

Université MBB-Batna 2

Théorie de la Plasticité des barres

1^{ère} année master VOA

SII 2019-2020

rafik.demagh@univ-batna2.dz

Théorie de la Plasticité des barres

Chapitre 1 : Les Essais Mécaniques et les Modèles Rhéologiques

Essais mécaniques uni-axiaux, Fluage, Essais de traction, Essais multiaxiaux, d'indentation, de fatigue, de résilience, de ténacité. Modèles parfaits, Elasticité, Viscoélasticité, Plasticité, Solide rigide parfaitement plastique, Solide élastique linéaire parfaitement plastique, Solide élasto-plastique écrouissable, Viscoplasticité.

Chapitre 2 : Critères de Plasticité

Tresca, von Mises, Mohr-Coulomb, Drucker Prager, Ecrouissage, Lois d'écoulements.

Chapitre 3 : Plasticité des barres

Modélisation du comportement en traction–compression, Résolution explicite d'un problème d'élasto-plasticité, Solution analytique, Application aux structures en treillis.

Chapitre 4 : Plasticité des poutres en flexion

Plasticité des poutres, Rappels et notations, Modèle élasto-plastique, Flexion pure, Flexion simple, Modèle simplifié – rotule plastique.

Sommaire

L'objectif de ce cours est de présenter le modèle de comportement *élasto-plastique classique* dans le cadre des petites transformations (hpp).

Le **premier** chapitre est une introduction des phénomènes physiques. Nous présentons les mécanismes de déformations, les techniques d'essais, l'essai classique de traction-compression ainsi que quelques modèles rhéologiques.

Le **deuxième** chapitre est une rétrospective sur les notions importantes telles que critère de plasticité, condition de charge, méthodes itératives.

Le **troisième** chapitre concerne l'évolution élasto-plastique des structures treillis constituées de barres à partir d'un exemple simple traité par différentes méthodes.

Le **quatrième** chapitre s'intéresse à l'évolution élasto-plastique des poutres. Après avoir présenté un modèle élasto-plastique pour des essais de flexion, nous introduisons la notion de rotule plastique. Ce modèle simplifié est utilisé pour le calcul des charges limites des portiques.

Chapitre 1

Ce **premier** chapitre distingue les phénomènes mécaniques impliqués dans la plasticité classique où le temps et les vitesses de déformation ne jouent qu'un rôle secondaire de ceux pour lesquels le temps et/ou les vitesses de déformation jouent un rôle important comme les phénomènes de fluage, de fatigue ou de plasticité dynamique.

Mécanismes physiques de déformation

Le comportement macroscopique est en fait le résultat de déformations locales à une échelle microscopique. Cet aspect microscopique est fondamental pour la compréhension physique des phénomènes et relève du domaine des matériaux. Les concepts présentés dans ce document permettent de modéliser, dans une certaine mesure et de manière macroscopique, l'ensemble de ces phénomènes microscopiques qui sont à l'origine d'un comportement global irréversible.

Hypothèses

- Le matériau:

- Le module d'élasticité E est voisin de 200 000 Mpa
- Le coefficient de Poisson est voisin de 0,3
- La limite élastique est comprise le plus souvent entre 240 et 360 Mpa

- Les déformations:

La déformation totale ε se décompose en:

- Une déformation plastique irréversible ou résiduelle ε_p
- Une déformation élastique réversible $\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$



**AM I
GETTING
THROUGH
TO YOU?**

Traduction:
Je vous parle !!!

Désignation et caractéristiques des principaux aciers de construction

SIA 161 (1989)	Nuance d'acier selon		Limite d'élasticité f_y [N/mm ²] (1)	Résistance à la traction f_u [N/mm ²] (1)	Allongement de rupture ϵ_r [%] (2)	Désignations ou utilisation
	<i>EN 10 027-1</i> (1992)	SIA 161 (1979)				
Fe E 235	S235	Fe 360	235	360	26	Acier doux
Fe E 275	S275		275	430	22	Acier pour profilés creux
Fe E 355	S355	Fe 510	355	510	22	Acier à haute résistance
Fe E 460	S460		460	550	17	Acier à grain fin

(1) valeurs de calcul valables pour des épaisseurs ≤ 16 mm

(2) valeurs minimales valables pour des épaisseurs ≤ 40 mm

Les Hypothèses

Les barres

1- L'hypothèse de Bernoulli reste valable :

- Les sections droites restent planes;
- Les déformations dues à l'effort tranchant négligeables.

2- La barre est stable:

- on exclut la ruine par voilement (poutre à âme mince);
- ou par flambage (élément élancé).



La structure

- Petites déplacements (hpp);
- sollicitations calculées dans la configuration initiale;
- On se limite aux structures planes chargées dans leur plan et composées de poutres à plan moyen confondu avec le plan de la structure.

Phénomènes observés

1. Déformations élastiques

Elles correspondent à des variations des espaces interatomiques et à des mouvements réversibles de dislocations. Ces déformations sont essentiellement instantanément réversibles et la configuration initiale est retrouvée après décharge.

2. Déformations visqueuses

Elles correspondent à la poursuite de la déformation alors que la charge est constante, il n'y a plus d'équilibre. Le temps et les vitesses de déformation jouent un rôle important dans les lois de comportement d'un matériau visqueux. Lors de ce phénomène favorisé par l'activation thermique, on parle d'écoulement de fluage.

3. Déformations permanentes

Elles correspondent aux *mouvements irréversibles des dislocations*. Ces déplacements se font par glissement dans les plans cristallographiques. En pratique ces déplacements ne modifient pas la structure cristalline et le volume reste inchangé, on parle d'*incompressibilité plastique*.

4. Écrouissage

Ce phénomène aussi appelé *consolidation* correspond à une augmentation du nombre de point de blocage du mouvement des dislocations. Il vient contrecarrer l'augmentation du nombre de dislocations, et modifie le seuil au delà duquel les déformations ne sont plus réversibles.

5. Restauration

Ce phénomène aussi appelé recouvrance correspond à une recristallisation par regroupement de dislocations de signe opposé. Il se produit dans le temps et est favorisé par l'activation thermique.

