gamma_w = \frac{\Gamma_w + \Gamma_P}{2} \\ \Gamma_e = \frac{\Gamma_P + \Gamma_E}{2} \end{cases} \quad (III.9)$$

On remplace les éqs. (III.7) et (III.8) dans l'éq. (III.6), on écrit :

$$\Gamma_e A_e \left( \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left( \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) + \bar{\psi} V_C = 0 \quad (III.10)$$

On réarrange l'éq. (III.10), on trouve :

$$\left( \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{WP}} \right) \Phi_P = \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}} \Phi_E + \frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{WP}} \Phi_W + \bar{\psi} V_C \quad (III.11)$$

ou bien :

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + \bar{\psi} V_C$$

(III.12)

avec :

$a_W$	$a_E$	$a_P$	$\bar{\psi} V_C$
-------	-------	-------	------------------

$\frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}}$	$a_w + a_e$	$\psi_u + \psi_p \phi_p$
--------------------------------------	--------------------------------------	-------------	--------------------------

L'éq. (III.12) représente la forme discrète de l'équation gouvernante (III.1) sur le volume de contrôle  $V_c$ .

### III.2.1.4 Système d'équations algébriques discrètes

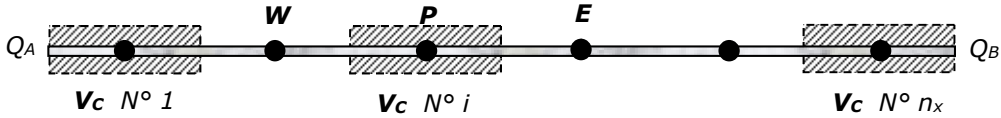


Figure III.3 : Exemple de maillage à pas fixe dans le domaine unidimensionnel  $\Omega$

Pour l'écriture des équations algébriques on adopte le maillage indiqué en figure (III.3).

#### Volume de contrôle N° 1

Dans ce volume de contrôle on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} A \right)_w = \Gamma_w A_w \left( \frac{\phi_w - \phi_p}{\Delta x_{WP}} \right) = \Gamma_A A_A \left( \frac{\phi_A - \phi_1}{\frac{\Delta x}{2}} \right) \\ \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} A \right)_e = \Gamma_e A_e \left( \frac{\phi_E - \phi_p}{\Delta x_{PE}} \right) = \Gamma_{e_1} A_{e_1} \left( \frac{\phi_2 - \phi_1}{\Delta x} \right) \end{array} \right. \quad (III.13)$$

En substituant l'éq. (III.13) dans l'éq. (III.6), on trouve :

$$\Gamma_{e_1} A_{e_1} \left( \frac{\phi_2 - \phi_1}{\Delta x} \right) - 2\Gamma_A A_A \left( \frac{\phi_A - \phi_1}{\Delta x} \right) + \bar{\psi} V_{c_1} = 0 \quad (III.14)$$

En réorganisant l'éq. (III.14), on obtient :

$$\left[ \frac{\Gamma_{e_1} A_{e_1}}{\Delta x} + \frac{2\Gamma_A A_A}{\Delta x} \right] \phi_1 - \frac{\Gamma_{e_1} A_{e_1}}{\Delta x} \phi_2 = \frac{2\Gamma_A A_A}{\Delta x} \phi_A + \bar{\psi} V_{c_1} \quad (III.15)$$

L'éq. (III.15) représente l'équation algébrique discrète, gouvernant la diffusion unidimensionnelle de la quantité  $\phi$  dans le volume de contrôle 1, avec la présence du terme source  $\psi$ .

#### Volumes de contrôle de 2 à $n_x - 1$

Les équations algébriques discrètes associées aux volumes de contrôle N° 2 au  $n_x - 1$  successivement, peuvent être données par l'éq. (III.6). on écrit donc :

$$-\frac{\Gamma_{w_i} A_{w_i}}{\Delta x} \Phi_{w_i} + \left[ \frac{\Gamma_{w_i} A_{w_i}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{e_i} A_{e_i}}{\Delta x} \right] \Phi_{p_i} - \frac{\Gamma_{e_i} A_{e_i}}{\Delta x} \Phi_{e_i} = \bar{\psi} V_{C_i} \quad (\text{III.16})$$

avec  $i$  représente le numéro du volume de contrôle en question.

### Volume de contrôle N° $n_x$

Dans ce volume de contrôle on peut écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \Gamma \frac{d\Phi}{dx} A \right)_{w_{n_x}} &= \Gamma_{w_{n_x}} A_{w_{n_x}} \left( \frac{\Phi_{p_{n_x}} - \Phi_{w_{n_x}}}{\Delta x_{w_{n_x} p_{n_x}}} \right) = \Gamma_{w_{n_x}} A_{w_{n_x}} \left( \frac{\Phi_{n_x} - \Phi_{n_x-1}}{\Delta x} \right) \\ \left( \Gamma \frac{d\Phi}{dx} A \right)_{e_{n_x}} &= \Gamma_{e_{n_x}} A_{e_{n_x}} \left( \frac{\Phi_{e_{n_x}} - \Phi_{p_{n_x}}}{\Delta x_{p_{n_x} e_{n_x}}} \right) = \Gamma_B A_B \left( \frac{\Phi_B - \Phi_{n_x}}{2} \right) \end{aligned} \right. \quad (\text{III.17})$$

En remplaçant l'éq. (III.17) dans l'éq. (III.6), on obtient :

$$2\Gamma_B A_B \left( \frac{\Phi_B - \Phi_{p_{n_x}}}{\Delta x} \right) - \Gamma_{w_{n_x}} A_{w_{n_x}} \left( \frac{\Phi_{p_{n_x}} - \Phi_{w_{n_x}}}{\Delta x} \right) + \bar{\psi} V_{C_{n_x}} = 0 \quad (\text{III.18})$$

Après réorganisation de l'éq. (III.18), on obtient :

$$-\frac{\Gamma_{w_{n_x}} A_{w_{n_x}}}{\Delta x} \Phi_{n_x-1} + \left[ \frac{\Gamma_{w_{n_x}} A_{w_{n_x}}}{\Delta x} + \frac{2\Gamma_B A_B}{\Delta x} \right] \Phi_{n_x} = \frac{2\Gamma_B A_B}{\Delta x} \Phi_B + \bar{\psi} V_{C_{n_x}} \quad (\text{III.19})$$

Cette dernière équation représente la forme algébrique discrète de l'éq. (III.6) écrite pour le volume de contrôle  $n_x$ .

La détermination des valeurs de  $\Phi$  au sein du domaine unidimensionnel  $\Omega$  nécessite la résolution, en utilisant les outils de l'analyse numérique, du système d'équations algébriques suivant :

$$\begin{cases} \left[ \frac{\Gamma_{e_i} A_{e_i}}{\Delta x} + \frac{2\Gamma_A A_A}{\Delta x} \right] \phi_1 - \frac{\Gamma_{e_i} A_{e_i}}{\Delta x} \phi_2 = \frac{2\Gamma_A A_A}{\Delta x} \phi_A + \bar{\psi} V_{C_i} \\ -\frac{\Gamma_{w_i} A_{w_i}}{\Delta x} \phi_{w_i} + \left[ \frac{\Gamma_{w_i} A_{w_i}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{e_i} A_{e_i}}{\Delta x} \right] \phi_p - \frac{\Gamma_{e_i} A_{e_i}}{\Delta x} \phi_{E_i} = \bar{\psi} V_{C_i} \text{ pour } i = 2 : n_x - 1 \\ -\frac{\Gamma_{w_{n_x}} A_{w_{n_x}}}{\Delta x} \phi_{n_x-1} + \left[ \frac{\Gamma_{w_{n_x}} A_{w_{n_x}}}{\Delta x} + \frac{2\Gamma_B A_B}{\Delta x} \right] \phi_{n_x} = \frac{2\Gamma_B A_B}{\Delta x} \phi_B + \bar{\psi} V_{C_{n_x}} \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

### III.2.2 Diffusion stationnaire bidimensionnelle

Dans cette partie on détermine, en utilisant la méthode des volumes finis, la distribution de  $\phi$  au sein de la plaque plane schématisée en figure (III.5).

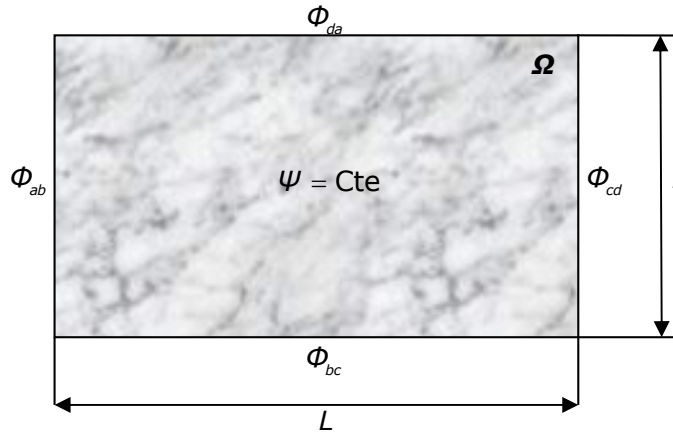


Figure III.5 : Plaque plane bidimensionnelle avec des conditions aux limites de type Dirichlet

Les démarches de résolution peut se résumées comme suit :

#### III.2.2.1 Formulation mathématique

L'équation gouvernante de la diffusion stationnaire bidimensionnelle peut se mettre sous la forme mathématique suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \psi = 0 \quad (\text{III.21})$$

Selon la figure (III.5), les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} \Phi(x=0, 0 \leq y \leq l) = \Phi_{ab} \\ \Phi(0 < x < L, y=0) = \Phi_{bc} \\ \Phi(x=L, 0 \leq y \leq l) = \Phi_{cd} \\ \Phi(0 < x < L, y=l) = \Phi_{da} \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

### III.2.2.2 Construction du maillage

En bidimensionnelle, l'équation gouvernante (III.21) doit être intégrée dans le volume de contrôle  $V_c$  schématisée dans la figure (III.6).

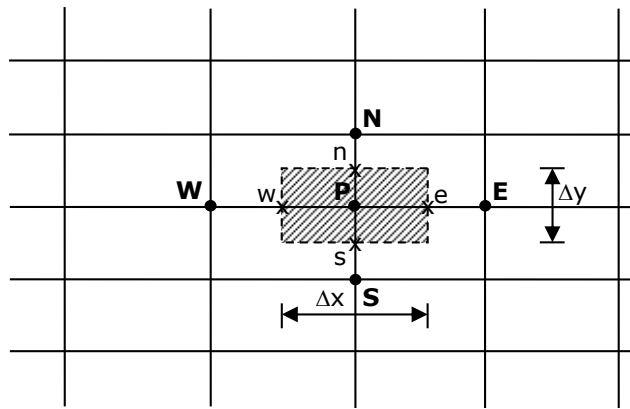


Figure III.6 : Volume de contrôle adopté pour le problème bidimensionnel

Pour un maillage structuré dans chaque direction, la taille du volume de contrôle sera calculer par :

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{L}{n_x} \\ \Delta y = \frac{l}{n_y} \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

avec  $n_x$  et  $n_y$  désignent respectivement le nombre des volumes de contrôle dans la direction  $x$  et celui de la direction  $y$ .

En figure (III.6), on désigne par **W**, **E**, **S** et **N** les nœuds respectivement Ouest, Est, Sud et Nord, adjacents aux nœuds pivot **P** du volume de contrôle  $V_c$ . Les points  $w$ ,  $e$ ,  $s$  et  $n$  représentent aussi respectivement les faces Ouest, Est, Sud et Nord du  $V_c$ .

### III.2.2.3 Discrétisation de l'équation gouvernante



L'intégrale de l'éq. (III.21) sur  $V_c$  donne :

$$\int_{V_c} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dV + \int_{V_c} \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dV + \int_{V_c} \psi dV = 0$$

(III.24)

avec, pour le cas bidimensionnel :

$$\begin{cases} dV = dx \cdot dy \cdot dz \\ dz = 1 \end{cases} \quad (III.25)$$

Maintenant, on peut mettre l'éq. (III.24) sous la forme :

$$\iint_{A_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dx dA + \iint_{A_y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dy dA + \bar{\psi} V_c = 0 \quad (III.26)$$

qui devient après intégration :

$$\left[ \Gamma_e \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e A_e - \Gamma_w \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w A_w \right] + \left[ \Gamma_n \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n A_n - \Gamma_s \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s A_s \right] + \bar{\psi} V_c = 0 \quad (III.27)$$

Nous remarquons très clairement que, cette dernière équation interprète l'équilibre entre les flux de la quantité  $\Phi$ , traversant toutes les faces du  $V_c$ , et la génération de  $\Phi$  dans  $V_c$ .

En se basant sur l'éq. (III.7), les flux traversant les faces du  $V_c$  deviennent :

$$\begin{cases} \Gamma_w \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w A_w = \Gamma_w A_w \left( \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) \\ \Gamma_e \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e A_e = \Gamma_e A_e \left( \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) \\ \Gamma_s \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s A_s = \Gamma_s A_s \left( \frac{\Phi_P - \Phi_S}{\Delta y_{SP}} \right) \\ \Gamma_n \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n A_n = \Gamma_n A_n \left( \frac{\Phi_N - \Phi_P}{\Delta y_{PN}} \right) \end{cases} \quad (III.28)$$

En substituant l'éq. (III.28) dans l'éq. (III.27), on obtient :

$$\Gamma_e A_e \left( \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left( \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) + \Gamma_n A_n \left( \frac{\Phi_N - \Phi_P}{\Delta y_{PN}} \right) + \Gamma_s A_s \left( \frac{\Phi_P - \Phi_S}{\Delta y_{SP}} \right) + \bar{\psi} V_C = 0 \quad (III.29)$$

On peut supposer que le terme source de  $\Phi$  varier linéairement dans  $V_C$ . On écrit donc :

$$\bar{\psi} V_C = \psi_u + \psi_p \Phi_P \quad (III.30)$$

où  $\psi_u, \psi_p$  représentent des coefficients.

En introduisant l'éq. (III.30) dans l'éq. (III.29), et après réarrangement de cette dernière, on trouve :

$$\left( \frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{WP}} + \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_s A_s}{\Delta y_{SP}} + \frac{\Gamma_n A_n}{\Delta y_{PN}} - \psi_p \right) \Phi_P = \left( \frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{WP}} \right) \Phi_W + \left( \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}} \right) \Phi_E + \left( \frac{\Gamma_s A_s}{\Delta y_{SP}} \right) \Phi_S + \left( \frac{\Gamma_n A_n}{\Delta y_{PN}} \right) \Phi_N + \psi_u \quad (III.31)$$

ou bien :

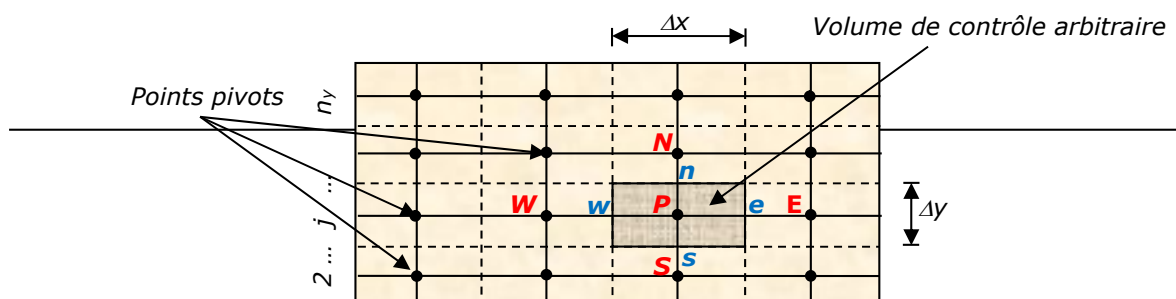
$$a_p \Phi_P = a_w \Phi_W + a_e \Phi_E + a_s \Phi_S + a_n \Phi_N + \psi_u \quad (III.32)$$

Cette dernière équation représente la forme discrète générale de l'équation (III.21), avec :

$a_w$	$a_e$	$a_s$	$a_n$	$a_p$
$\frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}}$	$\frac{\Gamma_s A_s}{\Delta y_{SP}}$	$\frac{\Gamma_n A_n}{\Delta y_{PN}}$	$a_w + a_e + a_s + a_n - \psi_p$

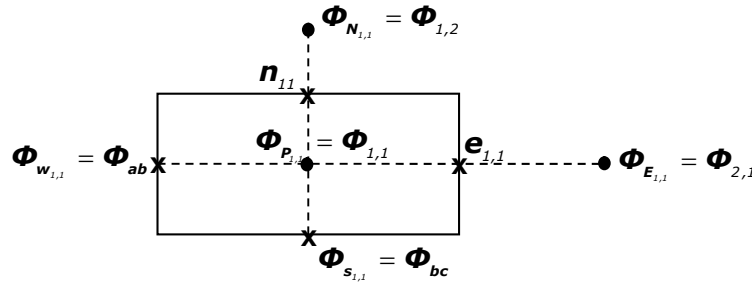
Notez bien que l'équation (III.31) est valable uniquement pour les nœuds pivot, dont leurs nœuds adjacents n'appartiennent pas aux limites du domaine d'étude  $\Omega$ . Dans le cas contraire, l'éq. (III.31) prend d'autre forme, qui dépend seulement des conditions aux limites associées au volume de contrôle en question.

