UNIVERSITÉ BATNA 2, FACULTÉ DE TECHNOLOGIE, DÉPARTEMENT DE MÉCANIQUE

COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES MATÉRIAUX MÉTALLIQUES

Cours destiné aux Etudiants inscrits en Master 1 GM

P^{r} *A. DERARDJA*

Chapitre 2. Suite Visco-élasticité

- Viscoélasticité linéaire
- Modèle de Kelvin-Voigt
- Modèle de Maxwell

Viscoélasticité linéaire

Lorsque sollicités, certains matériaux ont une réponse instantanée, le temps n'intervient pas $\longrightarrow$ matériaux élastiques.

Et certains matériaux ont une réponse différée $\longrightarrow$ matériaux viscoélastiques.

Les lois de comportement $\begin{cases} \sigma = F\,(\varepsilon) \\ \varepsilon = B\,(\sigma) \end{cases}$

où F et B sont des opérateurs qui font le lien entre les histoires de contraintes et les histoires de déformations.

En viscoélasticité linéaire, ces opérateurs sont linéaires par rapport à σ ou ε.

Un opérateur linéaire présente deux caractéristiques:

1) $F(\lambda\varepsilon) = \lambda\sigma$ et 2) $F\,(\varepsilon(1) + \varepsilon(2)) = F\,(\varepsilon(1)) + F(\varepsilon(2)) = \sigma\,(1) + \sigma\,(2)$

On doit déterminer les histoires de chargements qui font que le matériau obéit à une loi de comportement linéaire.

Par contre, les paramètres qui définissent la souplesse de fluage et le module de relaxation sont des constantes indépendantes du chargement. Pour les déterminer, on doit:

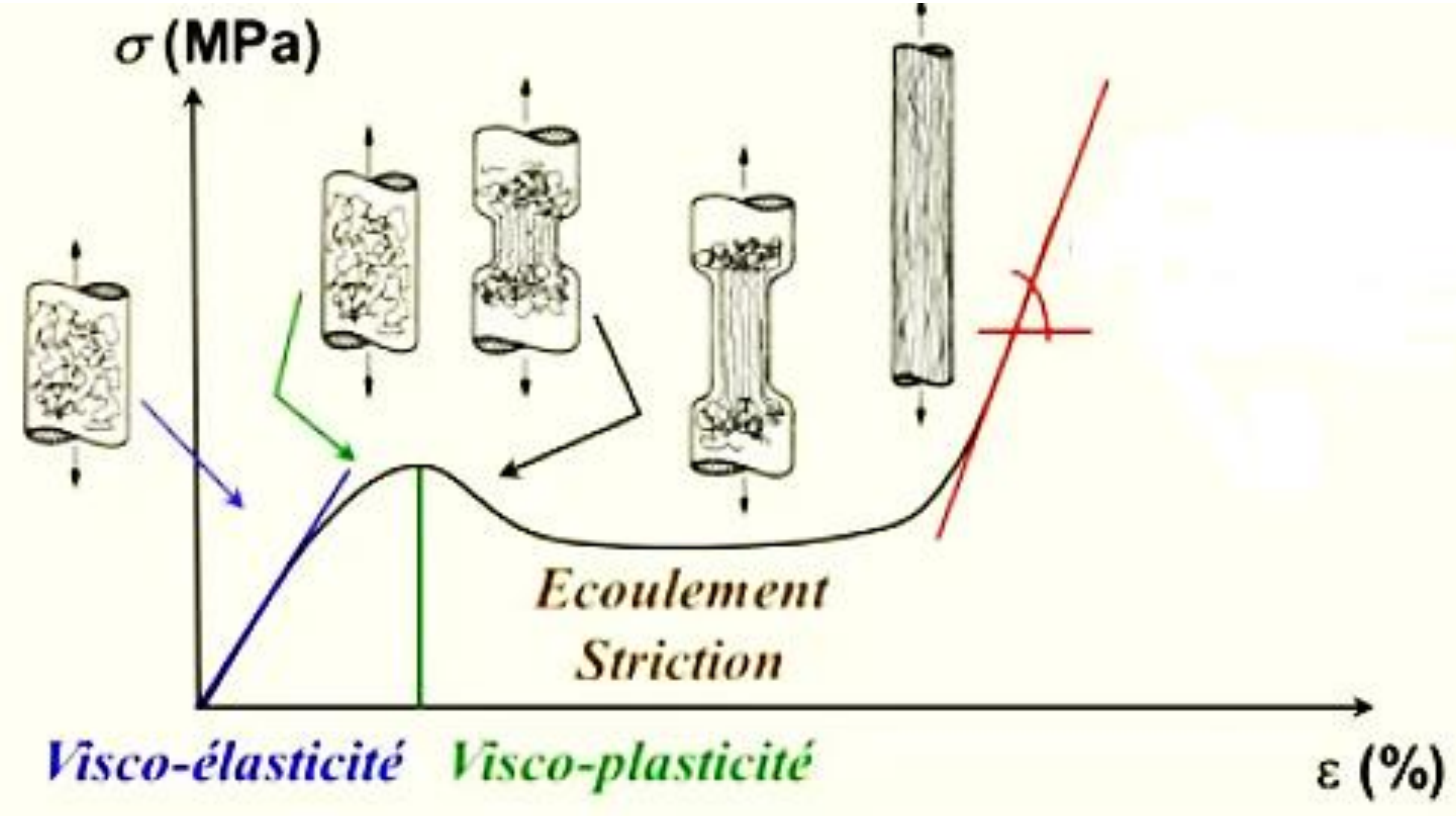
1 - Déterminer la symétrie matérielle du matériau que l’on veut tester (isotrope, isotrope transverse, etc.)