Techniques d'essais

L'objectif des essais est de fournir à l'ingénieur, les caractéristiques mécaniques du matériau nécessaires aux calculs qu'il compte mener. Lors de ces essais, on observe les déformations que subit une éprouvette sous l'action d'un système donné de contraintes. Les différents essais d'écrouissage à température constante peuvent être classifiés comme suit :

Techniques d'essais

1. Écrouissage — Essai pour lequel la déformation ε est imposée à vitesse constante;

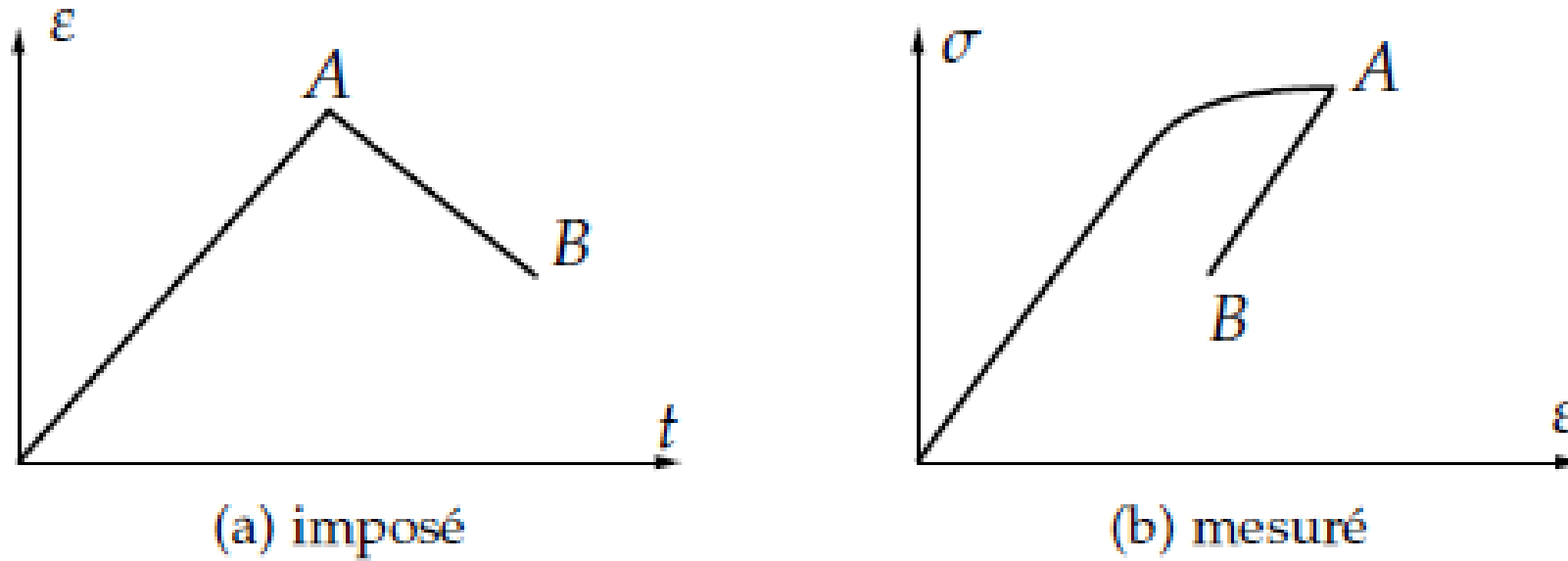
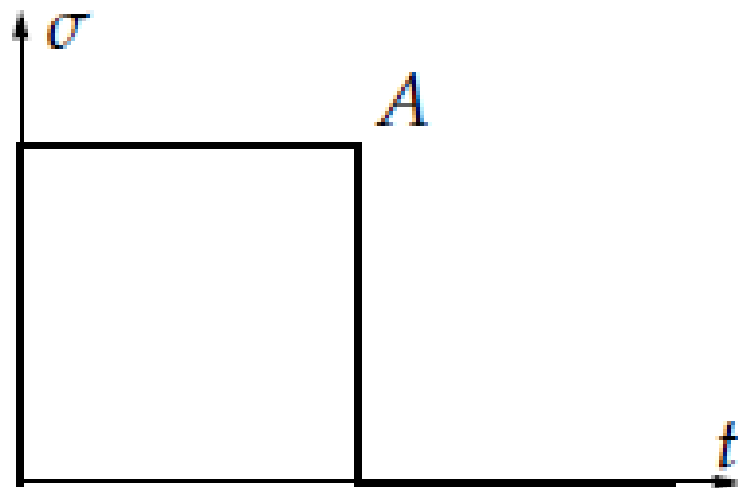


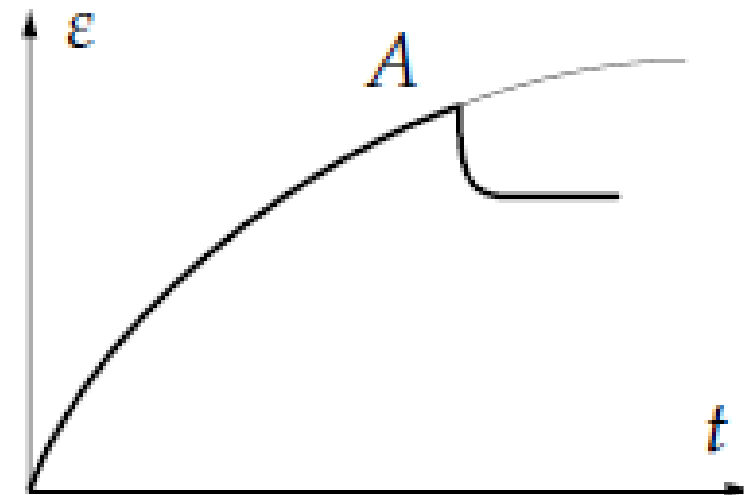
Figure 1. Essai d'Écrouissage

Techniques d'essais

2. Fluage + recouvrance — Essai pour lequel la contrainte σ est imposée grâce à une fonction échelon suivi d'attente à contrainte nulle. La courbe de réponse caractérise la *déformation retardée* ;



(a) imposé

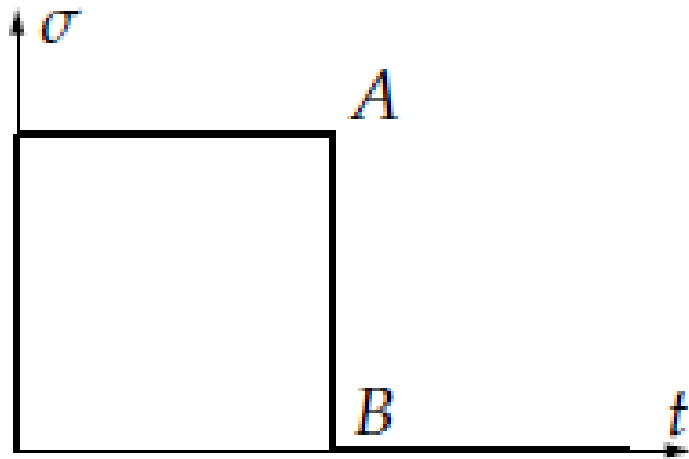


(b) mesuré

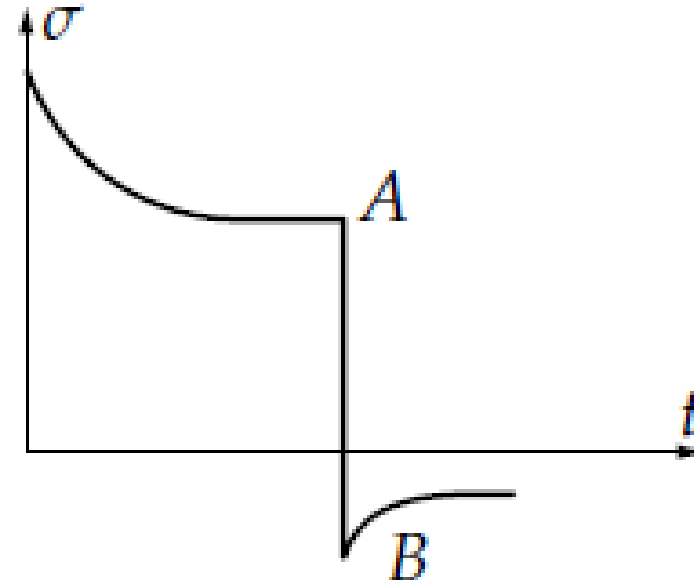
Figure 2. Essai de Fluage + Recouvrance

Techniques d'essais

3. Relaxation — Essai pour lequel la déformation ε est imposée selon une fonction échelon. La courbe de réponse caractérise la viscosité.