### III.2.2.4 Système d'équations algébriques discrètes



Pour simplifier l'écriture des équations, on utilise les indices  $(i, j)$ , associé au point pivot, pour repérer chaque volume de contrôle dans le domaine d'étude  $\Omega$ .

 **Volume de contrôle**  $V_{C_{i,j}}$ , ( $i = 1, j = 1$ )



**Figure III.8 :** Volume de contrôle  $V_{C_{i,j}}$  et les conditions aux limites associées

Pour le volume de contrôle  $V_{C_{i,j}}$  l'éq. (III.27) s'écrit comme suit :

$$\left[ \Gamma_{e_{i,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{e_{i,j}} A_{e_{i,j}} - \Gamma_{w_{i,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{w_{i,j}} A_{w_{i,j}} \right] + \left[ \Gamma_{n_{i,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{n_{i,j}} A_{n_{i,j}} - \Gamma_{s_{i,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{s_{i,j}} A_{s_{i,j}} \right] + (\bar{\psi} V_C)_{i,j} = 0 \quad (\text{II.33})$$

De plus, on peut mettre :

$$\begin{cases} \Gamma_{w_{i,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{w_{i,j}} A_{w_{i,j}} = \Gamma_{w_{i,j}} A_{w_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{p_{i,j}} - \Phi_{w_{i,j}}}{\Delta x_{w_{i,j},p_{i,j}}} \right) = 2\Gamma_{w_{i,j}} A_{w_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{1,j} - \Phi_{ab}}{\Delta x} \right) \\ \Gamma_{e_{i,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{e_{i,j}} A_{e_{i,j}} = \Gamma_{e_{i,j}} A_{e_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{E_{i,j}} - \Phi_{p_{i,j}}}{\Delta x_{p_{i,j},E_{i,j}}} \right) = \Gamma_{e_{i,j}} A_{e_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{2,j} - \Phi_{1,j}}{\Delta x} \right) \\ \Gamma_{s_{i,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{s_{i,j}} A_{s_{i,j}} = \Gamma_{s_{i,j}} A_{s_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{p_{i,j}} - \Phi_{s_{i,j}}}{\Delta y_{s_{i,j},p_{i,j}}} \right) = 2\Gamma_{s_{i,j}} A_{s_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{1,j} - \Phi_{bc}}{\Delta y} \right) \\ \Gamma_{n_{i,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{n_{i,j}} A_{n_{i,j}} = \Gamma_{n_{i,j}} A_{n_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{N_{i,j}} - \Phi_{p_{i,j}}}{\Delta y_{p_{i,j},N_{i,j}}} \right) = \Gamma_{n_{i,j}} A_{n_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{1,2} - \Phi_{1,j}}{\Delta y} \right) \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

On considère que :

$$(\bar{\psi} V_C)_{1,j} = \psi_{u_{i,j}} + \psi_{p_{i,j}} \Phi_{1,j} \quad (\text{III.35})$$

avec  $\psi_{u_{i,j}}$ ,  $\psi_{p_{i,j}}$  représentent deux coefficients.

En remplaçant les éqts. (III.34) et (III.35) dans l'éq. (III.33), on trouve :

$$\begin{aligned} \Gamma_{e_{i,j}} A_{e_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{2,j} - \Phi_{1,j}}{\Delta x} \right) - 2\Gamma_{w_{i,j}} A_{w_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{1,j} - \Phi_{ab}}{\Delta x} \right) + \\ \Gamma_{n_{i,j}} A_{n_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{1,2} - \Phi_{1,j}}{\Delta y} \right) - 2\Gamma_{s_{i,j}} A_{s_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{1,j} - \Phi_{bc}}{\Delta y} \right) + \psi_{u_{i,j}} + \psi_{p_{i,j}} \Phi_{1,j} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

ou bien :

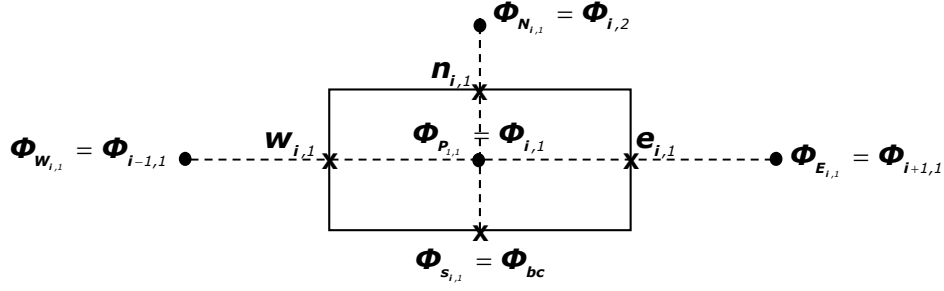
$$\begin{aligned} \left[ \frac{\Gamma_{e_{i,j}} A_{e_{i,j}}}{\Delta x} + \frac{2\Gamma_{w_{i,j}} A_{w_{i,j}}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{n_{i,j}} A_{n_{i,j}}}{\Delta y} + \frac{2\Gamma_{s_{i,j}} A_{s_{i,j}}}{\Delta y} - \psi_{p_{i,j}} \right] \Phi_{1,j} = \\ \frac{\Gamma_{e_{i,j}} A_{e_{i,j}}}{\Delta x} \Phi_{2,j} + \frac{\Gamma_{n_{i,j}} A_{n_{i,j}}}{\Delta y} \Phi_{1,2} + \frac{2\Gamma_{w_{i,j}} A_{w_{i,j}}}{\Delta x} \Phi_{ab} + \frac{2\Gamma_{s_{i,j}} A_{s_{i,j}}}{\Delta y} \Phi_{bc} + \psi_{u_{i,j}} \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

Il faut noter, selon cette dernière équation, que le terme source de la quantité  $\Phi$  dans le volume de contrôle  $V_{C_{1,j}}$  est devenu :

$$(\bar{\psi} V_C)_{1,j} = \psi_{u_{i,j}} + \psi_{p_{i,j}} \Phi_{1,j} + \frac{2\Gamma_{w_{i,j}} A_{w_{i,j}}}{\Delta x} \Phi_{ab} + \frac{2\Gamma_{s_{i,j}} A_{s_{i,j}}}{\Delta y} \Phi_{bc} \quad (\text{III.38})$$

Ce changement est produit par l'influence des conditions aux limites sur ce volume de contrôle.

 **Volumes de contrôle**  $V_{C_{i,j}}$ , ( $1 < i < n_x, j = 1$ )



**Figure III.9 :** Volume de contrôle  $V_{C,i,j}$  ( $1 < i < n_x$ ) et les conditions aux limites associées

En remplaçant les valeurs des indices  $(i, j)$ , avec  $(i = 2 : n_x - 1, j = 1)$ , associées aux volumes de contrôles  $V_{C,i,j}$ , dans l'éq. (III.27), on écrit :

$$\left[ \Gamma_{e,i,j} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{e,i,j} A_{e,i,j} - \Gamma_{w,i,j} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{w,i,j} A_{w,i,j} \right] + \left[ \Gamma_{n,i,j} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{n,i,j} A_{n,i,j} - \Gamma_{s,i,j} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{s,i,j} A_{s,i,j} \right] + (\bar{\psi} V_C)_{i,j} = 0 \quad (\text{III.39})$$

On a, concernant les termes des dérivées partielles de l'éq. (III.39), selon les C.L. citées dans la Fig. (III.9) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{w,i,j} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{w,i,j} A_{w,i,j} = \Gamma_{w,i,j} A_{w,i,j} \left( \frac{\Phi_{P_{i,j}} - \Phi_{w_{i,j}}}{\Delta x_{w_{i,j}P_{i,j}}} \right) = \Gamma_{w,i,j} A_{w,i,j} \left( \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}}{\Delta x} \right) \\ \Gamma_{e,i,j} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{e,i,j} A_{e,i,j} = \Gamma_{e,i,j} A_{e,i,j} \left( \frac{\Phi_{E_{i,j}} - \Phi_{P_{i,j}}}{\Delta x_{P_{i,j}E_{i,j}}} \right) = \Gamma_{e,i,j} A_{e,i,j} \left( \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta x} \right) \\ \Gamma_{s,i,j} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{s,i,j} A_{s,i,j} = \Gamma_{s,i,j} A_{s,i,j} \left( \frac{\Phi_{P_{i,j}} - \Phi_{s_{i,j}}}{\Delta y_{s_{i,j}P_{i,j}}} \right) = 2\Gamma_{s,i,j} A_{s,i,j} \left( \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{bc}}{\Delta y} \right) \\ \Gamma_{n,i,j} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{n,i,j} A_{n,i,j} = \Gamma_{n,i,j} A_{n,i,j} \left( \frac{\Phi_{N_{i,j}} - \Phi_{P_{i,j}}}{\Delta y_{P_{i,j}N_{i,j}}} \right) = \Gamma_{n,i,j} A_{n,i,j} \left( \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}}{\Delta y} \right) \end{array} \right. \quad (\text{III.40})$$

On a supposé :

$$(\bar{\psi} V_C)_{i,j} = \psi_{u,i,j} + \psi_{P_{i,j}} \Phi_{i,j} \quad (\text{III.41})$$

En substituant les éqts. (III.40) et (III.41) dans l'éq. (III.39), cette dernière devient :

$$\Gamma_{e,i,j} A_{e,i,j} \left( \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta x} \right) - \Gamma_{w,i,j} A_{w,i,j} \left( \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta x} \right) + \Gamma_{n,i,j} A_{n,i,j} \left( \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}}{\Delta y} \right) - 2\Gamma_{s,i,j} A_{s,i,j} \left( \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{bc}}{\Delta y} \right) + \psi_{u,i,j} + \psi_{P_{i,j}} \Phi_{i,j} = 0 \quad (\text{III.42})$$

On peut mettre l'éq. (III.42) sous la forme :

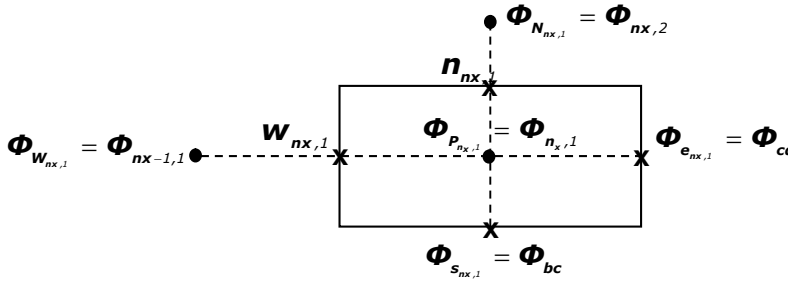
$$\left[ \frac{\Gamma_{e_{i,1}} A_{e_{i,1}}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{w_{i,1}} A_{w_{i,1}}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{n_{i,1}} A_{n_{i,1}}}{\Delta y} + \frac{2\Gamma_{s_{i,1}} A_{s_{i,1}}}{\Delta y} - \psi_{p_{i,1}} \right] \phi_{i,1} = \frac{\Gamma_{e_{i,1}} A_{e_{i,1}}}{\Delta x} \phi_{i+1,1} + \frac{\Gamma_{w_{i,1}} A_{w_{i,1}}}{\Delta x} \phi_{i-1,1} + \frac{\Gamma_{n_{i,1}} A_{n_{i,1}}}{\Delta y} \phi_{i,2} + \frac{2\Gamma_{s_{i,1}} A_{s_{i,1}}}{\Delta y} \phi_{bc} + \psi_{u_{i,1}} \quad (\text{III.43})$$

Selon cette dernière équation, les termes sources concernant les volumes de contrôles  $V_{C_{i,1}}$  ( $1 < i < n_x$ ) sont :

$$(\bar{\psi}V_C)_{i,1} = \psi_{u_{i,1}} + \psi_{p_{i,1}} \phi_{i,1} + \frac{2\Gamma_{s_{i,1}} A_{s_{i,1}}}{\Delta y} \phi_{bc}, \quad i = 2 : n_x - 1 \quad (\text{III.44})$$

 **Volumes de contrôle**  $V_{C_{n_x,1}}$ , ( $i = n_x, j = 1$ )

Pour ce volume l'éq. (III.27) devient :



**Figure III.10** : Volume de contrôle  $V_{C_{n_x,1}}$  et les conditions aux limites associées

$$\left[ \Gamma_{e_{n_x,1}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{e_{n_x,1}} A_{e_{n_x,1}} - \Gamma_{w_{n_x,1}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{w_{n_x,1}} A_{w_{n_x,1}} \right] + \left[ \Gamma_{n_{n_x,1}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{n_{n_x,1}} A_{n_{n_x,1}} - \Gamma_{s_{n_x,1}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{s_{n_x,1}} A_{s_{n_x,1}} \right] + (\bar{\psi}V_C)_{n_x,1} = 0 \quad (\text{III.45})$$

Les conditions aux limites associées à ce volume de contrôle, nous permet de mettre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{w_{nx,1}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{w_{nx,1}} A_{w_{nx,1}} = \Gamma_{w_{nx,1}} A_{w_{nx,1}} \left( \frac{\Phi_{p_{nx,1}} - \Phi_{w_{nx,1}}}{\Delta x_{w_{nx,1} p_{nx,1}}} \right) = \Gamma_{w_{nx,1}} A_{w_{nx,1}} \left( \frac{\Phi_{nx,1} - \Phi_{nx-1,1}}{\Delta x} \right) \\ \Gamma_{e_{nx,1}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{e_{nx,1}} A_{e_{nx,1}} = \Gamma_{e_{nx,1}} A_{e_{nx,1}} \left( \frac{\Phi_{e_{nx,1}} - \Phi_{p_{nx,1}}}{\Delta x_{p_{nx,1} e_{nx,1}}} \right) = 2\Gamma_{e_{nx,1}} A_{e_{nx,1}} \left( \frac{\Phi_{cd} - \Phi_{nx,1}}{\Delta x} \right) \\ \Gamma_{s_{nx,1}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{s_{nx,1}} A_{s_{nx,1}} = \Gamma_{s_{nx,1}} A_{s_{nx,1}} \left( \frac{\Phi_{p_{nx,1}} - \Phi_{s_{nx,1}}}{\Delta y_{s_{nx,1} p_{nx,1}}} \right) = 2\Gamma_{s_{nx,1}} A_{s_{nx,1}} \left( \frac{\Phi_{nx,1} - \Phi_{bc}}{\Delta y} \right) \\ \Gamma_{n_{nx,1}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{n_{nx,1}} A_{n_{nx,1}} = \Gamma_{n_{nx,1}} A_{n_{nx,1}} \left( \frac{\Phi_{n_{nx,1}} - \Phi_{p_{nx,1}}}{\Delta y_{p_{nx,1} n_{nx,1}}} \right) = \Gamma_{n_{nx,1}} A_{n_{nx,1}} \left( \frac{\Phi_{nx,2} - \Phi_{nx,1}}{\Delta y} \right) \end{array} \right. \quad (\text{III.46})$$

On a aussi, d'après les hypothèses déjà indiquées auparavant :

$$(\bar{\psi} V_C)_{n_x,1} = \psi_{u_{nx,1}} + \psi_{p_{nx,1}} \Phi_{n_x,1} \quad (\text{III.47})$$

En substituant les éqts. (III.46) et (III.47) dans l'éq. (III.45), on obtient :

$$\left[ 2\Gamma_{e_{nx,1}} A_{e_{nx,1}} \left( \frac{\Phi_{cd} - \Phi_{nx,1}}{\Delta x} \right) - \Gamma_{w_{nx,1}} A_{w_{nx,1}} \left( \frac{\Phi_{nx,1} - \Phi_{nx-1,1}}{\Delta x} \right) \right] + \left[ \Gamma_{n_{nx,1}} A_{n_{nx,1}} \left( \frac{\Phi_{nx,2} - \Phi_{nx,1}}{\Delta y} \right) - 2\Gamma_{s_{nx,1}} A_{s_{nx,1}} \left( \frac{\Phi_{nx,1} - \Phi_{bc}}{\Delta y} \right) \right] + \psi_{u_{nx,1}} + \psi_{p_{nx,1}} \Phi_{n_x,1} = 0 \quad (\text{III.48})$$