2 - Préciser les tests à effectuer (essais de traction, mesure du coefficient de Poisson, essai de cisaillement, de compressibilité, etc.)

3 - Réaliser des essais où l’on applique et enregistre un chargement (que ce soit une contrainte ou une déformation) et où la réponse est mesurée et enregistrée.

4 - Simuler la réponse du matériau lorsqu’il est soumis au chargement imposé. On obtiendra ainsi la réponse théorique du matériau en fonction des paramètres qui sont encore inconnus.

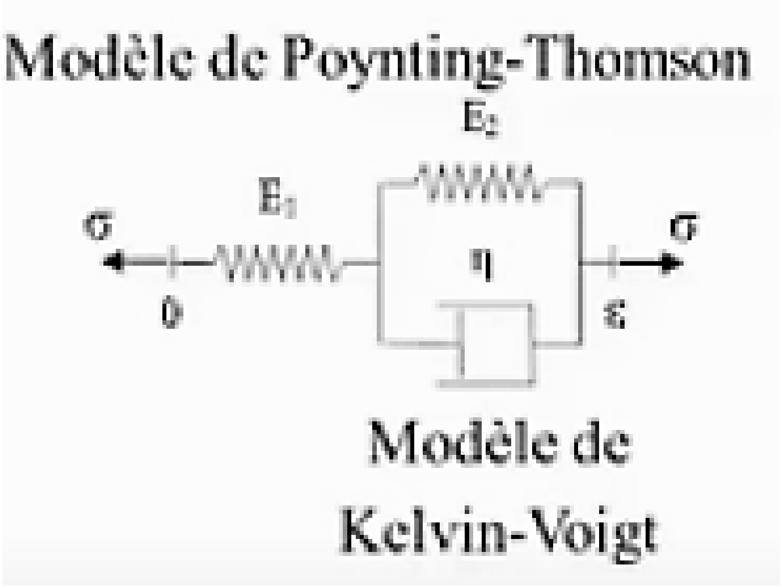
5 - Utiliser un algorithme numérique qui permet d’obtenir les paramètres matériau en utilisant le modèle qui représente le plus possible les données expérimentales