(a) imposé



(b) mesuré

Figure 3. Essai de Relaxation

Caractérisation mécanique des matériaux

Si l'on trace les courbes de comportement $\sigma = f(\varepsilon)$ pour un matériau ductile on obtient une courbe de même type que celle de la figure (a). À partir de cette courbe de comportement, on peut adopter plusieurs modélisation :

- (b) : modèle élasto-plastique avec écrouissage,
- (c) : modèle élasto-plastique parfait,
- (d) : modèle rigide plastique ou plastique parfait.

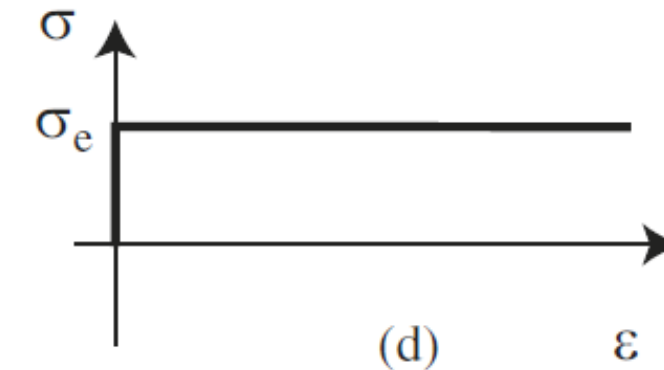
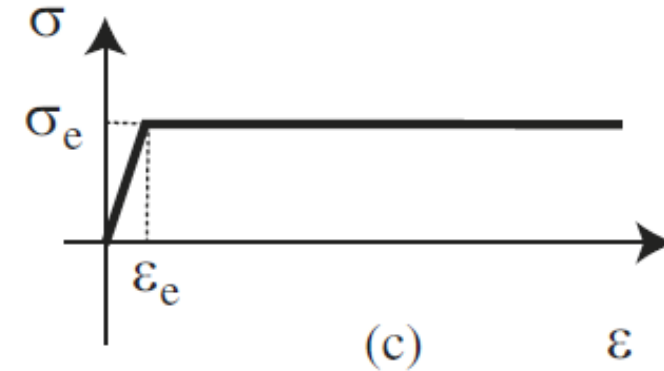
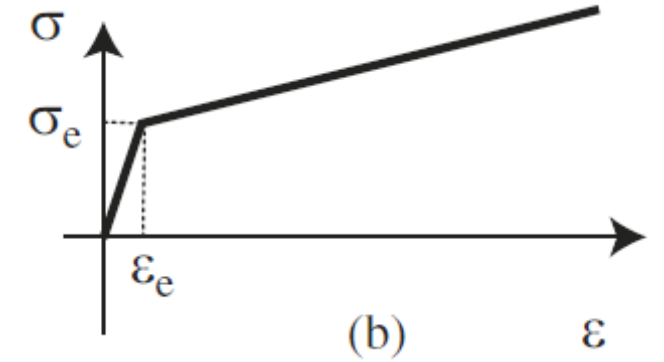
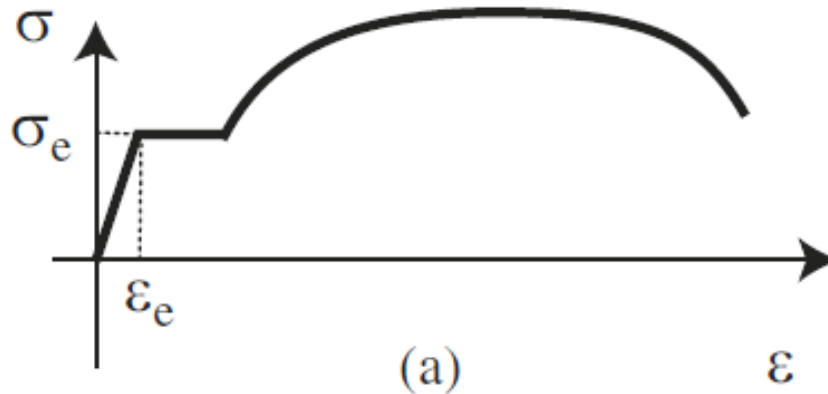


Figure 4. Modèles de comportement des matériaux ductiles (Doux)

Les Essais

Pour être reproductibles, ces essais sont normalisés. Ils peuvent être réalisés sur des éprouvettes de géométrie différente. Citons les essais les plus classiques :

chargement simple :

essai uniaxial comme l'essai de traction et compression;

chargement complexe :

essai multiaxial comme les essais de traction-torsion d'un tube mince, de traction-pression d'un tube mince, de traction biaxiale, de compression triaxiale.

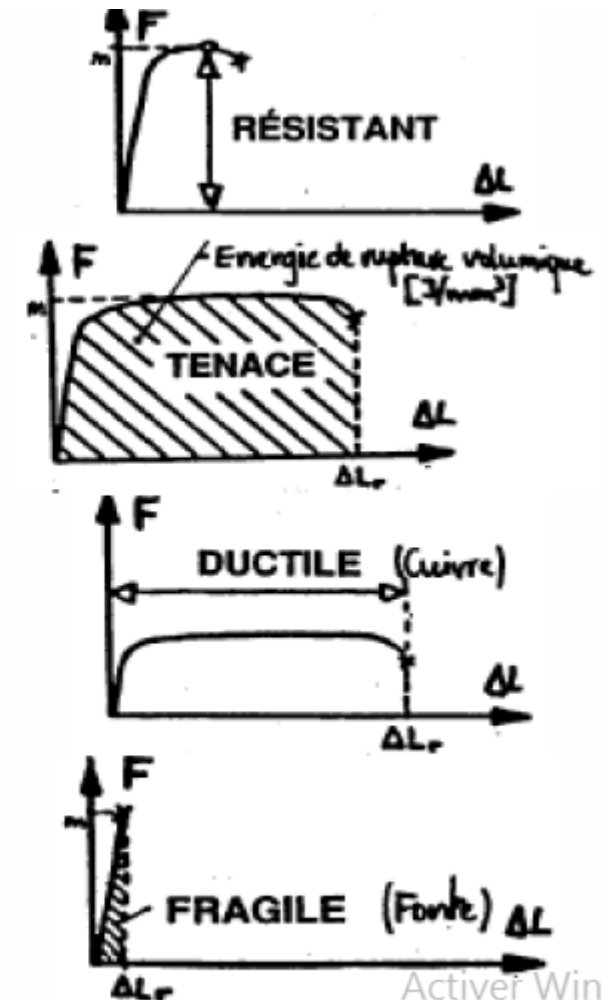
- **Résistance** : un matériau est dit résistant s'il supporte des efforts très élevés avant de se rompre.