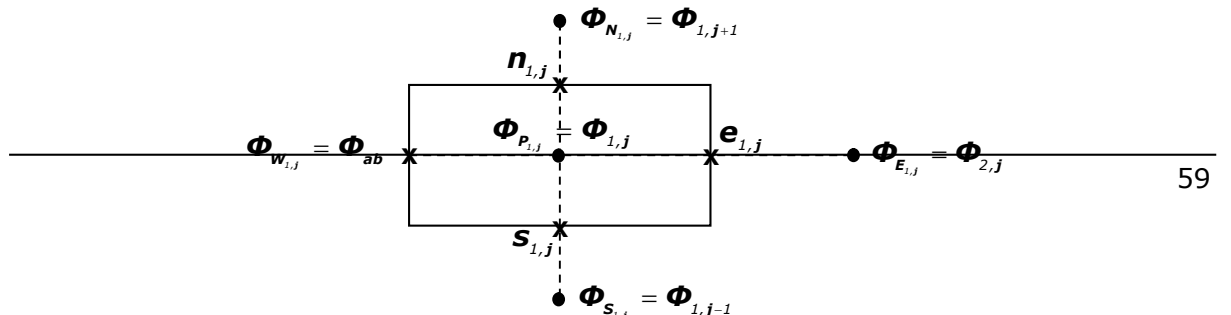
ou bien :

$$\left[ \frac{2\Gamma_{e_{nx,1}} A_{e_{nx,1}}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{w_{nx,1}} A_{w_{nx,1}}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{n_{nx,1}} A_{n_{nx,1}}}{\Delta y} + \frac{2\Gamma_{s_{nx,1}} A_{s_{nx,1}}}{\Delta y} - \psi_{p_{nx,1}} \right] \Phi_{nx,1} = \frac{\Gamma_{w_{nx,1}} A_{w_{nx,1}}}{\Delta x} \Phi_{nx-1,1} + \frac{\Gamma_{n_{nx,1}} A_{n_{nx,1}}}{\Delta y} \Phi_{nx,2} + \frac{2\Gamma_{e_{nx,1}} A_{e_{nx,1}}}{\Delta x} \Phi_{cd} + \frac{2\Gamma_{s_{nx,1}} A_{s_{nx,1}}}{\Delta y} \Phi_{bc} + \psi_{u_{nx,1}} \quad (\text{III.49})$$

Noter bien que d'après cette dernière équation, le terme source prend la forme suivante :

$$(\bar{\psi} V_C)_{n_x,1} = \frac{2\Gamma_{e_{nx,1}} A_{e_{nx,1}}}{\Delta x} \Phi_{cd} + \frac{2\Gamma_{s_{nx,1}} A_{s_{nx,1}}}{\Delta y} \Phi_{bc} + \psi_{u_{nx,1}} + \psi_{p_{nx,1}} \quad (\text{III.50})$$

 **Volumes de contrôle**  $V_{C_j}$ , ( $i = 1, 1 < j < n_y$ )



Pour ces volumes de contrôle  $(V_{C_{i,j}}, (i = 1, 1 < j < n_y))$ , les équations de transport, sous leurs formes algébriques discrètes, prennent la forme suivante :

$$\left[ \Gamma_{e_{i,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{e_{i,j}} A_{e_{i,j}} - \Gamma_{w_{i,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{w_{i,j}} A_{w_{i,j}} \right] + \left[ \Gamma_{n_{i,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{n_{i,j}} A_{n_{i,j}} - \Gamma_{s_{i,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{s_{i,j}} A_{s_{i,j}} \right] + (\bar{\psi} V_C)_{1,j} = 0 \quad (\text{III.51})$$

On sait bien que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{w_{i,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{w_{i,j}} A_{w_{i,j}} = \Gamma_{w_{i,j}} A_{w_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{P_{i,j}} - \Phi_{w_{i,j}}}{\Delta x_{w_{i,j}P_{i,j}}} \right) = 2\Gamma_{w_{i,j}} A_{w_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{1,j} - \Phi_{ab}}{\Delta x} \right) \\ \Gamma_{e_{i,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{e_{i,j}} A_{e_{i,j}} = \Gamma_{e_{i,j}} A_{e_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{E_{i,j}} - \Phi_{P_{i,j}}}{\Delta x_{P_{i,j}E_{i,j}}} \right) = \Gamma_{e_{i,j}} A_{e_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{2,j} - \Phi_{1,j}}{\Delta x} \right) \\ \Gamma_{s_{i,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{s_{i,j}} A_{s_{i,j}} = \Gamma_{s_{i,j}} A_{s_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{P_{i,j}} - \Phi_{S_{i,j}}}{\Delta y_{S_{i,j}P_{i,j}}} \right) = \Gamma_{s_{i,j}} A_{s_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{1,j} - \Phi_{1,j-1}}{\Delta y} \right) \\ \Gamma_{n_{i,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{n_{i,j}} A_{n_{i,j}} = \Gamma_{n_{i,j}} A_{n_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{N_{i,j}} - \Phi_{P_{i,j}}}{\Delta y_{P_{i,j}N_{i,j}}} \right) = \Gamma_{n_{i,j}} A_{n_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{1,j+1} - \Phi_{1,j}}{\Delta y} \right) \end{array} \right. \quad (\text{III.52})$$

De plus, on peut admettre que :

$$(\bar{\psi} V_C)_{1,j} = \psi_{u_{i,j}} + \psi_{P_{i,j}} \Phi_{1,j} \quad (\text{III.53})$$

De l'éq. (III.52) et l'éq. (III.53), l'éq. (III.51) devient :

$$\left[ \Gamma_{e_{i,j}} A_{e_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{2,j} - \Phi_{1,j}}{\Delta x} \right) - 2\Gamma_{w_{i,j}} A_{w_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{1,j} - \Phi_{ab}}{\Delta x} \right) \right] + \left[ \Gamma_{n_{i,j}} A_{n_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{1,j+1} - \Phi_{1,j}}{\Delta y} \right) - \Gamma_{s_{i,j}} A_{s_{i,j}} \left( \frac{\Phi_{1,j} - \Phi_{1,j-1}}{\Delta y} \right) \right] + \psi_{u_{i,j}} + \psi_{P_{i,j}} \Phi_{1,j} = 0 \quad (\text{III.54})$$

Après réarrangement de l'éq. (III.54), on trouve :



$$\left[ \frac{\Gamma_{e_{1,j}} A_{e_{1,j}}}{\Delta x} + \frac{2\Gamma_{w_{1,j}} A_{w_{1,j}}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{n_{1,j}} A_{n_{1,j}}}{\Delta y} + \frac{\Gamma_{s_{1,j}} A_{s_{1,j}}}{\Delta y} - \psi_{p_{1,j}} \right] \phi_{1,j} =$$

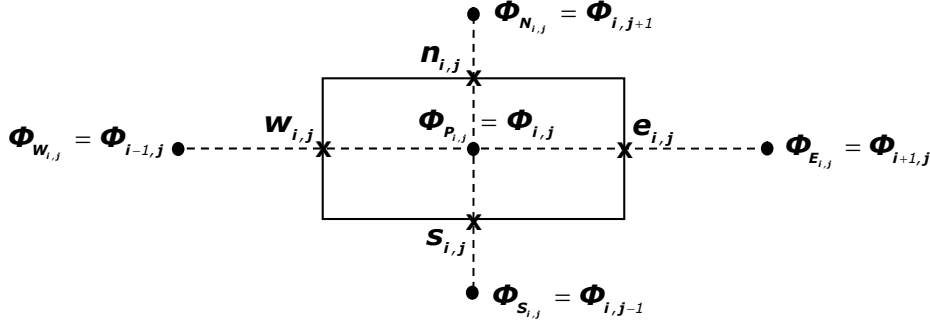
$$\frac{\Gamma_{e_{1,j}} A_{e_{1,j}}}{\Delta x} \phi_{2,j} + \frac{\Gamma_{n_{1,j}} A_{n_{1,j}}}{\Delta y} \phi_{1,j+1} + \frac{\Gamma_{s_{1,j}} A_{s_{1,j}}}{\Delta y} \phi_{1,j-1}$$

$$+ \frac{2\Gamma_{w_{1,j}} A_{w_{1,j}}}{\Delta x} \phi_{ab} + \psi_{u_{1,j}}$$
(III.55)

Cette dernière équation représente la forme discrète de l'équation de transport de la propriété  $\phi$  au sein du volume de contrôle  $V_{C_{1j}}$ . Dans ce volume de contrôle, et à cause de l'effet des conditions aux limites dans la face Ouest, le terme source devient :

$$(\bar{\psi} V_C)_{1,j} = \psi_{u_{1,j}} + \frac{2\Gamma_{w_{1,j}} A_{w_{1,j}}}{\Delta x} \phi_{ab} + \psi_{p_{1,j}} \phi_{1,j}$$
(III.56)

 **Volumes de contrôle**  $V_{C_{ij}}$ , ( $1 < i < n_x, 1 < j < n_y$ )



**Figure III.12** : Volume de contrôle  $V_{C_{ij}}$  ( $1 < i < n_x, 1 < j < n_y$ ) et les conditions aux limites associées

Selon les éqts. (III.30) et (III.31), les équations de transport discrètes, associées aux volumes de contrôle  $V_{C_{ij}}$  ( $1 < i < n_x, 1 < j < n_y$ ), prennent la forme :

$$\left( \frac{\Gamma_{i-1,j} A_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{i+1,j} A_{i+1,j}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{i,j-1} A_{i,j-1}}{\Delta y} + \frac{\Gamma_{i,j+1} A_{i,j+1}}{\Delta y} - \psi_p \right) \phi_{i,j} =$$

$$\left( \frac{\Gamma_{i-1,j} A_{i-1,j}}{\Delta x} \right) \phi_{i-1,j} + \left( \frac{\Gamma_{i+1,j} A_{i+1,j}}{\Delta x} \right) \phi_{i+1,j} +$$

$$\left( \frac{\Gamma_{i,j-1} A_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \phi_{i,j-1} + \left( \frac{\Gamma_{i,j+1} A_{i,j+1}}{\Delta y} \right) \phi_{i,j+1} + \psi_u$$
(III.57)

avec les termes sources liées à ces volumes de contrôle s'écrivent comme suit :

$$(\bar{\psi}V_C)_{i,j} = \psi_{u_{i,j}} + \psi_{p_{i,j}} \phi_{i,j} \quad (III.58)$$

 **Volumes de contrôle**  $V_{C_{ij}}$ , ( $i = n_x, 1 < j < n_y$ )

Les volumes de contrôle associés à cette zone sont schématisés dans la figure (III.13). D'après cette dernière, l'équation (III.27) prend la forme suivante :

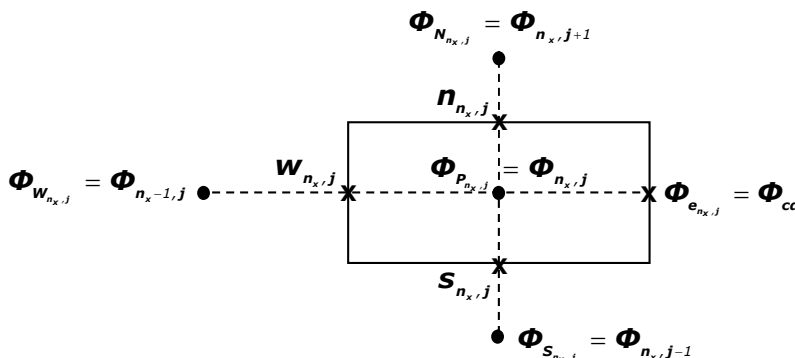
$$\left[ \Gamma_{e_{n_x,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{e_{n_x,j}} A_{e_{n_x,j}} - \Gamma_{w_{n_x,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{w_{n_x,j}} A_{w_{n_x,j}} \right] + \left[ \Gamma_{n_{n_x,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{n_{n_x,j}} A_{n_{n_x,j}} - \Gamma_{s_{n_x,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{s_{n_x,j}} A_{s_{n_x,j}} \right] + (\bar{\psi}V_C)_{n_x,j} = 0 \quad (III.59)$$

avec :

$$\begin{cases} \Gamma_{w_{n_x,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{w_{n_x,j}} A_{w_{n_x,j}} = \Gamma_{w_{n_x,j}} A_{w_{n_x,j}} \left( \frac{\Phi_{p_{n_x,j}} - \Phi_{w_{n_x,j}}}{\Delta x_{w_{n_x,j},p_{n_x,j}}} \right) = \Gamma_{w_{n_x,j}} A_{w_{n_x,j}} \left( \frac{\Phi_{n_x,j} - \Phi_{n_x-1,j}}{\Delta x} \right) \\ \Gamma_{e_{n_x,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{e_{n_x,j}} A_{e_{n_x,j}} = \Gamma_{e_{n_x,j}} A_{e_{n_x,j}} \left( \frac{\Phi_{e_{n_x,j}} - \Phi_{p_{n_x,j}}}{\Delta x_{p_{n_x,j},e_{n_x,j}}} \right) = 2\Gamma_{e_{n_x,j}} A_{e_{n_x,j}} \left( \frac{\Phi_{cd} - \Phi_{n_x,j}}{\Delta x} \right) \\ \Gamma_{s_{n_x,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{s_{n_x,j}} A_{s_{n_x,j}} = \Gamma_{s_{n_x,j}} A_{s_{n_x,j}} \left( \frac{\Phi_{p_{n_x,j}} - \Phi_{s_{n_x,j}}}{\Delta y_{s_{n_x,j},p_{n_x,j}}} \right) = \Gamma_{s_{n_x,j}} A_{s_{n_x,j}} \left( \frac{\Phi_{n_x,j} - \Phi_{n_x,j-1}}{\Delta y} \right) \\ \Gamma_{n_{n_x,j}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{n_{n_x,j}} A_{n_{n_x,j}} = \Gamma_{n_{n_x,j}} A_{n_{n_x,j}} \left( \frac{\Phi_{n_{n_x,j}} - \Phi_{p_{n_x,j}}}{\Delta y_{p_{n_x,j},n_{n_x,j}}} \right) = \Gamma_{n_{n_x,j}} A_{n_{n_x,j}} \left( \frac{\Phi_{n_x,j+1} - \Phi_{n_x,j}}{\Delta y} \right) \end{cases} \quad (III.60)$$

Pour simplifier les calculs, on choisi toujours des termes sources linéaires, c'est-à-dire :

$$(\bar{\psi}V_C)_{n_x,j} = \psi_{u_{n_x,j}} + \psi_{p_{n_x,j}} \phi_{n_x,j} \quad (III.61)$$



**Figure III.13** : Volume de contrôle  $V_{C_{ij}}$  ( $i = n_x, 1 < j < n_y$ ) et les conditions aux limites associées

En substituant les éqts. (III.60) et (III.61) dans l'éq. (III.59), on obtient :

$$\left[ 2\Gamma_{e_{n_x,j}} A_{e_{n_x,j}} \left( \frac{\Phi_{cd} - \Phi_{n_x,j}}{\Delta x} \right) - \Gamma_{w_{n_x,j}} A_{w_{n_x,j}} \left( \frac{\Phi_{n_x,j} - \Phi_{n_x-1,j}}{\Delta x} \right) \right] + \left[ \Gamma_{n_{n_x,j}} A_{n_{n_x,j}} \left( \frac{\Phi_{n_x,j+1} - \Phi_{n_x,j}}{\Delta y} \right) - \Gamma_{s_{n_x,j}} A_{s_{n_x,j}} \left( \frac{\Phi_{n_x,j} - \Phi_{n_x,j-1}}{\Delta y} \right) \right] + \psi_{u_{n_x,j}} + \psi_{p_{n_x,j}} \Phi_{n_x,j} = 0 \quad (\text{III.62})$$

ou bien :

$$\left[ \frac{2\Gamma_{e_{n_x,j}} A_{e_{n_x,j}}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{w_{n_x,j}} A_{w_{n_x,j}}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{n_{n_x,j}} A_{n_{n_x,j}}}{\Delta y} + \frac{\Gamma_{s_{n_x,j}} A_{s_{n_x,j}}}{\Delta y} - \psi_{p_{n_x,j}} \right] \Phi_{n_x,j} = \frac{\Gamma_{w_{n_x,j}} A_{w_{n_x,j}}}{\Delta x} \Phi_{n_x-1,j} + \frac{\Gamma_{n_{n_x,j}} A_{n_{n_x,j}}}{\Delta y} \Phi_{n_x,j+1} + \frac{\Gamma_{s_{n_x,j}} A_{s_{n_x,j}}}{\Delta y} \Phi_{n_x,j-1} + \frac{2\Gamma_{e_{n_x,j}} A_{e_{n_x,j}}}{\Delta x} \Phi_{cd} + \psi_{u_{n_x,j}} \quad (\text{III.63})$$

Selon cette dernière équation, et à cause de l'influence des conditions aux limites (*conditions aux limites de Dirichlet* :  $\Phi_{e_{n_x,j}} = \Phi_{cd}$ ), les termes sources associés aux volumes de contrôle  $V_{C_{n_x,j}}$  ( $i = n_x, 1 < j < n_y$ ) deviennent :

$$(\bar{\psi} V_C)_{n_x,j} = \psi_{u_{n_x,j}} + \frac{2\Gamma_{e_{n_x,j}} A_{e_{n_x,j}}}{\Delta x} \Phi_{cd} + \psi_{p_{n_x,j}} \Phi_{n_x,j} \quad (\text{III.64})$$