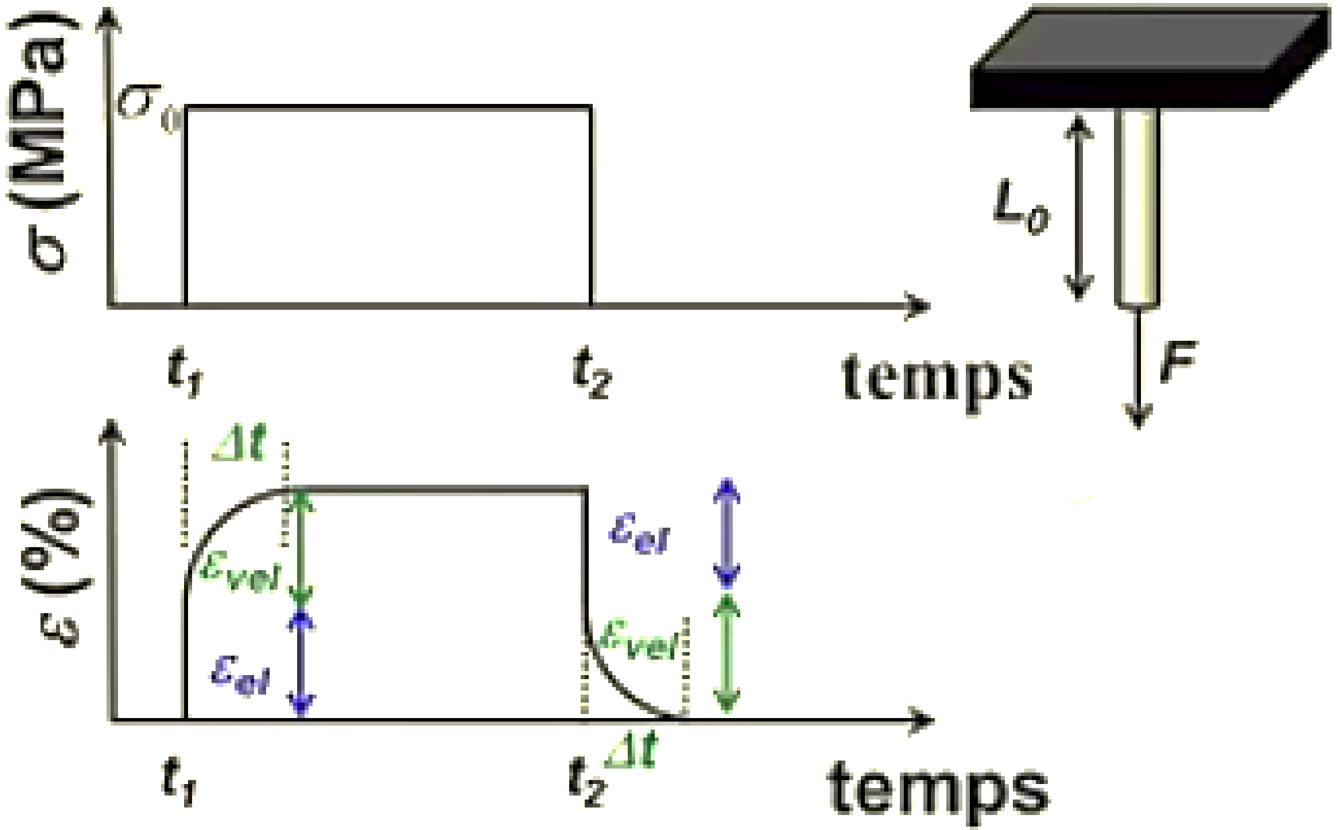

σ (MPa)
Ecoulement
Striction
Visco-élasticité
Visco-plasticité
ε (%)

– Lorsque l’on applique une déformation et que l’on mesure l’évolution de la contrainte en fonction du temps, on parle de relaxation.

– Lorsque l’on applique une contrainte et que l’on mesure l’évolution de la déformation, on parle de fluage.