- **Ténacité** : un matériau est dit tenace s'il supporte une grande énergie de déformation avant de rompre.

- **Ductilité** : un matériau est dit ductile s'il supporte des déformations plastiques très grandes avant de rompre.

- **Fragilité** : un matériau est dit fragile s'il supporte une faible énergie de déformation avant de rompre.

Remarques : **Ténacité = Résistance + Ductilité**
et **Ténacité = (Fragilité)⁻¹**



Activer Win
Accédez aux pa
activer Window

Figure 5. Modèles de comportement des matériaux

Plasticité des barres

Ce chapitre introduit les principales notions d'élasto-plasticité à partir de l'analyse de la réponse d'une éprouvette soumise à un essai de traction-compression. La modélisation de cet essai permet de présenter différentes schématisations couramment utilisées pour traiter des problèmes d'évolution élasto-plastique. Ces modèles sont ensuite soumis aux calculs analytique puis numérique des structures treillis.

Essai de traction

Intéressons-nous à l'aspect phénoménologique de l'essai dans le cadre de l'élasto-plasticité classique, à savoir hypothèses de transformations quasi-statiques en petites déformations et à température constante.

Considérons une éprouvette de traction sous la forme d'un cylindre homogène droit de section S_0 et de longueur ℓ_0 . Cette éprouvette est soumise à un effort de traction F comme sur la figure 6. Pour des petites déformations de l'éprouvette, l'état de contrainte peut être supposé uniforme et uniaxial (la diminution de section est négligée). Nous posons $\varepsilon = \varepsilon_{xx} = \Delta\ell/\ell_0$ et $\sigma = \sigma_{xx} = F/S_0$. Considérons les graphes (σ, ε) obtenus pour trois essais de traction avec décharge. Selon le niveau de sollicitation lors du chargement, nous obtenons les allures de la figure 7.

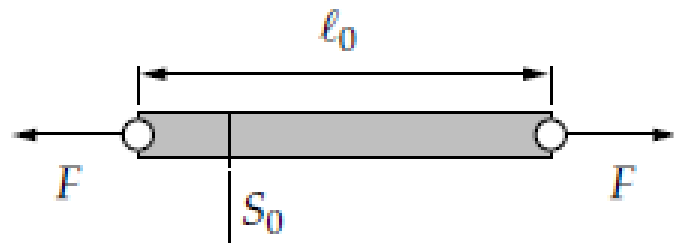
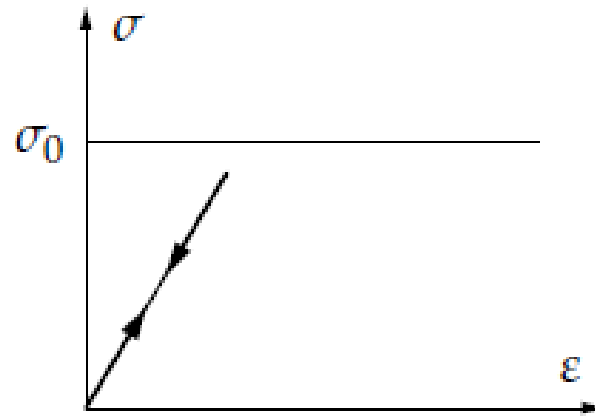
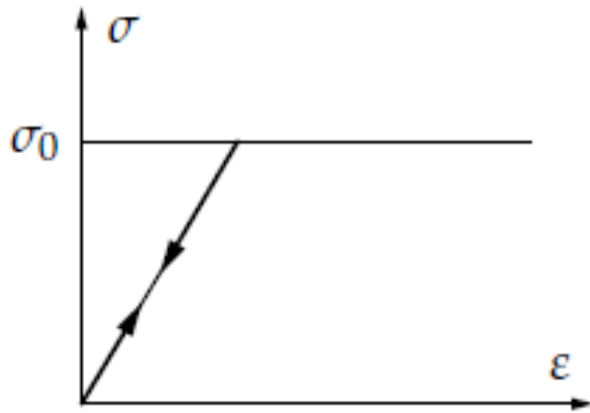


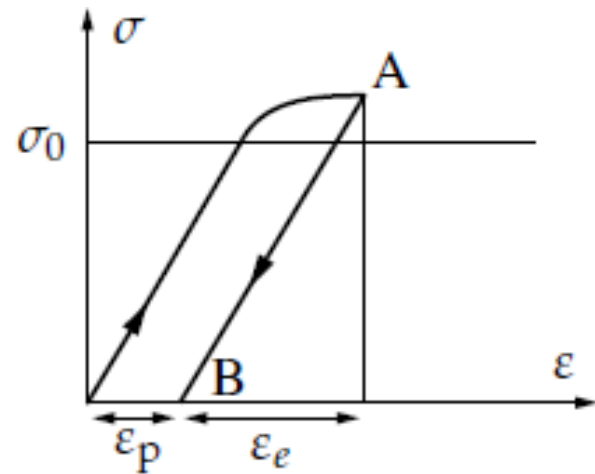
Figure 6. Eprouvette de traction



(a) essai 1 : $\sigma < \sigma_0$

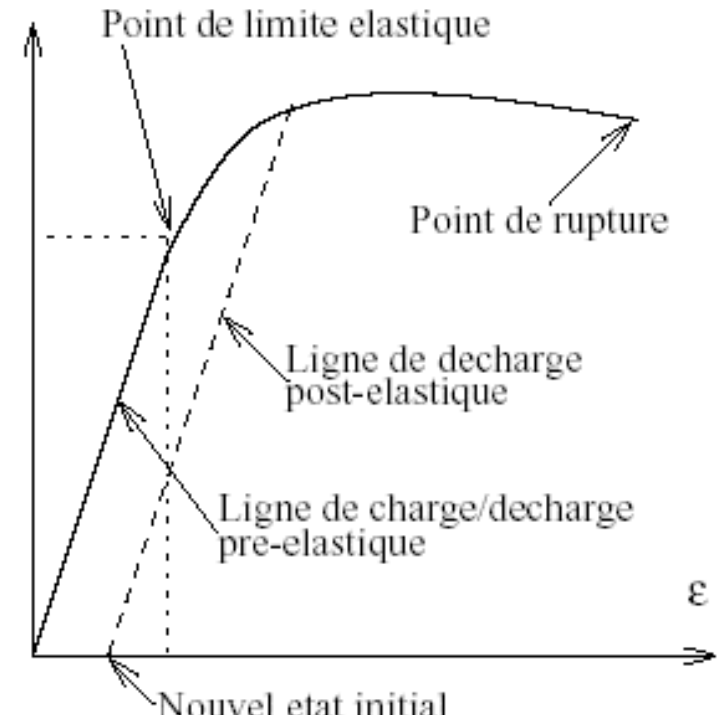


(b) essai 2 : $\sigma = \sigma_0$



(c) essai 3 : $\sigma > \sigma_0$

Figure 7. Essai de traction avec décharge



En tout point de la courbe, la déformation est $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$

Interprétation des Essais

(a). $\sigma < \sigma_0$: le système se situe dans le domaine élastique et le comportement du matériau est réversible. Il est supposé par la suite que la loi de comportement dans le domaine élastique est linéaire, soit $\sigma = E\varepsilon_e$ où E est le module de Young du matériau ;

(b). $\sigma = \sigma_0$: cet essai est impossible à réaliser physiquement. La limite d'élasticité σ_0 , seuil à partir duquel il existe des déformations irréversibles, est définie de façon conventionnelle et correspond à une fraction de déformation permanente ;

(c). $\sigma > \sigma_0$: la décharge à partir du point A (chargement maximum) s'effectue parallèlement à la charge élastique, on parle de décharge élastique. En B (charge nulle) ne subsiste que la déformation plastique ou déformation permanente ε_p .