 **Volume de contrôle**  $V_{C_{ij}}$ , ( $i = 1, j = n_y$ )

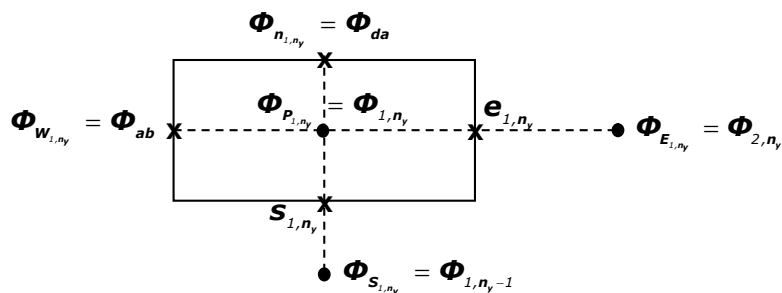


Figure III.14 : Volume de contrôle  $V_{C_{1,n_y}}$  et les conditions aux limites associées

En introduisant la valeur des indices  $(i, j)$ , correspond au volume de contrôle schématisé en figure III.14, dans l'équation (III.27), on trouve :

$$\left[ \Gamma_{e_{1,\gamma}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{e_{1,\gamma}} A_{e_{1,\gamma}} - \Gamma_{w_{1,\gamma}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{w_{1,\gamma}} A_{w_{1,\gamma}} \right] + \left[ \Gamma_{n_{1,\gamma}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{n_{1,\gamma}} A_{n_{1,\gamma}} - \Gamma_{s_{1,\gamma}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{s_{1,\gamma}} A_{s_{1,\gamma}} \right] + (\bar{\psi} V_c)_{1,\gamma} = 0 \quad (\text{III.65})$$

On a :

$$(\bar{\psi} V_c)_{1,\gamma} = \psi_{u_{1,\gamma}} + \psi_{p_{1,\gamma}} \Phi_{1,\gamma} \quad (\text{III.66})$$

On a aussi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{w_{1,\gamma}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{w_{1,\gamma}} A_{w_{1,\gamma}} = \Gamma_{w_{1,\gamma}} A_{w_{1,\gamma}} \left( \frac{\Phi_{p_{1,\gamma}} - \Phi_{w_{1,\gamma}}}{\Delta x_{w_{1,\gamma} p_{1,\gamma}}} \right) = 2\Gamma_{w_{1,\gamma}} A_{w_{1,\gamma}} \left( \frac{\Phi_{1,\gamma} - \Phi_{ab}}{\Delta x} \right) \\ \Gamma_{e_{1,\gamma}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{e_{1,\gamma}} A_{e_{1,\gamma}} = \Gamma_{e_{1,\gamma}} A_{e_{1,\gamma}} \left( \frac{\Phi_{E_{1,\gamma}} - \Phi_{p_{1,\gamma}}}{\Delta x_{p_{1,\gamma} E_{1,\gamma}}} \right) = \Gamma_{e_{1,\gamma}} A_{e_{1,\gamma}} \left( \frac{\Phi_{2,\gamma} - \Phi_{1,\gamma}}{\Delta x} \right) \\ \Gamma_{s_{1,\gamma}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{s_{1,\gamma}} A_{s_{1,\gamma}} = \Gamma_{s_{1,\gamma}} A_{s_{1,\gamma}} \left( \frac{\Phi_{p_{1,\gamma}} - \Phi_{s_{1,\gamma}}}{\Delta y_{s_{1,\gamma} p_{1,\gamma}}} \right) = \Gamma_{s_{1,\gamma}} A_{s_{1,\gamma}} \left( \frac{\Phi_{1,\gamma} - \Phi_{1,\gamma-1}}{\Delta y} \right) \\ \Gamma_{n_{1,\gamma}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{n_{1,\gamma}} A_{n_{1,\gamma}} = \Gamma_{n_{1,\gamma}} A_{n_{1,\gamma}} \left( \frac{\Phi_{n_{1,\gamma}} - \Phi_{p_{1,\gamma}}}{\Delta y_{p_{1,\gamma} n_{1,\gamma}}} \right) = 2\Gamma_{n_{1,\gamma}} A_{n_{1,\gamma}} \left( \frac{\Phi_{da} - \Phi_{1,\gamma}}{\Delta y} \right) \end{array} \right.$$

(III.67)

En remplaçant les éqts. (III.66) et (III.67) dans l'éq. (III.65), on obtient :

$$\left[ \Gamma_{e_{1,\gamma}} A_{e_{1,\gamma}} \left( \frac{\Phi_{2,\gamma} - \Phi_{1,\gamma}}{\Delta x} \right) - 2\Gamma_{w_{1,\gamma}} A_{w_{1,\gamma}} \left( \frac{\Phi_{1,\gamma} - \Phi_{ab}}{\Delta x} \right) \right] + \left[ 2\Gamma_{n_{1,\gamma}} A_{n_{1,\gamma}} \left( \frac{\Phi_{da} - \Phi_{1,\gamma}}{\Delta y} \right) - \Gamma_{s_{1,\gamma}} A_{s_{1,\gamma}} \left( \frac{\Phi_{1,\gamma} - \Phi_{1,\gamma-1}}{\Delta y} \right) \right] + \psi_{u_{1,\gamma}} + \psi_{p_{1,\gamma}} \Phi_{1,\gamma} = 0 \quad (\text{III.68})$$

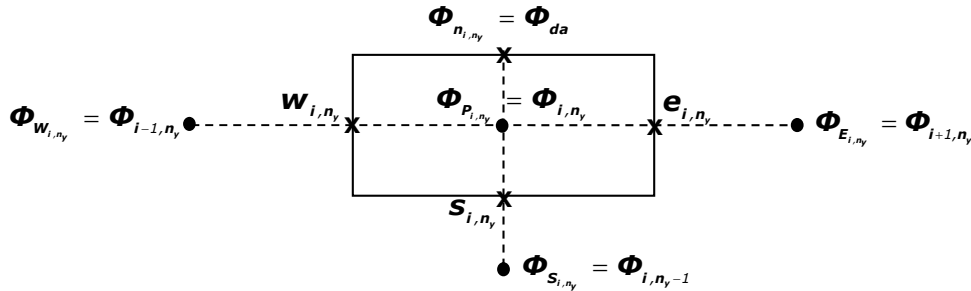
ou bien :

$$\left[ \frac{\Gamma_{e_{i,n_y}} A_{e_{i,n_y}}}{\Delta x} + \frac{2\Gamma_{w_{i,n_y}} A_{w_{i,n_y}}}{\Delta x} + \frac{2\Gamma_{n_{i,n_y}} A_{n_{i,n_y}}}{\Delta y} + \frac{\Gamma_{s_{i,n_y}} A_{s_{i,n_y}}}{\Delta y} - \psi_{P_{i,n_y}} \right] \Phi_{1,n_y} = \frac{\Gamma_{e_{i,n_y}} A_{e_{i,n_y}}}{\Delta x} \Phi_{1,n_y} + \frac{\Gamma_{s_{i,n_y}} A_{s_{i,n_y}}}{\Delta y} \Phi_{1,n_y-1} + \frac{2\Gamma_{w_{i,n_y}} A_{w_{i,n_y}}}{\Delta x} \Phi_{ab} + \frac{2\Gamma_{n_{i,n_y}} A_{n_{i,n_y}}}{\Delta y} \Phi_{da} + \psi_{u_{i,n_y}} \quad (\text{III.69})$$

Cette dernière équation représente la forme discrète de l'équation de transport de la propriété  $\Phi$  au sein du volume de contrôle  $V_{C_{i,n_y}}$ . Dans ce volume de contrôle, et à cause de l'effet des conditions aux limites dans les faces Est et Nord, le terme source devient :

$$(\bar{\psi}V_C)_{1,n_y} = \psi_{u_{i,n_y}} + \frac{2\Gamma_{w_{i,n_y}} A_{w_{i,n_y}}}{\Delta x} \Phi_{ab} + \frac{2\Gamma_{n_{i,n_y}} A_{n_{i,n_y}}}{\Delta y} \Phi_{da} + \psi_{P_{i,n_y}} \Phi_{1,n_y} \quad (\text{III.70})$$

 **Volumes de contrôle**  $V_{C_j}$ , ( $2 \leq i \leq n_x - 1, j = n_y$ )



**Figure III.15** : Volume de contrôle  $V_{C_{i,n_y}}$  et les conditions aux limites associées

Pour ces volumes de contrôle, l'éq. (III.27) s'écrit comme suit :

$$\left[ \Gamma_{e_{i,n_y}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{e_{i,n_y}} - \Gamma_{w_{i,n_y}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{w_{i,n_y}} \right] + \left[ \Gamma_{n_{i,n_y}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{n_{i,n_y}} - \Gamma_{s_{i,n_y}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{s_{i,n_y}} \right] + (\bar{\psi}V_C)_{i,n_y} = 0 \quad (\text{III.71})$$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{w_{i,n_y}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{w_{i,n_y}} A_{w_{i,n_y}} = \Gamma_{w_{i,n_y}} A_{w_{i,n_y}} \left( \frac{\Phi_{P_{i,n_y}} - \Phi_{W_{i,n_y}}}{\Delta x_{W_{i,n_y} P_{i,n_y}}} \right) = \Gamma_{w_{i,n_y}} A_{w_{i,n_y}} \left( \frac{\Phi_{i,n_y} - \Phi_{i-1,n_y}}{\Delta x} \right) \\ \Gamma_{e_{i,n_y}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{e_{i,n_y}} A_{e_{i,n_y}} = \Gamma_{e_{i,n_y}} A_{e_{i,n_y}} \left( \frac{\Phi_{E_{i,n_y}} - \Phi_{P_{i,n_y}}}{\Delta x_{P_{i,n_y} E_{i,n_y}}} \right) = \Gamma_{e_{i,n_y}} A_{e_{i,n_y}} \left( \frac{\Phi_{i+1,n_y} - \Phi_{i,n_y}}{\Delta x} \right) \\ \Gamma_{s_{i,n_y}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{s_{i,n_y}} A_{s_{i,n_y}} = \Gamma_{s_{i,n_y}} A_{s_{i,n_y}} \left( \frac{\Phi_{P_{i,n_y}} - \Phi_{S_{i,n_y}}}{\Delta y_{S_{i,n_y} P_{i,n_y}}} \right) = \Gamma_{s_{i,n_y}} A_{s_{i,n_y}} \left( \frac{\Phi_{i,n_y} - \Phi_{i,n_y-1}}{\Delta y} \right) \\ \Gamma_{n_{i,n_y}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{n_{i,n_y}} A_{n_{i,n_y}} = \Gamma_{n_{i,n_y}} A_{n_{i,n_y}} \left( \frac{\Phi_{n_{i,n_y}} - \Phi_{P_{i,n_y}}}{\Delta y_{P_{i,n_y} n_{i,n_y}}} \right) = 2\Gamma_{n_{i,n_y}} A_{n_{i,n_y}} \left( \frac{\Phi_{da} - \Phi_{i,n_y}}{\Delta y} \right) \end{array} \right. \quad (III.72)$$

on a aussi :

$$\left( \bar{\psi} V_C \right)_{i,n_y} = \psi_{u_{i,n_y}} + \psi_{P_{i,n_y}} \Phi_{i,n_y} \quad (III.73)$$

En substituant les éqts. (III.72) et (III.73) dans l'éq. (III.71), on trouve :

$$\left[ \Gamma_{e_{i,n_y}} A_{e_{i,n_y}} \left( \frac{\Phi_{i+1,n_y} - \Phi_{i,n_y}}{\Delta x} \right) - \Gamma_{w_{i,n_y}} A_{w_{i,n_y}} \left( \frac{\Phi_{i,n_y} - \Phi_{i-1,n_y}}{\Delta x} \right) \right] + \left[ 2\Gamma_{n_{i,n_y}} A_{n_{i,n_y}} \left( \frac{\Phi_{da} - \Phi_{i,n_y}}{\Delta y} \right) - \Gamma_{s_{i,n_y}} A_{s_{i,n_y}} \left( \frac{\Phi_{i,n_y} - \Phi_{i,n_y-1}}{\Delta y} \right) \right] + \psi_{u_{i,n_y}} + \psi_{P_{i,n_y}} \Phi_{i,n_y} = 0 \quad (III.74)$$

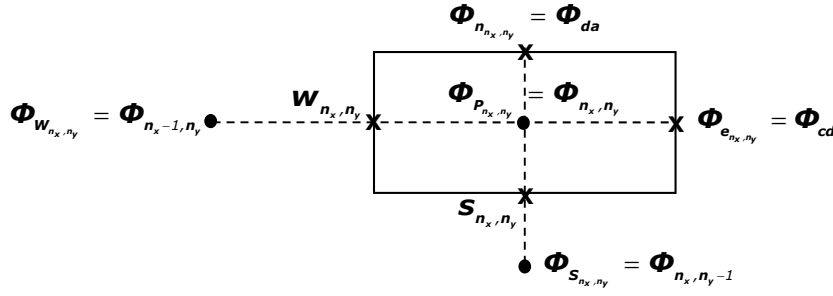
ou bien :

$$\left[ \frac{\Gamma_{e_{i,n_y}} A_{e_{i,n_y}}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{w_{i,n_y}} A_{w_{i,n_y}}}{\Delta x} + \frac{2\Gamma_{n_{i,n_y}} A_{n_{i,n_y}}}{\Delta y} + \frac{\Gamma_{s_{i,n_y}} A_{s_{i,n_y}}}{\Delta y} - \psi_{P_{i,n_y}} \right] \Phi_{i,n_y} = \frac{\Gamma_{e_{i,n_y}} A_{e_{i,n_y}}}{\Delta x} \Phi_{i+1,n_y} + \frac{\Gamma_{w_{i,n_y}} A_{w_{i,n_y}}}{\Delta x} \Phi_{i-1,n_y} + \frac{2\Gamma_{n_{i,n_y}} A_{n_{i,n_y}}}{\Delta y} \Phi_{da} + \frac{\Gamma_{s_{i,n_y}} A_{s_{i,n_y}}}{\Delta y} \Phi_{i,n_y-1} + \psi_{u_{i,n_y}} \quad (III.75)$$

Selon cette dernière équation, les termes sources des propriétés transportées  $\Phi_{i,n_y}$  ( $2 \leq i \leq n_x - 1$ ) deviennent :

$$\left( \bar{\psi} V_C \right)_{i,n_y} = \psi_{u_{i,n_y}} + \frac{2\Gamma_{n_{i,n_y}} A_{n_{i,n_y}}}{\Delta y} \Phi_{da} + \psi_{P_{i,n_y}} \Phi_{i,n_y} \quad (III.76)$$

 **Volume de contrôle**  $V_{C_{ij}}$ , ( $i = n_x, j = n_y$ )



**Figure III.16 :** Volume de contrôle  $V_{C_{n_x, n_y}}$  et les conditions aux limites associées  
 Pour  $i = n_x$  et  $j = n_y$ , l'éq. (III.27) s'écrit comme :

$$\left[ \Gamma_{e_{n_x, n_y}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{e_{n_x, n_y}} A_{e_{n_x, n_y}} - \Gamma_{w_{n_x, n_y}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{w_{n_x, n_y}} A_{w_{n_x, n_y}} \right] + \left[ \Gamma_{n_{n_x, n_y}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{n_{n_x, n_y}} A_{n_{n_x, n_y}} - \Gamma_{s_{n_x, n_y}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{s_{n_x, n_y}} A_{s_{n_x, n_y}} \right] + (\bar{\psi} V_C)_{n_x, n_y} = 0 \quad (III.77)$$

Les opérateurs de dérivation, paru dans l'éq. (III.77), peuvent s'écrire comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{w_{n_x, n_y}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{w_{n_x, n_y}} A_{w_{n_x, n_y}} = \Gamma_{w_{n_x, n_y}} A_{w_{n_x, n_y}} \left( \frac{\Phi_{p_{n_x, n_y}} - \Phi_{w_{n_x, n_y}}}{\Delta x_{w_{n_x, n_y}, p_{n_x, n_y}}} \right) = \Gamma_{w_{n_x, n_y}} A_{w_{n_x, n_y}} \left( \frac{\Phi_{n_x, n_y} - \Phi_{n_x-1, n_y}}{\Delta x} \right) \\ \Gamma_{e_{n_x, n_y}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{e_{n_x, n_y}} A_{e_{n_x, n_y}} = \Gamma_{e_{n_x, n_y}} A_{e_{n_x, n_y}} \left( \frac{\Phi_{e_{n_x, n_y}} - \Phi_{p_{n_x, n_y}}}{\Delta x_{p_{n_x, n_y}, e_{n_x, n_y}}} \right) = 2\Gamma_{e_{n_x, n_y}} A_{e_{n_x, n_y}} \left( \frac{\Phi_{cd} - \Phi_{n_x, n_y}}{\Delta x} \right) \\ \Gamma_{s_{n_x, n_y}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{s_{n_x, n_y}} A_{s_{n_x, n_y}} = \Gamma_{s_{n_x, n_y}} A_{s_{n_x, n_y}} \left( \frac{\Phi_{p_{n_x, n_y}} - \Phi_{s_{n_x, n_y}}}{\Delta y_{s_{n_x, n_y}, p_{n_x, n_y}}} \right) = \Gamma_{s_{n_x, n_y}} A_{s_{n_x, n_y}} \left( \frac{\Phi_{n_x, n_y} - \Phi_{n_x, n_y-1}}{\Delta y} \right) \\ \Gamma_{n_{n_x, n_y}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{n_{n_x, n_y}} A_{n_{n_x, n_y}} = \Gamma_{n_{n_x, n_y}} A_{n_{n_x, n_y}} \left( \frac{\Phi_{n_x, n_y} - \Phi_{p_{n_x, n_y}}}{\Delta y_{p_{n_x, n_y}, n_{n_x, n_y}}} \right) = 2\Gamma_{n_{n_x, n_y}} A_{n_{n_x, n_y}} \left( \frac{\Phi_{da} - \Phi_{n_x, n_y}}{\Delta y} \right) \end{array} \right. \quad (III.78)$$