Essai de fluage:

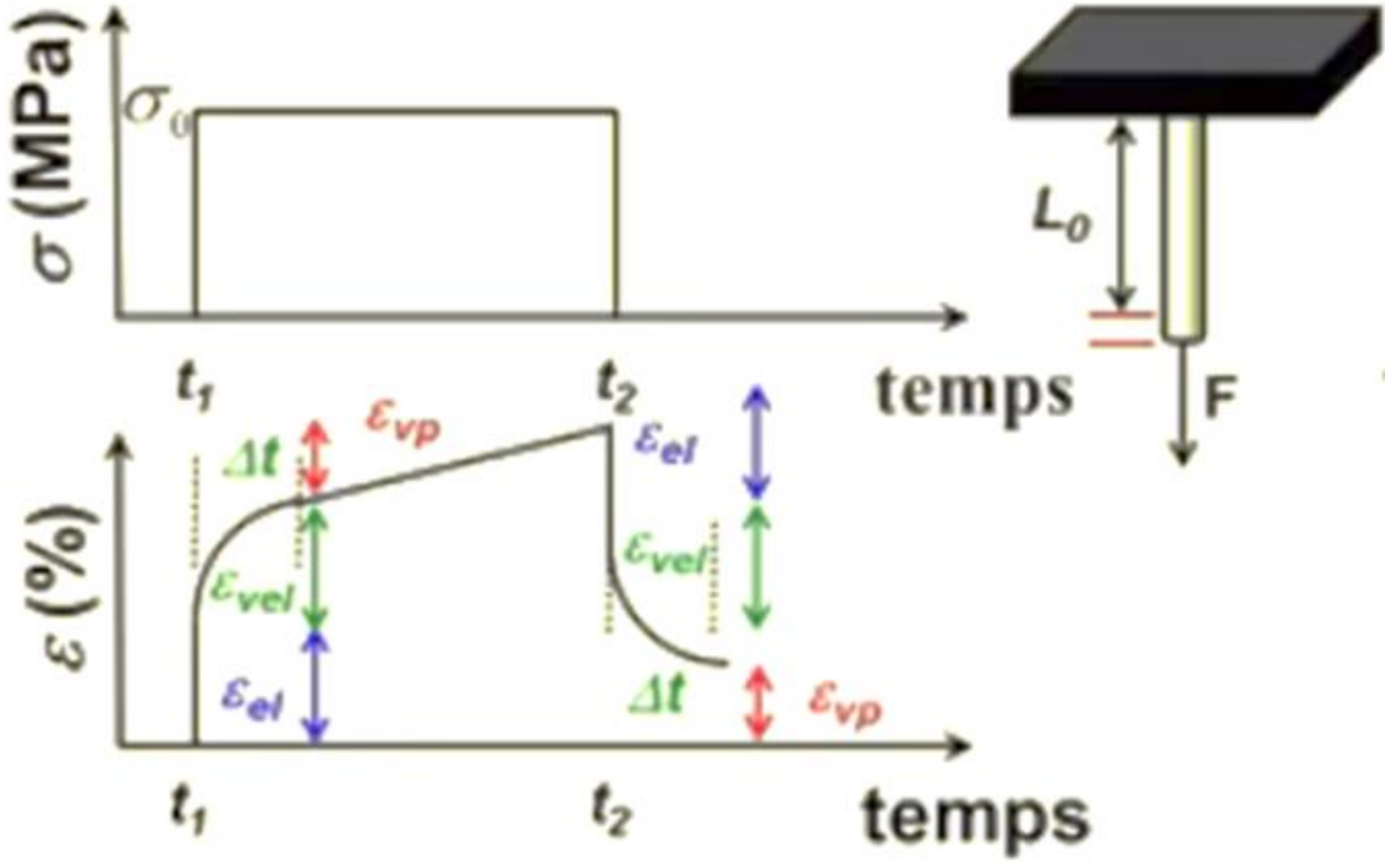




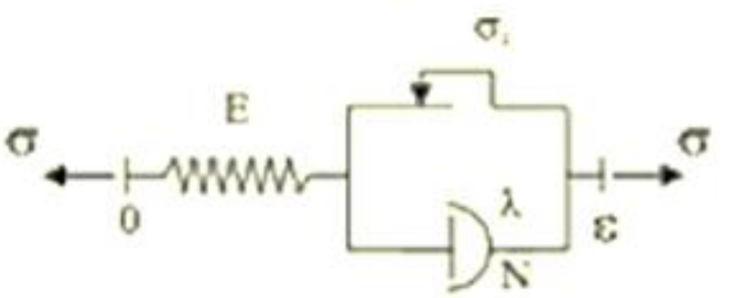
$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{él}} + \varepsilon_{\text{Vél}}$$