Interprétation des Essais

Par conséquent, connaissant la déformation plastique, le seuil de plasticité actuel peut être défini à partir de la courbe d'écrouissage obtenue pour un chargement monotone.

Effectuons maintenant une série de charges-décharges consécutives. L'allure de la courbe de réponse est représentée sur la figure 8. Nous observons une évolution de la limite d'élasticité en traction due à l'écrouissage. En première approximation, nous pouvons considérer que :

- lors des chargements consécutifs la limite d'élasticité suit la courbe du chargement monotone ;
- l'écoulement plastique ne modifie pas le module d'élasticité.

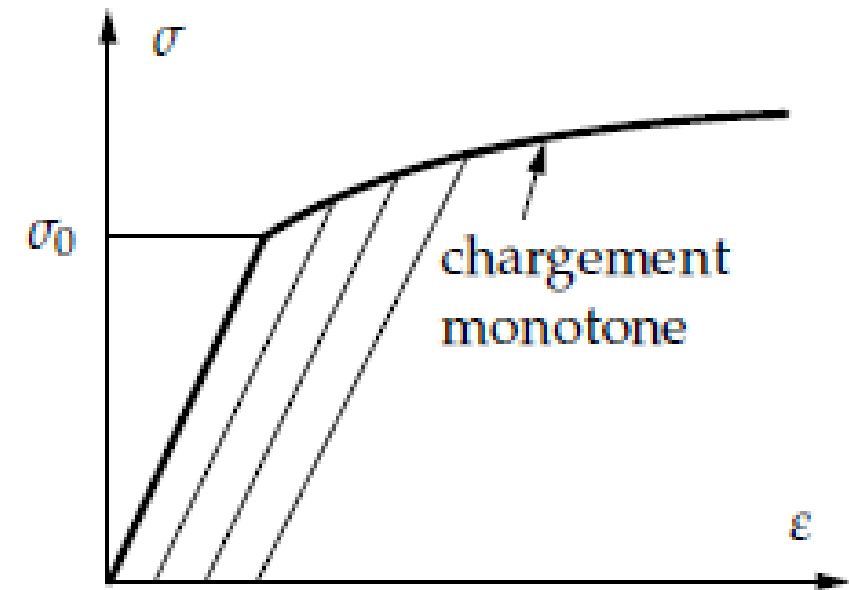


Figure. 8. Réponse à une série de charges-décharges consécutives

En fait le problème de l'évolution du domaine d'élasticité est une des difficultés majeures de la plasticité. L'exemple d'un chargement cyclique montre que la connaissance de l'état actuel (σ, ε_p) ne suffit pas *a priori* pour définir le domaine d'élasticité actuel. Sur la figure 9, après décharge nous obtenons le point O' , la déformation plastique est définie par le segment OO' . Or dans cet état, la limite d'élasticité est différente au premier et au deuxième passage (Effet de Bauschinger), Cet exemple montre que les lois décrivant l'évolution du domaine d'élasticité ont un caractère essentiellement incrémental.

Charge plastique : - Il y a variation des paramètres d'écrouissage et de la déformation plastique.

Charge ou décharge élastique : - Il n'y a pas de variation des paramètres d'écrouissage ni de la déformation plastique.

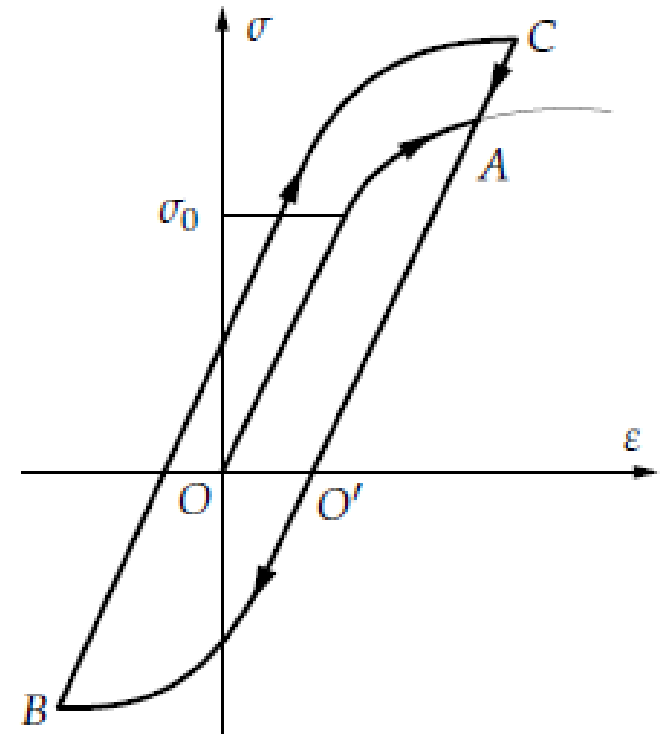
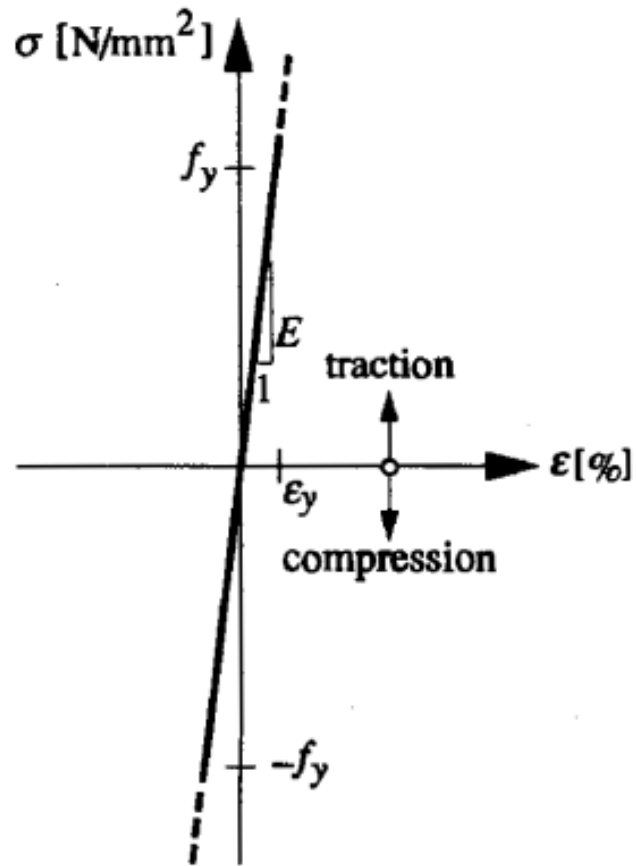