Pour le terme source de la propriété transportée, on a :

$$(\bar{\psi} V_C)_{n_x, n_y} = \psi_{u_{n_x, n_y}} + \psi_{p_{n_x, n_y}} \Phi_{n_x, n_y} \quad (III.79)$$

En introduisant les éqts (III.78) et (III.79) dans l'éq. (III.77), on obtient :

$$\left[ 2\Gamma_{e_{n_x, n_y}} A_{e_{n_x, n_y}} \left( \frac{\Phi_{cd} - \Phi_{n_x, n_y}}{\Delta x} \right) - \Gamma_{w_{n_x, n_y}} A_{w_{n_x, n_y}} \left( \frac{\Phi_{n_x, n_y} - \Phi_{n_x-1, n_y}}{\Delta x} \right) \right] + \left[ 2\Gamma_{n_{n_x, n_y}} A_{n_{n_x, n_y}} \left( \frac{\Phi_{da} - \Phi_{n_x, n_y}}{\Delta y} \right) - \Gamma_{s_{n_x, n_y}} A_{s_{n_x, n_y}} \left( \frac{\Phi_{n_x, n_y} - \Phi_{n_x, n_y-1}}{\Delta y} \right) \right] + \psi_{u_{n_x, n_y}} + \psi_{p_{n_x, n_y}} \Phi_{n_x, n_y} = 0 \quad (III.80)$$

Après réarrangement de l'éq. (III.80), on trouve :

$$\left[ \frac{2\Gamma_{e_{n_x,n_y}} A_{e_{n_x,n_y}}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{w_{n_x,n_y}} A_{w_{n_x,n_y}}}{\Delta x} + \frac{2\Gamma_{n_{n_x,n_y}} A_{n_{n_x,n_y}}}{\Delta y} + \frac{\Gamma_{s_{n_x,n_y}} A_{s_{n_x,n_y}}}{\Delta y} - \psi_{p_{n_x,n_y}} \right] \Phi_{n_x,n_y} =$$

$$\frac{\Gamma_{w_{n_x,n_y}} A_{w_{n_x,n_y}}}{\Delta x} \Phi_{n_x-1,n_y} + \frac{\Gamma_{s_{n_x,n_y}} A_{s_{n_x,n_y}}}{\Delta y} \Phi_{n_x,n_y-1} + \frac{2\Gamma_{e_{n_x,n_y}} A_{e_{n_x,n_y}}}{\Delta x} \Phi_{cd}$$

$$+ \frac{2\Gamma_{n_{n_x,n_y}} A_{n_{n_x,n_y}}}{\Delta y} \Phi_{da} + \psi_{u_{n_x,n_y}}$$

(III.81)

De cette dernière équation, et à cause de l'effet des conditions aux limites imposées dans les faces Ouest et Nord du volume de contrôle  $V_{n_x,n_y}$ , le terme source de la propriété transportée  $\Phi$  devient :

$$(\bar{\psi}V_C)_{n_x,n_y} = \psi_{u_{n_x,n_y}} + \frac{2\Gamma_{e_{n_x,n_y}} A_{n_{n_x,n_y}}}{\Delta x} \Phi_{cd} + \frac{2\Gamma_{n_{n_x,n_y}} A_{n_{n_x,n_y}}}{\Delta y} \Phi_{da} + \psi_{p_{n_x,n_y}} \Phi_{n_x,n_y} \quad (III.82)$$

La détermination des valeurs de  $\Phi$  au sein du domaine bidimensionnel  $\Omega$ , paru dans la figure (III.5), nécessite la résolution, en utilisant les outils de l'analyse numérique, du système d'équations algébriques suivant :



$$\begin{aligned}
 & - \left[ \frac{\Gamma_{e_{i,1}} A_{e_{i,1}}}{\Delta x} + \frac{2\Gamma_{w_{i,1}} A_{w_{i,1}}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{n_{i,1}} A_{n_{i,1}}}{\Delta y} + \frac{2\Gamma_{s_{i,1}} A_{s_{i,1}}}{\Delta y} - \psi_{p_{i,1}} \right] \phi_{1,1} + \frac{\Gamma_{e_{i,1}} A_{e_{i,1}}}{\Delta x} \phi_{2,1} \\
 & + \frac{\Gamma_{n_{i,1}} A_{n_{i,1}}}{\Delta y} \phi_{1,2} = - \frac{2\Gamma_{w_{i,1}} A_{w_{i,1}}}{\Delta x} \phi_{ab} - \frac{2\Gamma_{s_{i,1}} A_{s_{i,1}}}{\Delta y} \phi_{bc} - \psi_{u_{i,1}} \\
 & \frac{\Gamma_{w_{i,1}} A_{w_{i,1}}}{\Delta x} \phi_{i-1,1} - \left[ \frac{\Gamma_{e_{i,1}} A_{e_{i,1}}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{w_{i,1}} A_{w_{i,1}}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{n_{i,1}} A_{n_{i,1}}}{\Delta y} + \frac{2\Gamma_{s_{i,1}} A_{s_{i,1}}}{\Delta y} - \psi_{p_{i,1}} \right] \phi_{i,1} + \frac{\Gamma_{e_{i,1}} A_{e_{i,1}}}{\Delta x} \phi_{i+1,1} \\
 & + \frac{\Gamma_{n_{i,1}} A_{n_{i,1}}}{\Delta y} \phi_{i,2} = - \frac{2\Gamma_{s_{i,1}} A_{s_{i,1}}}{\Delta y} \phi_{bc} - \psi_{u_{i,1}} \quad \text{pour : } (2 \leq i \leq n_x - 1) \\
 & \frac{\Gamma_{w_{n_x,i}} A_{w_{n_x,i}}}{\Delta x} \phi_{n_x-1,i} - \left[ \frac{2\Gamma_{e_{n_x,i}} A_{e_{n_x,i}}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{w_{n_x,i}} A_{w_{n_x,i}}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{n_{n_x,i}} A_{n_{n_x,i}}}{\Delta y} + \frac{2\Gamma_{s_{n_x,i}} A_{s_{n_x,i}}}{\Delta y} - \psi_{p_{n_x,i}} \right] \phi_{n_x,i} \\
 & + \frac{\Gamma_{n_{n_x,i}} A_{n_{n_x,i}}}{\Delta y} \phi_{n_x,2} = - \frac{2\Gamma_{e_{n_x,i}} A_{e_{n_x,i}}}{\Delta x} \phi_{cd} - \frac{2\Gamma_{s_{n_x,i}} A_{s_{n_x,i}}}{\Delta y} \phi_{bc} - \psi_{u_{n_x,i}} \\
 & - \left[ \frac{\Gamma_{e_{i,j}} A_{e_{i,j}}}{\Delta x} + \frac{2\Gamma_{w_{i,j}} A_{w_{i,j}}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{n_{i,j}} A_{n_{i,j}}}{\Delta y} + \frac{\Gamma_{s_{i,j}} A_{s_{i,j}}}{\Delta y} - \psi_{p_{i,j}} \right] \phi_{1,j} + \frac{\Gamma_{e_{i,j}} A_{e_{i,j}}}{\Delta x} \phi_{2,j} + \frac{\Gamma_{n_{i,j}} A_{n_{i,j}}}{\Delta y} \phi_{1,j+1} \\
 & + \frac{\Gamma_{s_{i,j}} A_{s_{i,j}}}{\Delta y} \phi_{1,j-1} = - \frac{2\Gamma_{w_{i,j}} A_{w_{i,j}}}{\Delta x} \phi_{ab} - \psi_{u_{i,j}} \quad \text{pour : } (2 \leq j \leq n_y - 1) \\
 & \left( \frac{\Gamma_{i-1,j} A_{i-1,j}}{\Delta x} \right) \phi_{i-1,j} - \left( \frac{\Gamma_{i-1,j} A_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{i+1,j} A_{i+1,j}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{i,j-1} A_{i,j-1}}{\Delta y} + \frac{\Gamma_{i,j+1} A_{i,j+1}}{\Delta y} - \psi_p \right) \phi_{i,j} + \\
 & \left( \frac{\Gamma_{i+1,j} A_{i+1,j}}{\Delta x} \right) \phi_{i+1,j} + \left( \frac{\Gamma_{i,j-1} A_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \phi_{i,j-1} + \left( \frac{\Gamma_{i,j+1} A_{i,j+1}}{\Delta y} \right) \phi_{i,j+1} = -\psi_u \\
 & \text{pour : } (2 \leq i \leq n_x - 1, 2 \leq j \leq n_y - 1) \\
 & \frac{\Gamma_{w_{n_x,j}} A_{w_{n_x,j}}}{\Delta x} \phi_{n_x-1,j} - \left[ \frac{2\Gamma_{e_{n_x,j}} A_{e_{n_x,j}}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{w_{n_x,j}} A_{w_{n_x,j}}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{n_{n_x,j}} A_{n_{n_x,j}}}{\Delta y} + \frac{\Gamma_{s_{n_x,j}} A_{s_{n_x,j}}}{\Delta y} - \psi_{p_{n_x,j}} \right] \phi_{n_x,j} + \\
 & \frac{\Gamma_{s_{n_x,j}} A_{s_{n_x,j}}}{\Delta y} \phi_{n_x,j-1} + \frac{\Gamma_{n_{n_x,j}} A_{n_{n_x,j}}}{\Delta y} \phi_{n_x,j+1} = - \frac{2\Gamma_{e_{n_x,j}} A_{e_{n_x,j}}}{\Delta x} \phi_{cd} - \psi_{u_{n_x,j}} \quad \text{pour : } (2 \leq j \leq n_y - 1) \\
 & - \left[ \frac{\Gamma_{e_{i,n_y}} A_{e_{i,n_y}}}{\Delta x} + \frac{2\Gamma_{w_{i,n_y}} A_{w_{i,n_y}}}{\Delta x} + \frac{2\Gamma_{n_{i,n_y}} A_{n_{i,n_y}}}{\Delta y} + \frac{\Gamma_{s_{i,n_y}} A_{s_{i,n_y}}}{\Delta y} - \psi_{p_{i,n_y}} \right] \phi_{1,n_y} + \frac{\Gamma_{e_{i,n_y}} A_{e_{i,n_y}}}{\Delta x} \phi_{2,n_y} \\
 & + \frac{\Gamma_{s_{i,n_y}} A_{s_{i,n_y}}}{\Delta y} \phi_{1,n_y-1} = - \frac{2\Gamma_{w_{i,n_y}} A_{w_{i,n_y}}}{\Delta x} \phi_{ab} - \frac{2\Gamma_{n_{i,n_y}} A_{n_{i,n_y}}}{\Delta y} \phi_{da} - \psi_{u_{i,n_y}} \\
 & \frac{\Gamma_{w_{i,n_y}} A_{w_{i,n_y}}}{\Delta x} \phi_{i-1,n_y} - \left[ \frac{\Gamma_{e_{i,n_y}} A_{e_{i,n_y}}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{w_{i,n_y}} A_{w_{i,n_y}}}{\Delta x} + \frac{2\Gamma_{n_{i,n_y}} A_{n_{i,n_y}}}{\Delta y} + \frac{\Gamma_{s_{i,n_y}} A_{s_{i,n_y}}}{\Delta y} - \psi_{p_{i,n_y}} \right] \phi_{i,n_y} + \\
 & \frac{\Gamma_{e_{i,n_y}} A_{e_{i,n_y}}}{\Delta x} \phi_{i+1,n_y} + \frac{\Gamma_{s_{i,n_y}} A_{s_{i,n_y}}}{\Delta y} \phi_{i,n_y-1} = - \frac{2\Gamma_{n_{i,n_y}} A_{n_{i,n_y}}}{\Delta y} \phi_{da} - \psi_{u_{i,n_y}} \quad \text{pour : } (2 \leq i \leq n_x - 1) \\
 & \frac{\Gamma_{w_{n_x,n_y}} A_{w_{n_x,n_y}}}{\Delta x} \phi_{n_x-1,n_y} - \left[ \frac{2\Gamma_{e_{n_x,n_y}} A_{e_{n_x,n_y}}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{w_{n_x,n_y}} A_{w_{n_x,n_y}}}{\Delta x} + \frac{2\Gamma_{n_{n_x,n_y}} A_{n_{n_x,n_y}}}{\Delta y} + \frac{\Gamma_{s_{n_x,n_y}} A_{s_{n_x,n_y}}}{\Delta y} - \psi_{p_{n_x,n_y}} \right] \phi_{n_x,n_y} + \\
 & \frac{\Gamma_{s_{n_x,n_y}} A_{s_{n_x,n_y}}}{\Delta y} \phi_{n_x,n_y-1} = - \frac{2\Gamma_{e_{n_x,n_y}} A_{e_{n_x,n_y}}}{\Delta x} \phi_{cd} - \frac{2\Gamma_{n_{n_x,n_y}} A_{n_{n_x,n_y}}}{\Delta y} \phi_{da} - \psi_{u_{n_x,n_y}}
 \end{aligned} \tag{III.83}$$

### III.2.3 Diffusion stationnaire tridimensionnelle

L'équation gouvernante de la diffusion stationnaire, dans un domaine tridimensionnel  $\Omega$ , peut s'écrire mathématiquement par l'équation vectorielle suivante :

$$\nabla \cdot (\Gamma \nabla \Phi) + \Psi = 0 \quad (\text{III.84})$$

En coordonnées cartésiennes, l'éq. (III.84) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \Psi = 0 \quad (\text{III.85})$$

L'éq. (III.84) ou bien (III.85) sera discrétisée dans des volumes de contrôle élémentaires  $V_c$  tridimensionnels, comme nous le montre la figure (III.17).