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \mathrm{E}_1\varepsilon_{\text{él}} = \mathrm{E}_2\varepsilon_{\text{Vél}} + \eta\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{\text{Vél}}}{\mathrm{dt}}$$

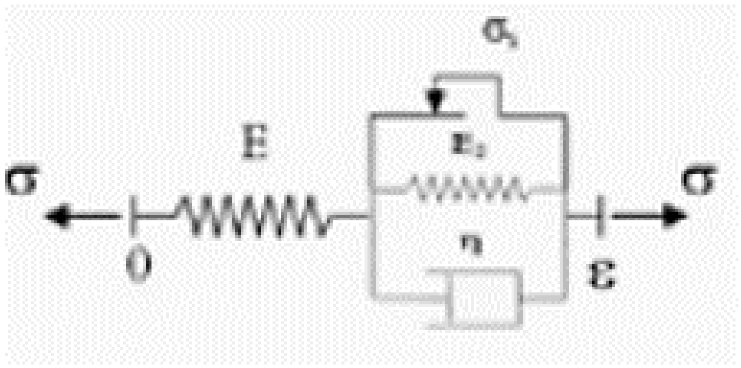
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_1} + \frac{\sigma}{E_2}\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$, avec: $\tau = \frac{\eta}{\mathrm{E}_2}$



Modèle de Bingham-Norton



Modèle de Bingham-Perzyna



$$\varepsilon = \varepsilon_{él} + \varepsilon_{vél} + \varepsilon_{vp}$$

$$\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$$

Essai de relaxation

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} = 0 \quad \text{car:} \quad \varepsilon = \varepsilon_0$$

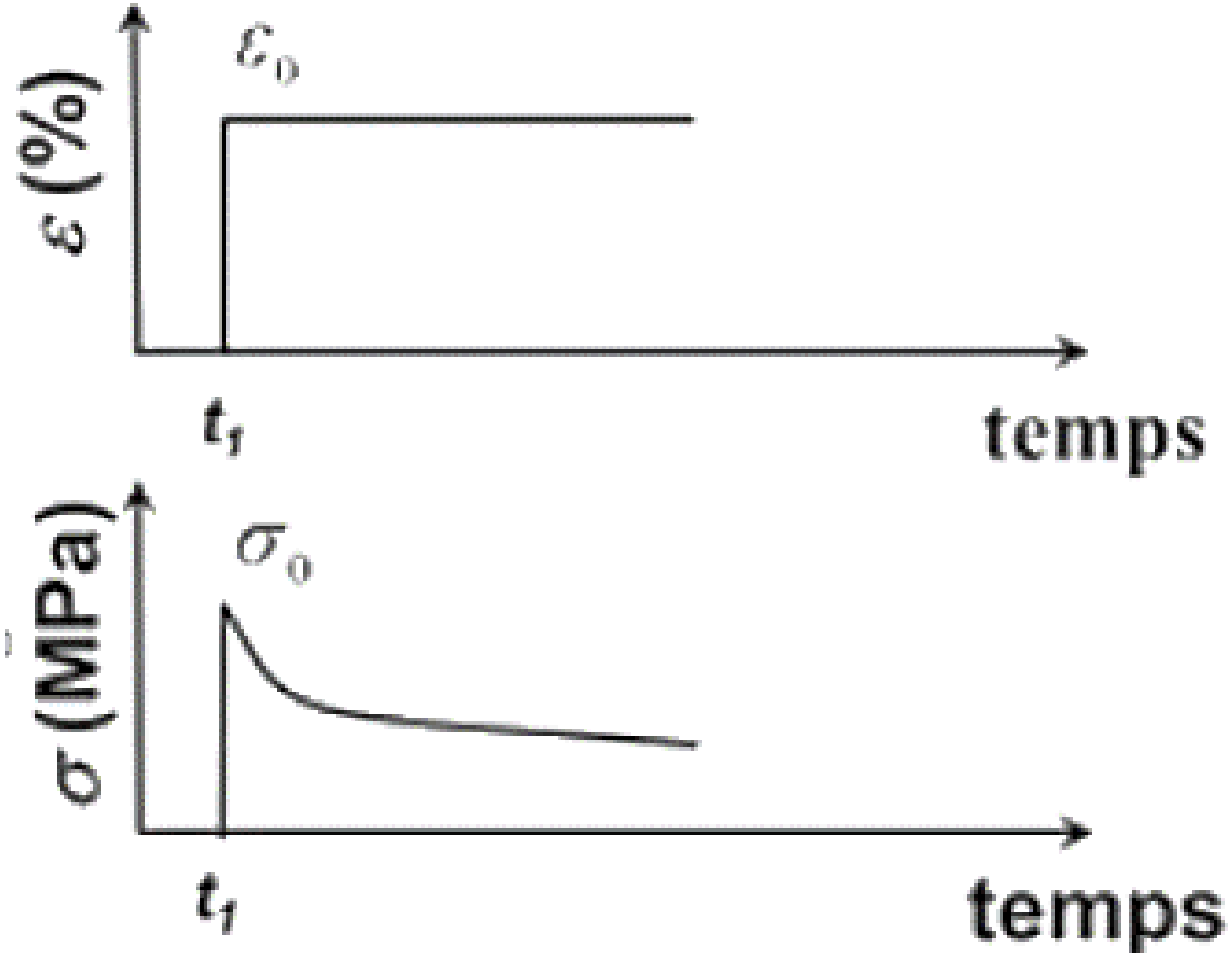
$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{\left(\frac{t}{\tau}\right)}$$