Figure 9. Historique d'un cycle de chargement OA-AB-BC

Modèle de comportement Elasto-Plastique

CALCUL ELASTIQUE



CALCUL PLASTIQUE

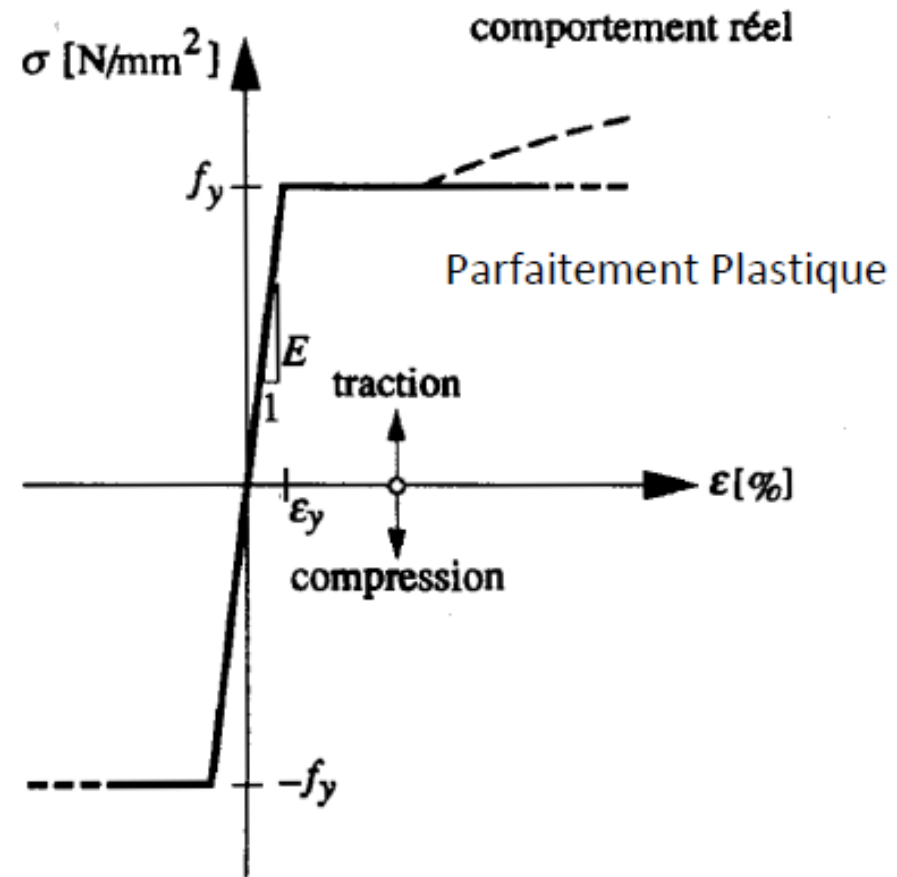
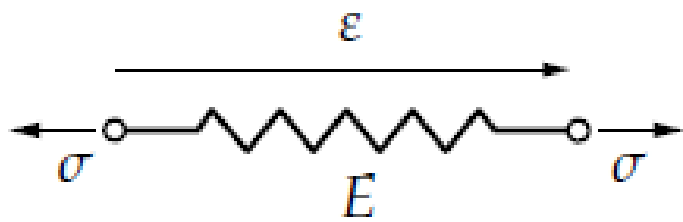


Figure 10. Diagrammes idéalisé contrainte-déformation spécifique de l'acier de construction

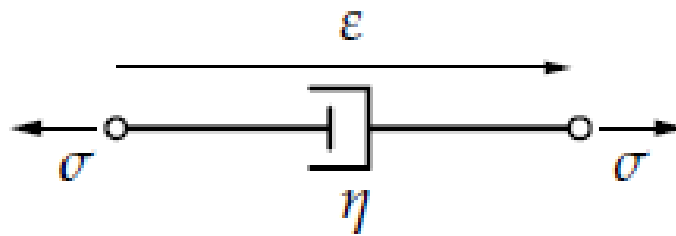
Modèles Rhéologiques

Modèles analogiques

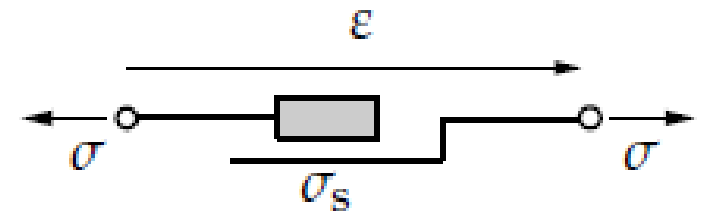
Ces modèles permettent d'avoir une image concrète simplifiée des équations traduisant les lois de comportement générales tensorielles. Les trois éléments mécaniques le plus utilisés sont décrits sur la figure 11.



(a) ressort : élasticité linéaire parfaite $\sigma = E\varepsilon$



(b) amortisseur : viscosité linéaire newtonienne $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$



(c) patin : modèle rigide plastique parfait $|\sigma| \leq \sigma_s$

Figure 11. Éléments d'assemblage

Modèles Linéaires

Ces modèles sont constitués d'assemblages de ressorts et d'amortisseurs linéaires.

Élastique parfaite

La relation qui lie les déformations aux contraintes est $\sigma = f(\varepsilon)$ comme indiqué sur la figure 12. La réversibilité est instantanée, le tableau suivant donne l'allure caractéristique des courbes de réponses aux trois types d'essais évoqués précédemment.

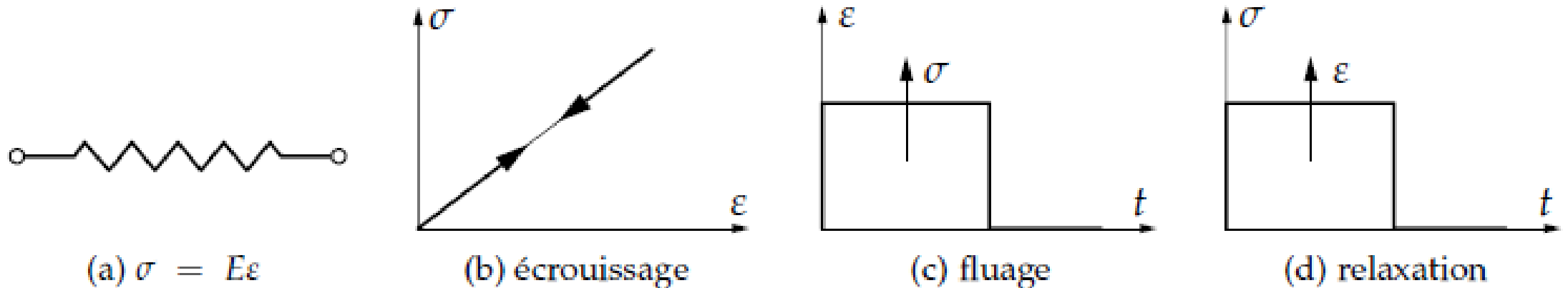


Figure 12. Elasticité parfaite

Viscosité parfaite

Dans ce cas, les contraintes dépendent seulement de la variation temporelle des déformations tel que $\sigma = f(\dot{\varepsilon})$. Les différentes relations contraintes-déformations sont illustrées sur la figure 13.