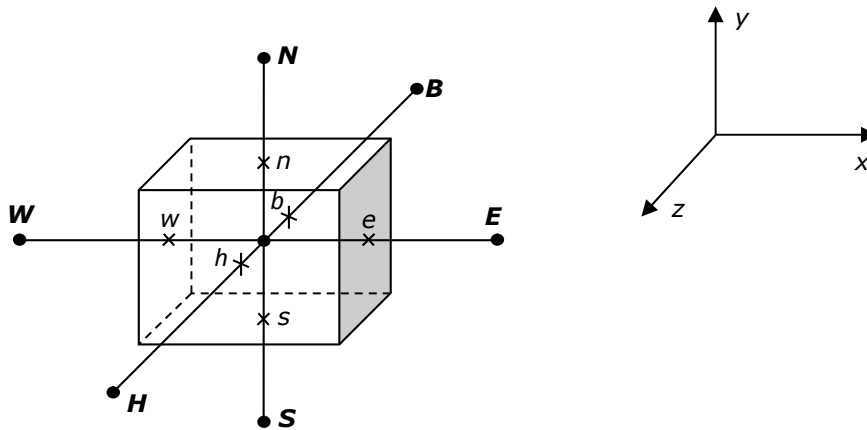


Figure III.17 : Volume de contrôle élémentaire tridimensionnel

L'intégration de l'équation (III.84) sur le volume de contrôle schématisée dans la figure (III.18), donne :

$$\underbrace{\int_{V_c} \nabla \cdot (\Gamma \nabla \Phi) dV}_{(I)} + \underbrace{\int_{V_c} \Psi dV}_{(II)} = 0 \quad (\text{III.86})$$

Par l'utilisation du théorème de la divergence, l'intégrale N° (I) sera calculé comme suit :

$$\int_{V_c} \nabla \cdot (\Gamma \nabla \Phi) dV = \int_A \Gamma \nabla \Phi \cdot \bar{n} dA \quad (\text{III.87})$$

avec :

$$A = A_w + A_e + A_s + A_n + A_b + A_h \quad (\text{III.88})$$

donc :

$$\int_A \Gamma \nabla \Phi \cdot \bar{n} dA = \int_{A_w} \Gamma \nabla \Phi \cdot \bar{n} dA + \int_{A_s} \Gamma \nabla \Phi \cdot \bar{n} dA + \int_{A_n} \Gamma \nabla \Phi \cdot \bar{n} dA + \int_{A_h} \Gamma \nabla \Phi \cdot \bar{n} dA + \int_{A_b} \Gamma \nabla \Phi \cdot \bar{n} dA \quad (\text{III.89})$$

$$\int_A \Gamma \nabla \Phi \cdot \bar{n} dA = \left[ \Gamma_e \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e A_e - \Gamma_w \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w A_w \right] + \left[ \Gamma_n \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n A_n - \Gamma_s \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s A_s \right] + \left[ \Gamma_h \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_h A_h - \Gamma_b \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_b A_b \right] \quad (\text{III.90})$$

Pour évaluer le gradient de la propriété  $\phi$  dans chaque face du volume de contrôle, on utilisera des schémas centrés de type différences finis (pour profiter de la précision de ces schémas). On écrit donc :

$$\int_A \Gamma \nabla \Phi \cdot \bar{n} dA = \Gamma_e A_e \left( \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left( \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) + \Gamma_n A_n \left( \frac{\Phi_N - \Phi_P}{\Delta y_{PN}} \right) + \Gamma_s A_s \left( \frac{\Phi_P - \Phi_S}{\Delta y_{SP}} \right) + \Gamma_h A_h \left( \frac{\Phi_H - \Phi_P}{\Delta z_{PH}} \right) + \Gamma_b A_b \left( \frac{\Phi_P - \Phi_B}{\Delta z_{BP}} \right) \quad (\text{III.91})$$

L'évaluation de la deuxième intégrale de l'éq. (III.86) nous donne :

$$\underbrace{\int_{V_c} \psi dV}_{(II)} = \bar{\psi} V_C \quad (\text{III.92})$$

Toujours pour simplifier les calculs, on considère au sein du chaque volume de contrôle constituant le domaine d'étude, une distribution linéaire de la propriété transporté  $\phi$ . On écrit donc :

$$\bar{\psi} V_C = \psi_U + \psi_P \phi_P \quad (\text{III.93})$$

En substituant les éqts. (III.91) et (III.93) dans l'éq. (III.86), on obtient :

$$\Gamma_e A_e \left( \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left( \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) + \Gamma_n A_n \left( \frac{\Phi_N - \Phi_P}{\Delta y_{PN}} \right) + \Gamma_s A_s \left( \frac{\Phi_P - \Phi_S}{\Delta y_{SP}} \right) + \Gamma_h A_h \left( \frac{\Phi_H - \Phi_P}{\Delta z_{PH}} \right) + \Gamma_b A_b \left( \frac{\Phi_P - \Phi_B}{\Delta z_{BP}} \right) + \psi_U + \psi_P \phi_P = 0 \quad (\text{III.94})$$

ou bien :

$$\left( \frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{WP}} + \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_s A_s}{\Delta y_{SP}} + \frac{\Gamma_n A_n}{\Delta y_{PN}} + \frac{\Gamma_b A_b}{\Delta z_{BP}} + \frac{\Gamma_h A_h}{\Delta z_{PH}} - \psi_p \right) \phi_p =$$

$$\left( \frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{WP}} \right) \phi_w + \left( \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_e + \left( \frac{\Gamma_s A_s}{\Delta y_{SP}} \right) \phi_s + \left( \frac{\Gamma_n A_n}{\Delta y_{PN}} \right) \phi_n$$

$$\left( \frac{\Gamma_b A_b}{\Delta y_{BP}} \right) \phi_s + \left( \frac{\Gamma_h A_h}{\Delta y_{PH}} \right) \phi_h + \psi_u$$
(III.95)

Finalement, la forme discrète générale de la diffusion stationnaire, au sein du volume de contrôle tridimensionnel  $V_C$  (voir fig. III.17), peut se mettre comme suit :

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_e \phi_e + a_s \phi_s + a_n \phi_n + a_b \phi_b + a_h \phi_h + \psi_u$$
(III.96)

avec :

$a_w$	$a_e$	$a_s$	$a_n$	$a_b$	$a_h$	$a_p$
$\frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}}$	$\frac{\Gamma_s A_s}{\Delta y_{SP}}$	$\frac{\Gamma_n A_n}{\Delta y_{PN}}$	$\frac{\Gamma_b A_b}{\Delta z_{BP}}$	$\frac{\Gamma_h A_h}{\Delta z_{PH}}$	$a_w + a_e + a_s + a_n + a_b + a_h - \psi_p$

Il faut noter que l'éq. (III.96) est valable uniquement pour les volumes de contrôle  $V_C$  dont leurs faces ne coïncident pas avec les limites du domaine d'étude  $\Omega$ . Dans le cas contraire on suit les mêmes démarches qu'on a citées dans (Chap. III, § 2.2.4).

### III.3 Problèmes d'advection-diffusion Stationnaire

Dans cette partie on calcul, en utilisant la méthode des volumes finis, la forme discrète de l'équation gouvernante du transport mixte (*transport par advection-diffusion*) de la propriété  $\phi$ . On se limite dans cette partie au transport stationnaire unidimensionnel, de plus nous étudierons plusieurs schémas, qui seront par la suite utilisés pour améliorer la discrétisation des opérateurs différentiels, parus dans le terme advectif de l'équation de transport.

#### III.3.1 Advection-diffusion stationnaire unidimensionnelle

Le transport advectif-diffusif stationnaire unidimensionnel de la propriété spécifique  $\phi$  est gouverné par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (\text{III.96})$$

avec  $\rho$  désigne la masse volumique du fluide en écoulement et  $u$  sa vitesse.

La conservation de la masse au sein de l'écoulement peut s'écrire par :

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \quad (\text{III.97})$$

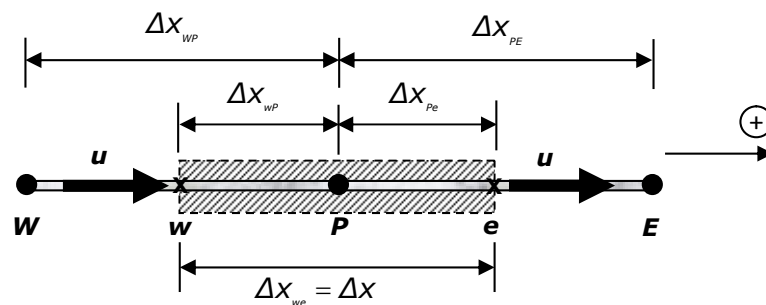


Figure III.18 : Géométries du volume de contrôle utilisé pour le problème d'advection-diffusion stationnaire unidimensionnel

L'intégration de l'éq. (III.96) au sein du volume de contrôle indiqué dans la fig. (III.18) donne :

$$\int_{V_c} \frac{d}{dx}(\rho u \phi) dV = \int_{V_c} \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV \quad (\text{III.98})$$

D'après l'éq. (III.4) on a :

$$\int_{V_c} \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right) dV = \left( \Gamma \frac{d\Phi}{dx} A \right)_e - \left( \Gamma \frac{d\Phi}{dx} A \right)_w \quad (\text{III.99})$$

de plus :

$$\begin{aligned} \int_{V_c} \frac{d}{dx} (\rho u \Phi) dV &= \int_{A_c} [\rho u \Phi]_w^e dA \\ &= \int_{A_e} (\rho u \Phi) dA - \int_{A_w} (\rho u \Phi) dA \\ &= (\rho u \Phi A)_e - (\rho u \Phi A)_w \end{aligned} \quad (\text{III.100})$$

avec  $A = dy \cdot dz$ .

En remplaçant les éqts. (III.99) et (III.100) dans l'éq. (III.98), on obtient :

$$(\rho u \Phi A)_e - (\rho u \Phi A)_w = \left( \Gamma \frac{d\Phi}{dx} A \right)_e - \left( \Gamma \frac{d\Phi}{dx} A \right)_w \quad (\text{III.101})$$

Nous suivons les mêmes démarches pour l'équation de conservation de la masse (III.97), on trouve :

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0 \quad (\text{III.102})$$

Nous définissons deux variables comme suit :

$$\begin{cases} F = \rho u \\ D = \frac{\Gamma}{\Delta x} \end{cases} \quad (\text{III.103})$$

qui désignent respectivement, le débit massique par unité de surface et la conductance diffusif. Sur les faces Ouest et Est du  $V_c$ , ces deux variables s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} F_w = (\rho u)_w \\ D_w = \frac{\Gamma_w}{\Delta x_{WP}} \end{cases} \quad (\text{III.104})$$

$$\begin{cases} F_e = (\rho u)_e \\ D_e = \frac{\Gamma_e}{\Delta x_{PE}} \end{cases} \quad (\text{III.105})$$

Pour simplifier les démarches de résolution nous considérons  $A_w = A_e = A$ , et nous traitons le terme diffusif par la même procédure qu'on a utilisée pour la résolution du problème

de diffusion stationnaire (voir Chap. III, § 2). L'éq. (III.101) s'écrit donc :

$$(\rho u)_e \Phi_e A_e - (\rho u)_w \Phi_w A_w = \Gamma_e A_e \left( \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left( \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) \quad (\text{III.106})$$

ou bien :

$$F_e \Phi_e - F_w \Phi_w = D_e (\Phi_E - \Phi_P) - D_w (\Phi_P - \Phi_W) \quad (\text{III.107})$$

La même chose pour l'éq. (III.102). Cette dernière devient :

$$F_e - F_w = 0 \quad (\text{III.108})$$

Nous remarquons, en examinant l'équation (III.107), que la résolution de cette équation nécessite l'évaluation de la propriété spécifique  $\phi$  dans les faces Ouest et Est du volume de contrôle  $V_c$ . Nous considérons une vitesse d'écoulement constante, les valeurs de  $\phi$  dans les faces du  $V_c$  seront estimées comme suit :

### III.3.1.1 Schéma centré pour le terme d'advection

Pour un maillage régulier ( $\Delta x_{WP} = \Delta x_{PE} = C^{te}$ ), les valeurs de  $\phi$  dans les faces de  $V_c$  peuvent être données par :

$$\begin{cases} \Phi_w = \frac{(\Phi_W + \Phi_P)}{2} \\ \Phi_e = \frac{(\Phi_P + \Phi_E)}{2} \end{cases} \quad (\text{III.109})$$

En substituant l'éq. (III.109) dans l'éq. (III.107), nous trouvons :

$$\frac{F_e}{2} (\Phi_P + \Phi_E) - \frac{F_w}{2} (\Phi_W + \Phi_P) = D_e (\Phi_E - \Phi_P) - D_w (\Phi_P - \Phi_W) \quad (\text{III.110})$$

ou bien :

$$\left[ \left( \frac{F_e}{2} + D_e \right) - \left( \frac{F_w}{2} - D_w \right) \right] \Phi_P = \left( -\frac{F_e}{2} + D_e \right) \Phi_E + \left( \frac{F_w}{2} + D_w \right) \Phi_W \quad (\text{III.111})$$

Après réarrangement de l'éq. (III.111), cette dernière prend la forme :

$$\left[ \left( D_w + \frac{F_w}{2} \right) + \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right) + (F_e - F_w) \right] \Phi_P = \left( D_w + \frac{F_w}{2} \right) \Phi_W + \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right) \Phi_E \quad (\text{III.112})$$

Donc, la forme discrète générale de l'éq. (III.96) s'écrit comme suit :

$$a_p \Phi_p = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W \quad (\text{III.113})$$

avec :

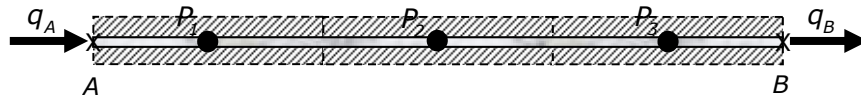
$a_W$	$a_E$	$a_p$
$D_w + \frac{F_w}{2}$	$D_e - \frac{F_e}{2}$	$a_W + a_E + (F_e - F_w)$

### III.3.1.1.1 Evaluation du schéma centré

En volume finis, un schéma est jugé préférable pour la discrétisation du terme d'advection s'il vérifié les critères suivants :

#### Conservation

Soit  $\Omega$  un domaine unidimensionnel constitué de trois volumes de contrôle comme nous l'indique la figure III.19. Nous désignons par  $q_A$  et  $q_B$  les densités de flux de  $\Phi$  traversant respectivement les limites amont et aval du  $\Omega$  (*densité de flux de chaleur*  $\left[ \frac{J}{m^2s} \right]$  en thermique par exemple).



**Figure III.19 :** Domaine d'étude  $\Omega$  adopté pour l'étude du critère de conservation du schéma centré

La densité de flux de la propriété spécifique  $\Phi$ , transporté par advection-diffusion à travers la face Ouest du  $V_c$ , est donnée par :

$$q_w = -\Gamma_w \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w + (\rho u)_w \Phi_w \quad (\text{III.114})$$

Sur la face Est, ce flux égal à :

$$q_e = -\Gamma_e \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e + (\rho u)_e \Phi_e \quad (\text{III.115})$$



De l'éq. (III.114) et l'éq. (III.115), la densité de flux net de  $\phi$ , sur un volume de contrôle arbitraire, est égale à :

$$q_{T_{V_c}} = q_e - q_w = \left[ -\Gamma_e \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e + (\rho u)_e \phi_e \right] - \left[ -\Gamma_w \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w + (\rho u)_w \phi_w \right] \quad (\text{III.116})$$

En introduisant l'éq. (III.109) dans l'éq. (III.116), et en utilisant des schémas centrés pour les termes de diffusion, la densité de flux net dans  $V_c$  devient :

$$q_{T_{V_c}} = \left[ -\frac{\Gamma}{\Delta x_{PE}} (\phi_E - \phi_P) + (\rho u)_e \frac{\phi_P + \phi_E}{2} \right] - \left[ -\frac{\Gamma}{\Delta x_{WP}} (\phi_P - \phi_W) + (\rho u)_w \frac{\phi_W + \phi_P}{2} \right] \quad (\text{III.117})$$

Dans le domaine d'étude schématisé en figure III.19, le flux net de  $\phi$  dans ce domaine est :

$$q_{T_\Omega} = q_{T_{V_{c1}}} + q_{T_{V_{c2}}} + q_{T_{V_{c3}}}$$

(III.118)

$$\begin{aligned} q_{T_\Omega} = & \left( \left[ -\frac{\Gamma_{e1}}{\Delta x_{12}} (\phi_2 - \phi_1) + (\rho u)_{e1} \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right] - q_A \right) \\ & + \left( \left[ -\frac{\Gamma_{e2}}{\Delta x_{23}} (\phi_3 - \phi_2) + (\rho u)_{e2} \frac{\phi_2 + \phi_3}{2} \right] - \left[ -\frac{\Gamma_{w2}}{\Delta x_{12}} (\phi_2 - \phi_1) + (\rho u)_{w2} \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right] \right) \\ & + \left( q_B - \left[ -\frac{\Gamma_{w3}}{\Delta x_{23}} (\phi_3 - \phi_2) + (\rho u)_{w3} \frac{\phi_2 + \phi_3}{2} \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{III.119})$$

On sait bien que :

$$\begin{cases} \Gamma_{e1} = \Gamma_{w2} \\ \Gamma_{e2} = \Gamma_{w3} \\ (\rho u)_{e1} = (\rho u)_{w2} \\ (\rho u)_{e2} = (\rho u)_{w3} \end{cases}$$

(III.120)

En substituant l'éq. (III.120) dans l'éq. (III.119), et après calcul on obtient :

$$q_{T_\Omega} = q_B - q_A \quad (\text{III.121})$$

De cette dernière équation, nous constatons que le schéma centré est conservatif.

### **Bornitude**

La condition de bornitude doit être vérifiée par le critère de Scarborough comme suit :

$$\frac{\sum |a_{na}|}{|a'_p|} \leq 1 \quad : \text{ dans tous les noeuds} \quad \text{(III.122)}$$

$$< 1 \quad : \text{ au moins dans un seul noeud}$$

avec  $a_{na}$  représentent les coefficients de  $\phi$ , parus dans l'éq. (III.113), associées aux nœuds adjacents au nœud pivot  $P$ , et  $a'_p$  coefficient définit par :

$$a'_p = a_p - \psi_p \quad \text{(III.123)}$$

L'éq. (III.122) est toujours vérifiée sauf si  $a_w$  et  $a_e$  sont positifs. Selon l'éq. (III.113) et dans le cas d'un écoulement positif ( $u > 0$ ) on a ( $a_w > 0$ ). Par contre pour ( $a_e > 0$ ) il faut que :

$$D_e - \frac{F_e}{2} > 0 \quad \text{(III.124)}$$

$$\Rightarrow Pe_e < 2 \quad \text{(III.125)}$$

avec :  $Pe_e = \frac{F_e}{D_e}$  représente le nombre de Peclet de maille dans la face Est du  $V_c$ .

### **Transportivité**

Le schéma centré ne prend pas en considération l'influence du sens d'écoulement sur la valeur estimée du gradient de  $\phi$  dans les faces de  $V_c$ . Autrement dit, ce schéma ne vérifie par le critère de transportivité (quelque soit le sens et l'intensité du champ de vitesse, pour un schéma centré  $\phi_w = \frac{\phi_w + \phi_p}{2}$  et  $\phi_e = \frac{\phi_p + \phi_e}{2}$ ).