L'essai de fluage impose $\sigma = \sigma_0$, ce qui entraîne :

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta t} \quad (1)$$

et $\sigma = 0$ entraîne $\varepsilon = \varepsilon_1$, soit un fluage illimité à t_∞ .

L'essai de relaxation est théoriquement impossible, on ne peut pas imposer instantanément une déformation au système, car à une vitesse infinie correspond une contrainte infinie. Ce que nous modéliserons par une *fonction de dirac*.

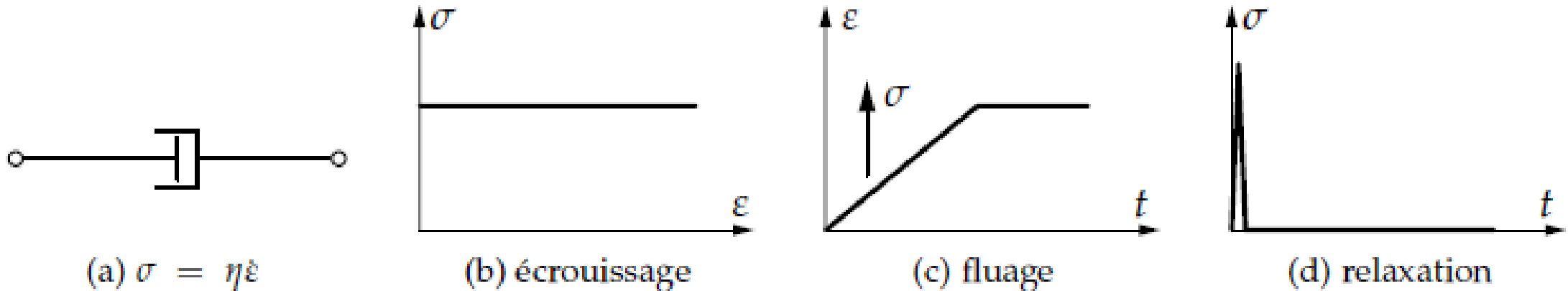


Figure 13. Viscosité parfaite

Visco-élasticité

Dans ce cas, les contraintes dépendent à la fois des déformations et de leur variation temporelle tel que $\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$. Différents modèles peuvent être proposés. Les deux plus simples sont constitués d'un montage en série ou en parallèle. Les allures des courbes de réponse sont données sur la figure 14.

Modèle de Maxwell Le modèle de Maxwell est décrit sur la figure 7. Pour l'essai de fluage $\sigma = \sigma_0$ entraîne :

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} t + \frac{\sigma_0}{E} \quad (2)$$

où $\frac{\sigma_0}{E}$ représente une déformation instantanée. Une contrainte $\sigma = 0$ entraîne $\varepsilon = \text{Cste} = \varepsilon_1$ soit un fluage illimité à t_∞ . L'essai de relaxation $\varepsilon = \varepsilon_0$ conduit à :

$$\sigma = E\varepsilon_0 \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right) \quad (3)$$

autrement dit, une relaxation complète à t_∞ .

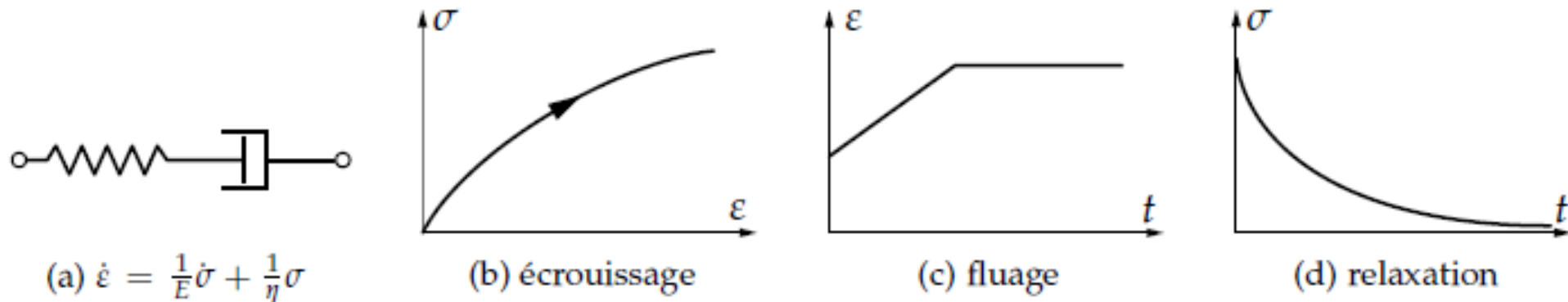


Figure 14. Modèle de Maxwell

Modèle de Kelvin-Voigt Ce modèle est décrit sur la figure 15. Pour l'essai de fluage $\sigma = \sigma_0$ entraîne $\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} t$ et $\sigma = 0$ entraîne $\varepsilon = \varepsilon_1 = \text{Cste}$, soit un fluage limité dans le temps. L'essai de relaxation est théoriquement impossible car on ne peut pas imposer instantanément une déformation au système puisqu'à une vitesse infinie correspond une contrainte infinie. D'autres modèles plus complexes peuvent être construits sur le même principe.

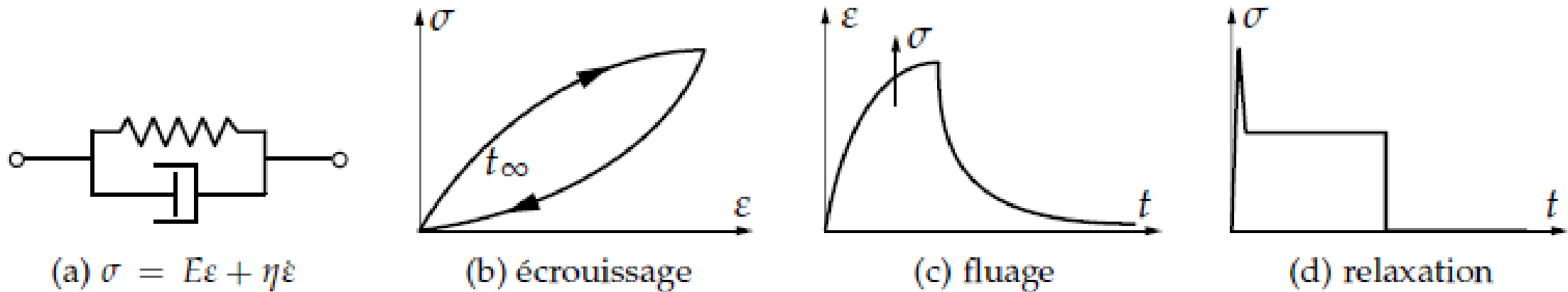


Figure 15. Modèle de Kelvin-Voigt

Modèles non-linéaires

La non-linéarité peut venir du comportement du ressort ou de l'amortisseur avec l'introduction d'un patin, par exemple. Toute combinaison comportant un élément non-linéaire aura un comportement non-linéaire. Nous nous intéressons ici à la non-linéarité caractérisant l'effet de la plasticité introduite par le comportement d'un patin, comme représenté sur la figure 16. Sur les figures 17, 18 et 19 sont représentées les allures de la courbe de réponse à l'essai d'érouissage pour les modèles que nous rencontrerons par la suite.

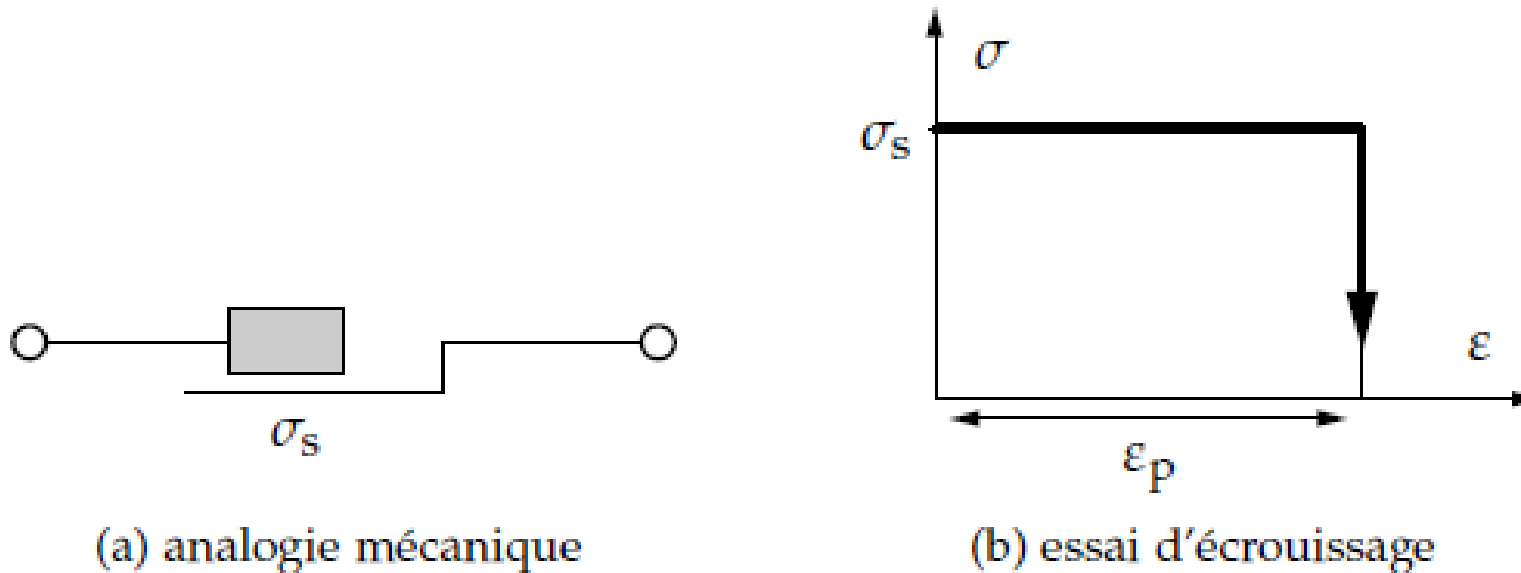
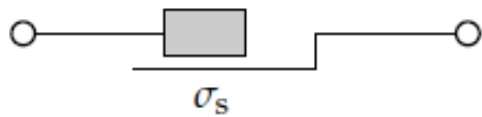
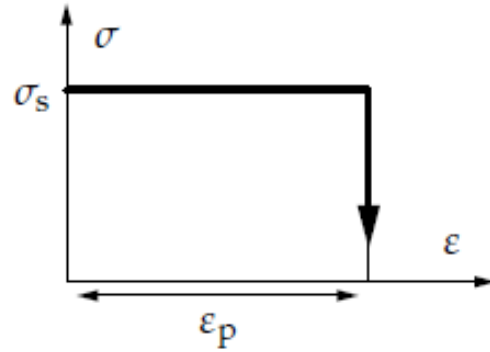


Figure 16. Modèle rigide parfaitement plastique (RPP)



(a) analogie mécanique

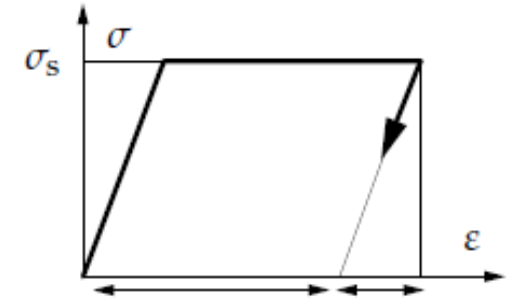


(b) essai d'écouvissage

Fig 16. Modèle rigide parfaitement plastique (RPP)

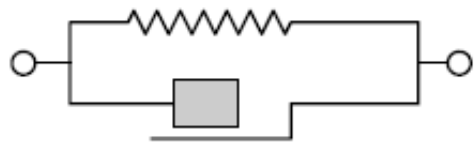


(a) analogie mécanique

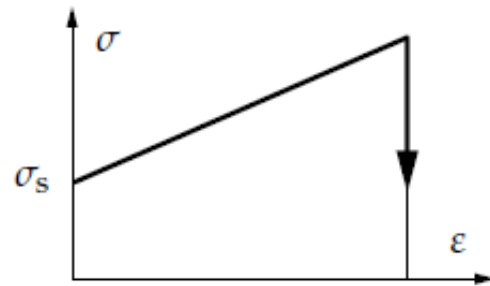


(b) essai d'écouvissage

Fig 17. Modèle élastoplastique parfait (EPP)

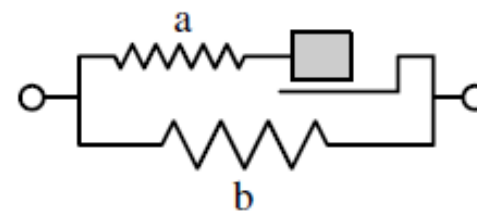


(a) analogie mécanique

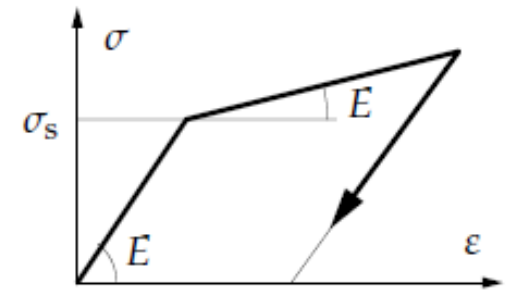


(b) essai d'écouvissage

Fig 18. Modèle rigide plastique avec écouvissage (RPE)



(a) analogie mécanique



(b) essai d'écouvissage

Fig. 19: modèle élasto-plastique avec écouvissage (EPE)