### **Précision**

Le schéma centré est précis d'ordre deux. Autrement dit, l'erreur de troncature

est proportionnelle au pas carré :  $\frac{\Delta x^{(n+1)}}{(n+1)!} \left( \frac{\partial^{(n+1)} f(\xi)}{\partial x^{(n+1)}} \right) \equiv O(\Delta x^2)$ . Donc ce schéma est bon

pour la discrétisation, sous certaines conditions, des termes d'advection. Les termes de diffusion, dans la plupart des points de maillage, sont toujours évalués par ce schéma.

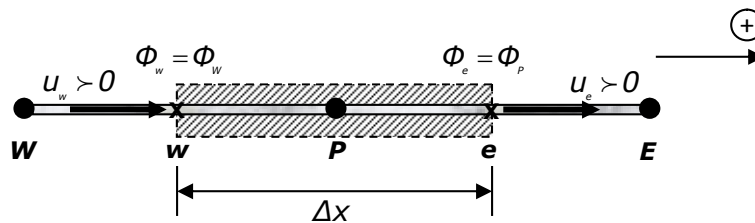
▪ **Remarque :**

Nous avons vu que le schéma centré est convergente, si le nombre de Peclet de maille vérifie :  $Pe < 2$  (pour  $u > 0$ ). Cette condition signifie que :

1. Soit on considère des écoulements à champ de vitesse modéré (*diffusion domine l'advection*) ;
2. Soit on utilise des pas de discrétisation de faibles tailles.

Ces deux conditions impliquent que le schéma centré n'est pas valide pour tous les problèmes d'avection-diffusion. Pour cette raison nous étudierons par la suite d'autres types de schéma de discrétisation, dont le but de trouver le meilleur pour le traitement de ce genre de problème.

### III.3.1.2 Schéma Upwind pour le terme d'advection



**Figure III.20 :** Volume de contrôle adopté pour l'étude du schéma Upwind ( $u_w$  et  $u_e > 0$ )

Selon la figure III.20, on peut définir un schéma Upwind, pour un transport mixte (*advection-diffusion*) unidimensionnel stationnaire à champ de vitesse constant et positif, comme suit :

$$\begin{cases} \Phi_w = \Phi_W \\ \Phi_e = \Phi_P \end{cases} \quad (III.126)$$

En remplaçant l'éq. (III.126) dans l'éq. (III.107), on trouve :

$$F_e \Phi_P - F_w \Phi_W = D_e (\Phi_E - \Phi_P) - D_w (\Phi_P - \Phi_W) \quad (III.127)$$

ou bien encore :

$$[D_e + D_w + F_e] \Phi_p = (D_w + F_w) \Phi_w + D_e \Phi_e \quad (\text{III.128})$$

La solution finale doit satisfaire la conservation de la masse au sein du domaine d'étude. Pour cette raison, l'éq. (III.128) doit se réécrire de la manière suivante :

$$[(D_w + F_w) + D_e + (F_e - F_w)] \Phi_p = (D_w + F_w) \Phi_w + D_e \Phi_e \quad (\text{III.129})$$

Donc la forme générale discrète de l'éq. (III.96), relative aux volumes de contrôle dont leurs limites ne coïncident pas avec ceux du domaine d'étude, s'écrit :

$$a_p \Phi_p = a_w \Phi_w + a_e \Phi_e \quad (\text{III.130})$$

avec :

$a_w$	$a_e$	$-\psi_p$	$a_p$
$(D_w + F_w)$	$D_e$	$(F_e - F_w)$	$a_w + a_e - \psi_p$

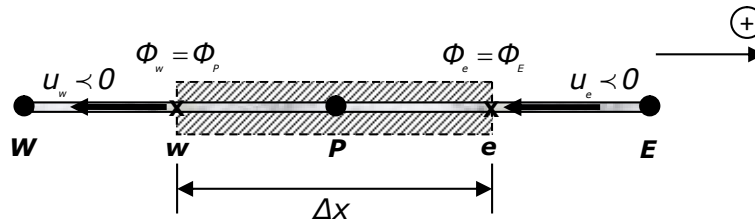


Figure III.21 : Volume de contrôle adopté pour l'étude du schéma Upwind ( $u_w$  et  $u_e < 0$ )

Pour un champ de vitesse négatif, le schéma Upwind s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \Phi_w = \Phi_p \\ \Phi_e = \Phi_E \end{cases} \quad (\text{III.131})$$

Dans ce cas là, l'éq. (III.107) devient :

$$F_e \Phi_E - F_w \Phi_p = D_e (\Phi_E - \Phi_p) - D_w (\Phi_p - \Phi_w) \quad (\text{III.132})$$

En réarrangeant cette dernière équation, nous trouvons :

$$a_p \Phi_p = a_w \Phi_w + a_e \Phi_e \quad (\text{III.133})$$

avec :

$a_w$	$a_E$	$-\psi_p$	$a_p$
$D_w$	$(D_e + F_e)$	$(F_e - F_w)$	$a_w + a_E - \psi_p$

Nous pouvons, sans tenir compte le sens d'écoulement, mettre les coefficients parus dans les éqts. (III.130) et (III.133), comme suit :

$$\begin{cases} a_w = D_w + \|F_w, 0\| \\ a_E = D_e + \|-F_e, 0\| \\ -\psi_p = (F_w + F_e) \\ a_p = a_w + a_E - \psi_p \end{cases}$$

(III.134)

avec  $\|F_w, 0\|$  désigne la valeur maximale entre  $F_w$  et  $0$ .

### III.3.1.2.1 Evaluation du schéma Upwind

#### Conservation

D'après la figure (III.19), la densité de flux net de la propriété  $\Phi$ , au sein du domaine d'étude  $\Omega$  et pour  $u > 0$ , s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} q_{T_o} = & \left( \left[ -\frac{\Gamma_{e1}}{\Delta x_{12}} (\Phi_2 - \Phi_1) + (\rho u)_{e1} \Phi_2 \right] - q_A \right) \\ & + \left( \left[ -\frac{\Gamma_{e2}}{\Delta x_{23}} (\Phi_3 - \Phi_2) + (\rho u)_{e2} \Phi_3 \right] - \left[ -\frac{\Gamma_{w2}}{\Delta x_{12}} (\Phi_2 - \Phi_1) + (\rho u)_{w2} \Phi_2 \right] \right) \\ & + \left( q_B - \left[ -\frac{\Gamma_{w3}}{\Delta x_{23}} (\Phi_3 - \Phi_2) + (\rho u)_{w3} \Phi_3 \right] \right) \end{aligned} \quad (III.135)$$

Nous injectons l'éq. (III.120) dans l'éq. (III.135), et après recalcul de cette dernière, nous obtenons :

$$q_{T_o} = q_B - q_A \quad (III.136)$$

Cette dernière équation représente la vérification de la propriété de conservation, dans le cas d'un champ d'écoulement positif, par le schéma Upwind. Autrement dit, le schéma

Upwind est conservatif. Pour une vitesse d'écoulement négative ( $u < 0$ ), nous trouverons le même résultat.

### **Bornitude**

On sait bien que pour ( $u > 0$ ) les coefficients  $a_w$  et  $a_e$ , parus dans l'éq. (III.130), sont toujours positifs. De même pour ( $u < 0$ ) (voir l'éq. (III.133)), nous disons donc que le schéma Upwind vérifie le critère de bornitude de Scarborough (éq. (III.122)) quelque soit le sens d'écoulement.

### **Transportivité**

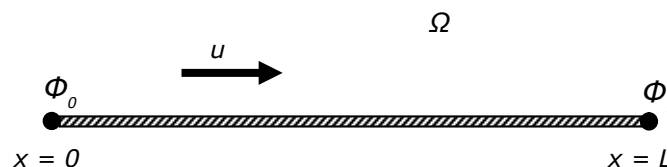
Selon les éqts. (III.126) et (III.131), nous constatons que la valeur de  $\Phi$  calculée dans les faces de  $V_c$  est basée sur le sens d'écoulement. Donc le critère de transportivité est vérifié par le schéma Upwind.

### **Précision**

D'après les développements limités de Taylor, la précision du schéma Upwind est d'ordre 1. Donc il est moins précis que le schéma centré. En plus le problème de fausse diffusion, engendré par ce schéma, quand le champ de vitesse n'est pas parallèle aux faces volumes de contrôle, rendent l'utilisation de ce schéma limitée à quelques problèmes en CFD.

### III.3.1.3 Schéma exponentiel pour le terme d'advection

Le développement du schéma exponentiel est basé sur la solution exacte du problème stationnaire d'advection-diffusion unidimensionnel, sans source de la propriété transporté  $\Phi$ . Pour la figure ci-dessous cette solution elle est donnée par :



**Figure III.22 :** Domaine unidimensionnel  $\Omega$  associé au problème stationnaire d'advection-diffusion

$$\frac{\Phi(x) - \Phi_0}{\Phi_L - \Phi_0} = \frac{\left( \exp\left[\frac{\rho u x}{\Gamma}\right] - 1 \right)}{\left( \exp\left[\frac{\rho u L}{\Gamma}\right] - 1 \right)} \quad (\text{III.137})$$

avec :  $\rho$ ,  $\Gamma$  et  $u$  représentent respectivement la masse volumique, la conductance diffusives et le champ de vitesse du fluide en écoulement.

Selon l'éq. (III.107) on a :

$$J_e - J_w = 0 \quad (\text{III.138})$$

avec :

$$\begin{cases} J_e = F_e \Phi_e - \Gamma_e \left( \frac{d\Phi}{dx} \right)_e \\ J_w = F_w \Phi_w - \Gamma_w \left( \frac{d\Phi}{dx} \right)_w \end{cases} \quad (\text{III.139})$$

représentent respectivement les densités de flux total de  $\Phi$  pénétrant les faces Est et Ouest du  $V_c$  (voir figure III.18).

De l'éq. (III.137), on peut mettre :

$$\Phi(x) = \Phi_0 + (\Phi_L - \Phi_0) \frac{\left( \exp\left[\frac{Pe \cdot x}{L}\right] - 1 \right)}{\left( \exp[Pe] - 1 \right)}$$

(III.140)

de plus :

$$\left( \frac{d\Phi}{dx} \right) = \frac{(\Phi_L - \Phi_0)}{(\exp[Pe] - 1)} \cdot \frac{Pe}{L} \cdot \exp\left[\frac{Pe \cdot x}{L}\right]$$

(III.141)

Sur la face Est du  $V_c$ , les éqts. (III.140) et (III.141) deviennent :

$$\Phi(x_e) = \Phi_p + (\Phi_e - \Phi_p) \frac{\left( \exp\left[\frac{Pe_e \cdot x_e}{\Delta x}\right] - 1 \right)}{\left( \exp[Pe_e] - 1 \right)} \quad (\text{III.142})$$

avec :

$$x_e = \frac{\Delta x}{2} \quad (\text{III.143})$$

En substituant cette dernière équation dans l'éq. (III.142), on trouve :

$$\Phi(x_e) = \Phi_p + (\Phi_E - \Phi_p) \frac{\left( \exp\left[\frac{Pe_e}{2}\right] - 1 \right)}{\left( \exp[Pe_e] - 1 \right)} \quad (\text{III.144})$$

et

$$\left( \frac{d\Phi}{dx} \right)_{x_e} = \frac{(\Phi_E - \Phi_p)}{\left( \exp[Pe_e] - 1 \right)} \cdot \frac{Pe_e}{\Delta x} \cdot \exp\left[ \frac{Pe_e \cdot \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \right] \quad (\text{III.145})$$

ou bien :

$$\left( \frac{d\Phi}{dx} \right)_{x_e} = \frac{(\Phi_E - \Phi_p)}{\left( \exp[Pe_e] - 1 \right)} \cdot \frac{Pe_e}{\Delta x} \cdot \exp\left[ \frac{Pe_e}{2} \right] \quad (\text{III.146})$$

En remplaçant les éqts. (III.144) et (III.146) dans l'éq. (III.139), on trouve sur la face Est :

$$J_e = F_e \left[ \Phi_p + (\Phi_E - \Phi_p) \frac{\left( \exp\left[\frac{Pe_e}{2}\right] - 1 \right)}{\left( \exp[Pe_e] - 1 \right)} \right] - \Gamma_e \left[ \frac{(\Phi_E - \Phi_p)}{\left( \exp[Pe_e] - 1 \right)} \cdot \frac{Pe_e}{\Delta x} \cdot \exp\left[\frac{Pe_e}{2}\right] \right] \quad (\text{III.147})$$

Tous calculs faits, l'éq. (III.147) prend la forme :

$$J_e = F_e \left[ \Phi_p - \frac{(\Phi_E - \Phi_p)}{\left( \exp[Pe_e] - 1 \right)} \right] \quad (\text{III.148})$$

De l'éq. (III.148), on peut écrire :

$$J_w = F_w \left[ \Phi_w - \frac{(\Phi_p - \Phi_w)}{\left( \exp[Pe_w] - 1 \right)} \right] \quad (\text{III.149})$$

avec :

$$Pe_w = \frac{(\rho u)_w}{\left( \frac{\Gamma}{\Delta x_{WP}} \right)_w} = \frac{F_w}{D_w} \quad (\text{III.150})$$



Maintenant nous remplaçons les éqts. (III.148) et (III.149) dans l'éq. (III.138), cette devient :

$$F_e \left[ \Phi_p - \frac{(\Phi_E - \Phi_p)}{(\exp[Pe_e] - 1)} \right] - F_w \left[ \Phi_w - \frac{(\Phi_p - \Phi_w)}{(\exp[Pe_w] - 1)} \right] = 0 \quad (III.151)$$

Sous la forme générale discrète, l'éq. (III.151) s'écrit :

$$a_p \Phi_p = a_w \Phi_w + a_e \Phi_e \quad (III.152)$$

où :

$$\begin{cases} a_w = \frac{F_w \cdot \exp[Pe_w]}{(\exp[Pe_w] - 1)} \\ a_e = \frac{F_e}{(\exp[Pe_e] - 1)} \\ a_p = a_w + a_e + (F_e - F_w) \end{cases} \quad (III.153)$$

On sait bien que le schéma exponentiel fourni, pour un problème d'advection-diffusion stationnaire unidimensionnel, sans source de la propriété transportée  $\Phi$ , une solution exacte, quelque soit la valeur du nombre de Peclet de maille ainsi que le nombre de volumes de contrôle utilisés. Malgré son comportement numérique hautement souhaitable, l'utilisation du schéma exponentiel reste limitée en CFD, notamment pour les problèmes de transport mixte. Cette limitation est due probablement aux points suivants :

- Le schéma exponentiel n'est pas valable pour traiter les problèmes de transport stationnaire bi et tridimensionnel, car sa construction est basée sur la solution exacte du problème de transport unidimensionnel sans source de  $\Phi$  ;
- De point de vue calcul numérique, ce schéma est très lourd ;
- Vue les hypothèses de construction de ce schéma, ce dernier est inutilisable pour les problèmes de transport stationnaire unidimensionnel avec source de  $\Phi$  .

### **III.3.1.4 Schéma Hybride pour le terme d'advection**

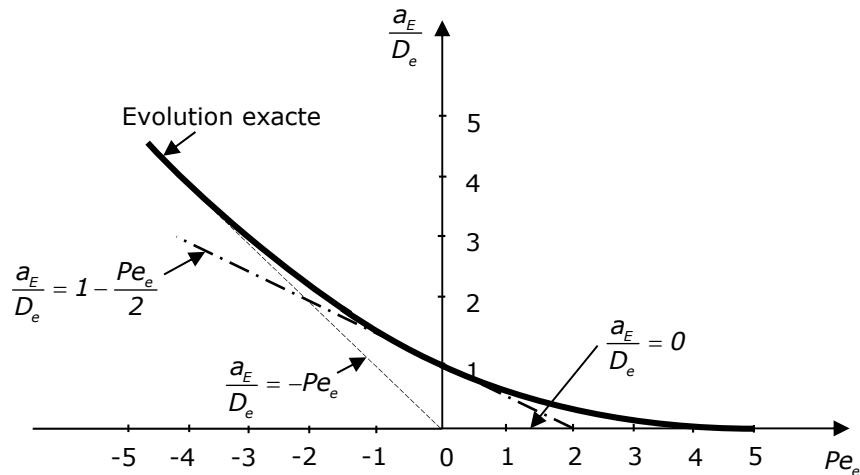
Le schéma hybride représente, pour la méthode des volumes finis, une des schémas utilisé pour la discrétisation du terme advectif de l'équation de transport. Le développement de ce schéma est basé sur le schéma exponentiel, par l'intermédiaire de

l'évolution de  $\frac{a_E}{D_e}$  en fonction du nombre de Peclet de maille  $Pe_e$  (Voir éq. (III.152)).

Selon cette dernière équation, on a :

$$\frac{a_E}{D_e} = \frac{Pe_e}{(\exp(Pe_e) - 1)} \quad (III.154)$$

Graphiquement, l'éq. (III.153) peut se présenter comme suit :



**Figure III.23 :** Variation du coefficient  $\frac{a_E}{D_e}$  en fonction de nombre de Peclet de maille  $Pe_e$  (Problème de transport stationnaire unidimensionnel sans source de la propriété  $\Phi$ )

En examinant la figure III.23, nous constatons que pour un nombre de Peclet de maille supérieur à zéro, le point adjacent  $E$  devient le nœud voisin aval par rapport au nœud pivot  $P$ , et sont influence sur ce dernier décroît avec l'accroissement du nombre de Peclet de maille. Pour des valeurs de Peclet négatives,  $E$  devient le nœud voisin amont, et l'influence de ce dernier sur le point pivot  $P$  varié proportionnellement avec le nombre de Peclet de maille.

Ces constatations peut se traduit sous mathématique comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} Pe_e \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{a_E}{D_e} \rightarrow 0 \\ Pe_e \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{a_E}{D_e} \rightarrow -Pe_e \\ Pe_e = 0 \Rightarrow \frac{a_E}{D_e} = 1 - \frac{Pe_e}{2} \text{ est la tangente à la} \\ \quad \text{variation exacte de } \frac{a_E}{D_e} \text{ en fonction de } Pe_e \end{array} \right. \quad (III.155)$$

On remarque donc, que les trois lignes indiquées dans l'éq. (III.154) représentent une approximation raisonnable de la courbe exacte. De cette remarque, le schéma hybride peut se définir comme suit :

$$\begin{cases} Pe_e < -2 \Rightarrow \frac{a_E}{D_e} = -Pe_e \\ -2 \leq Pe_e \leq 2 \Rightarrow \frac{a_E}{D_e} = 1 - \frac{Pe_e}{2} \\ Pe_e > 2 \Rightarrow \frac{a_E}{D_e} = 0 \end{cases} \quad (III.156)$$

Sous la forme compacte cette dernière équation devient :

$$a_E = D_e \cdot \max \left[ -Pe_e, 1 - \frac{Pe_e}{2}, 0 \right] \quad (III.157)$$

ou bien :

$$a_E = \max \left[ -F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0 \right] \quad (III.158)$$

De cette dernière équation, nous concluons :

- Pour  $-2 \leq Pe_e \leq 2$  le schéma Hybride est identique au schéma Centré ;
- Au-delà de cet intervalle, le schéma Hybride est identique au schéma Upwind sans terme de transport diffusif.

Finalement, par l'utilisation du schéma Hybride pour la discrétisation du terme d'advection, l'équation de transport discrétisée (*problème stationnaire unidimensionnel sans source de  $\Phi$* ) prend la forme :

$$a_p \Phi_p = a_w \Phi_w + a_E \Phi_E \quad (III.159)$$

avec :

$$\begin{cases} a_w = \max \left[ F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0 \right] \\ a_E = \max \left[ -F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0 \right] \\ a_p = a_w + a_E + (F_e - F_w) \end{cases} \quad (III.160)$$

#### **III.3.1.4.1 Evaluation du schéma Hybride**

Dans le domaine de CFD, le schéma Hybride est largement utilisé de faite que ce dernier exploite les avantages des schémas Centré et Upwind (*conservation, bornitude, transportivité*). Autrement dit, ce schéma, pour des vitesses d'écoulement élevées (*Pe élevé*), est identique au schéma Upwind, par contre à faible vitesse (*Pe faible*) il est identique au schéma centré. Le seul désavantage de ce schéma est la précision dans le terme de l'erreur de troncature, qui est de l'ordre de 1 à grande nombre de Peclet de maille (*schéma Upwind*).

### III.3.1.4.2 Schéma Hybride pour les problèmes d'advection-diffusion bidimensionnels

Par l'application du schéma Hybride pour la discrétisation du terme d'advection, l'équation discrète générale, associée au problème de transport mixte bidimensionnel sans source de la propriété transportée, s'écrit comme suit :

$$a_p \Phi_p = a_w \Phi_w + a_e \Phi_e + a_s \Phi_s + a_n \Phi_n \quad (\text{III.161})$$

avec :

$$\begin{cases} a_w = \max \left[ F_w A_w, \left( D_w + \frac{F_w}{2} \right) A_w, 0 \right] \\ a_e = \max \left[ -F_e A_e, \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right) A_e, 0 \right] \\ a_s = \max \left[ F_s A_s, \left( D_s + \frac{F_s}{2} \right) A_s, 0 \right] \\ a_n = \max \left[ -F_n A_n, \left( D_n - \frac{F_n}{2} \right) A_n, 0 \right] \\ a_p = a_w + a_e + a_s + a_n + (F_e A_e - F_w A_w) + (F_n A_n - F_s A_s) \end{cases} \quad (\text{III.162})$$

$F = \rho u$ ,  $D = \frac{\Gamma}{\Delta x}$  représentent respectivement le débit massique par unité de surface et la conductance diffusive.

N'oubliez pas que les volumes de contrôle, dont au moins une de leurs faces coïncide avec la frontière du domaine d'étude, nécessitent un traitement spécial, qui tient en considération l'effet des conditions aux limites sur le phénomène étudié.

### III.3.1.4.3 Schéma Hybride pour les problèmes d'advection-diffusion tridimensionnels

En trois dimensions, la forme discrète générale donnée dans éq. (III.160) devient :

$$a_p \Phi_p = a_w \Phi_w + a_e \Phi_e + a_s \Phi_s + a_n \Phi_n + a_b \Phi_b + a_h \Phi_h \quad (\text{III.163})$$

où les coefficients  $a_w$ ,  $a_e$ ,  $a_s$  et  $a_n$  sont déjà données dans l'éq. (III.161).

$$\begin{cases} a_b = \max \left[ F_b A_b, \left( D_b + \frac{F_b}{2} \right) A_b, 0 \right] \\ a_h = \max \left[ -F_h A_h, \left( D_h - \frac{F_h}{2} \right) A_h, 0 \right] \\ a_p = a_w + a_e + a_s + a_n + a_b + a_h + (F_e A_e - F_w A_w) \\ \quad + (F_n A_n - F_s A_s) + (F_h A_h - F_b A_b) \end{cases}$$

(III.164)

### III.3.1.5 Schéma loi de puissance pour le terme d'advection

Le schéma loi de puissance, engendré par l'amélioration du schéma Hybride, représente une bonne approximation de la solution exacte du problème de transport mixte stationnaire unidimensionnel. Pour ce schéma, la diffusion est considéré nulle quand le nombre de Peclet de maille dépasse la valeur de 10 (*champ de vitesse positif*). Au dessous de ce dernier, le flux de la propriété transporté est évalué par une expression polynomiale. Comme un exemple, la densité de flux net de  $\Phi$  dans la face West du  $V_C$ , peut donner par :

$$q_w = F_w \left[ \Phi_w - \beta_w (\Phi_p - \Phi_w) \right] \quad \text{pour } 0 < Pe < 10 \quad (\text{III.165})$$

avec :

$$\beta_w = (1 - 0.1 \cdot Pe_w)^5 / Pe_w \quad (\text{III.166})$$

et

$$q_w = F_w \Phi_w \quad \text{pour } Pe > 10 \quad (\text{III.167})$$

En ce basant sur les équations données précédemment, la forme générale discrète, associée à l'équation de transport stationnaire d'advection-diffusion unidimensionnels, sans source de la propriété transportée, peut se donner par :

$$a_p \Phi_p = a_w \Phi_w + a_e \Phi_e \quad (\text{III.168})$$

où :

$$\begin{cases} a_w = \max[F_w, 0] + D_w \cdot \max\left[0, (1 - 0.1 \cdot |Pe_w|)^5\right] \\ a_e = \max[-F_e, 0] + D_e \cdot \max\left[0, (1 - 0.1 \cdot |Pe_e|)^5\right] \\ a_p = a_w + a_e + (F_e - F_w) \end{cases} \quad (\text{III.169})$$

### III.4 Problèmes de transport instationnaires

On sait bien qu'un phénomène de transport mixte instationnaire est gouverné par l'équation aux dérivées partielles suivantes (pour la démonstration voir Chap. I) :

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}\Phi) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\Phi) + \psi \quad (\text{III.170})$$

La discrétisation de cette équation par la méthode des volumes finis, consiste à intégrer l'éq. (III.169) sur le volume de contrôle schématisé en figure III.17 et dans le temps. On procède donc comme suit :

$$\underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_{V_c} \frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} dV dt}_{(I)} + \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_{V_c} \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}\Phi) dV dt}_{(II)} = \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_{V_c} \nabla \cdot (\Gamma\nabla\Phi) dV dt}_{(III)} + \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_{V_c} \psi dV dt}_{(IV)} \quad (\text{III.171})$$

Pour clarifier les démarches de calcul, on évalue chaque intégrale séparément. On commence tout d'abord par la première intégrale (variation temporelle de  $\Phi$  dans  $V_c$ ), on écrit :

$$\underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_{V_c} \frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} dV dt}_{(I)} = \int_{V_c} (\rho\Phi) \Big|_t^{t+\Delta t} dV = \left[ (\rho\Phi)_p^{t+\Delta t} - (\rho\Phi)_p^t \right] \Delta V \quad (\text{III.172})$$

Ici  $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$  désigne la taille du volume de contrôle.

Pour la deuxième intégrale (variation convective de  $\Phi$  dans  $V_c$ ), on applique le théorème de la divergence, et on considère que le terme  $(\rho\mathbf{V}\Phi)$  est constante dans l'intervalle  $[t, t + \Delta t]$ . On trouve :

$$\underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_{V_c} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \Phi) dV dt}_{(II)} = \int_{A_c} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \Phi dA \int_t^{t+\Delta t} dt = \left[ (\rho u \Phi A)_w^e + (\rho v \Phi A)_s^n + (\rho w \Phi A)_b^h \right] \Delta t \quad (III.173)$$

On désigne par  $F_e = (\rho u A)_e$  le débit massique du fluide en écoulement, traversant la surface Est  $A_e$  du volume de contrôle  $V_c$ . La forme de L'éq. (III.172) devient donc :

$$\underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_{V_c} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \Phi) dV dt}_{(II)} = [F_e \Phi_e - F_w \Phi_w] \Delta t + [F_n \Phi_n - F_s \Phi_s] \Delta t + [F_h \Phi_h - F_b \Phi_b] \Delta t \quad (III.174)$$

A propos de l'intégrale N° 3 (*variation spatiale de  $\Phi$  dans  $V_c$* ), on utilise le théorème de la divergence, et on suppose que le terme  $(\Gamma \nabla \Phi)$  est constante dans l'intervalle temporelle  $[t, t + \Delta t]$ . De ce fait, la troisième intégrale sera calculée comme suit :

$$\underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_{V_c} \nabla \cdot (\Gamma \nabla \Phi) dV dt}_{(III)} = \int_{A_c} \Gamma (\nabla \Phi \cdot \mathbf{n}) dA \int_t^{t+\Delta t} dt = \left[ \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} A \right)_w^e + \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} A \right)_s^n + \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} A \right)_b^h \right] \Delta t \quad (III.175)$$

On utilise un schéma centré des différences finis, l'éq. (III.174) devient :

$$\underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_{V_c} \nabla \cdot (\Gamma \nabla \Phi) dV dt}_{(III)} = \left[ \left( \Gamma_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta x_{PE}} A_e - \Gamma_w \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\Delta x_{WP}} A_w \right) + \left( \Gamma_n \frac{\Phi_N - \Phi_P}{\Delta x_{PN}} A_n - \Gamma_s \frac{\Phi_P - \Phi_S}{\Delta x_{SP}} A_s \right) + \left( \Gamma_h \frac{\Phi_H - \Phi_P}{\Delta x_{PH}} A_h - \Gamma_b \frac{\Phi_P - \Phi_B}{\Delta x_{BP}} A_b \right) \right] \Delta t \quad (III.176)$$

On désigne par  $D_e = \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}}$  la conductance diffusive fois la surface de passage, dans la face Est du  $V_c$ . En conséquence, l'éq. (III.175) sera réorganisée comme suit :

$$\underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_{V_c} \nabla \cdot (\Gamma \nabla \Phi) dV dt}_{(III)} = \left[ (D_e [\Phi_E - \Phi_P] - D_w [\Phi_P - \Phi_W]) + (D_n [\Phi_N - \Phi_P] - D_s [\Phi_P - \Phi_S]) + (D_h [\Phi_H - \Phi_P] - D_b [\Phi_P - \Phi_B]) \right] \Delta t \quad (III.177)$$

Finalement, la quatrième intégrale, qui désigne la génération de  $\Phi$  dans  $V_C$  (*terme source*), peut être estimée de la manière suivante :

$$\underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_{V_C} \psi dV dt}_{(IV)} = \bar{\psi} \Delta V \Delta t \quad (III.178)$$

On suppose que  $\bar{\psi} = \psi_U + \psi_P \Phi_P$  (*variation linéaire du terme source dans chaque volume de contrôle  $V_C$* ). L'éq. (III.177) devient :

$$\underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_{V_C} \psi dV dt}_{(IV)} = [\psi_U + \psi_P \Phi_P] \Delta V \Delta t \quad (III.179)$$

En substituant les étqs. (III.171), (III.173), (III.176) et (III.178) dans l'éq. (III.170), on obtient :

$$\begin{aligned} & \left[ (\rho \Phi_P)^{t+\Delta t} - (\rho \Phi_P)^t \right] \Delta V + [F_e \Phi_e - F_w \Phi_w] \Delta t + [F_n \Phi_n - F_s \Phi_s] \Delta t + \\ & [F_h \Phi_h - F_b \Phi_b] \Delta t = \left[ (D_e [\Phi_e - \Phi_P] - D_w [\Phi_P - \Phi_w]) + \right. \\ & \left. (D_n [\Phi_n - \Phi_P] - D_s [\Phi_P - \Phi_s]) + (D_h [\Phi_h - \Phi_P] - D_b [\Phi_P - \Phi_b]) \right] \Delta t + \\ & [\psi_U + \psi_P \Phi_P] \Delta V \Delta t \end{aligned} \quad (III.180)$$

avec :  $a_t = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t}$

Finalement pour avoir une forme discrète finale, on a besoin de calculer les valeurs de la variable physique  $\Phi$  dans les faces du  $V_C$ . Autrement dit, le choix d'un schéma de discrétisation pour déterminer le terme d'advection (*schéma Centré, schéma Upwind, schéma Hybride, etc. ..., Voir (Chap. III, § I.3)*). Ce choix dépend généralement du champ de vitesse d'écoulement et de la précision souhaitée.

Le calcul numérique de l'éq. (III.179) (*calcul de la valeur de  $\Phi$  à l'instant actuel  $t + \Delta t$  dans tous les points de maillage*) nécessite aussi le choix d'un schéma de discrétisation temporel pour les termes d'advection, diffusion et source, parus dans l'éq. (III.179).

A titre d'exemple, on applique pour le temps un schéma explicite, et pour l'espace un schéma Hybride. La forme discrète générale ainsi obtenue s'écrit donc comme suit :



$$a_p \Phi_p^{t+\Delta t} = a_w \Phi_w^t + a_e \Phi_e^t + a_s \Phi_s^t + a_n \Phi_n^t + a_b \Phi_b^t + a_h \Phi_h^t \quad (\text{III.181})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_w = \max \left[ F_w, \left( D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right] \\ a_e = \max \left[ -F_e, \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right] \\ a_s = \max \left[ F_s, \left( D_s + \frac{F_s}{2} \right), 0 \right] \\ a_n = \max \left[ -F_n, \left( D_n - \frac{F_n}{2} \right), 0 \right] \\ a_b = \max \left[ F_b, \left( D_b + \frac{F_b}{2} \right), 0 \right] \\ a_h = \max \left[ -F_h, \left( D_h - \frac{F_h}{2} \right), 0 \right] \\ a_p = a_t + a_w + a_e + a_s + a_n + a_b + a_h + \\ \quad \quad \quad (F_e - F_w) + (F_n - F_s) + (F_n - F_s) \end{array} \right. \quad (\text{III.182})$$

## Références bibliographies

- [1] Jayathi Y. MURTHY : ***Numerical Methods in Heat, Mass, and Momentum Transfer***, Purdue University (2002);
- [2] Miloud TAHAR ABBES : ***Méthodes Numériques, Tome 1 : Méthodes des Différences Finies, Méthodes Intégrales et Variationnelles***, OPU, Algérie (2007) ;
- [3] J. W. Thomas : ***Numerical Partial Diferrentiel Equations : Finite Diffrence Methods***, Springer-Verlag New York, Inc. (1995) ;
- [4] C. A. J. Fletcher : ***Computational Techniques for Fluid Dynamics 2***, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, (1991) ;
- [5] J. H. Ferziger, M. Peric : ***Computational Methods for Fluid Dynamics***, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, (2002) ;
- [6] S. V. Patankar : ***Numerical Heat Transfer and Fluid Flow***, Hemisphere publishing corporation, (1980);
- [7] A. Soudani : ***Calcul Numérique, Partie 1 : Cours d'analyse numérique***, OPU, Algérie, (2015).