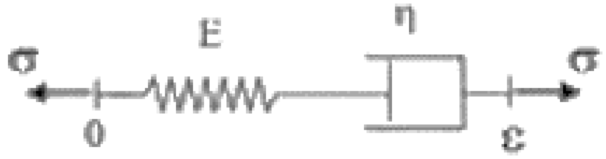
avec : $\tau = \frac{\eta}{E}$ et $\sigma_0 = E\varepsilon_0$

Si t<<τ : comportement élastique

Si t~τ: comportement viscoélastique

Si t>>τ: comportement visqueux





Modèle de Maxwell

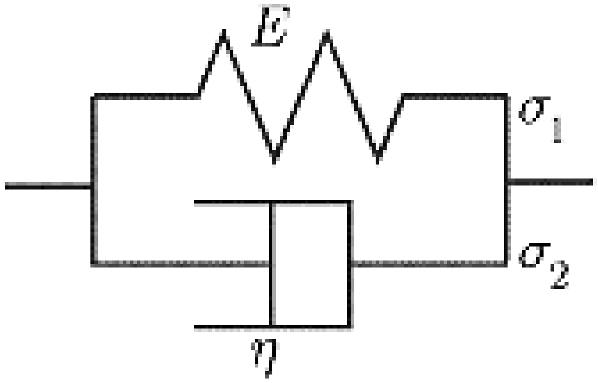
Afin de représenter la réponse différée, qui ressemble à une vibration amortie, on utilise un amortisseur.

Les différents comportements sont obtenus en agençant les ressorts et les amortisseurs en série et en parallèle.

Les modèles constitués de ressorts et d'amortisseurs, sont linéaires et c'est cette propriété de linéarité qui caractérise le comportement viscoélastique et conduit donc à la viscoélasticité linéaire.

Modèle de Kelvin-Voigt

Si l'on agence le ressort et l'amortisseur en parallèle, on obtient le modèle de Kelvin-Voigt.



Dans ce modèle, on suppose que les deux composants ont la même déformation et que la contrainte globale est la somme des contraintes agissant dans chaque branche.

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t)$$

Pour un essai de fluage, dès l'application de la charge, la déformation totale sera nulle. En effet, l'amortisseur conduirait à une contrainte infinie si la déformation présentait un saut.

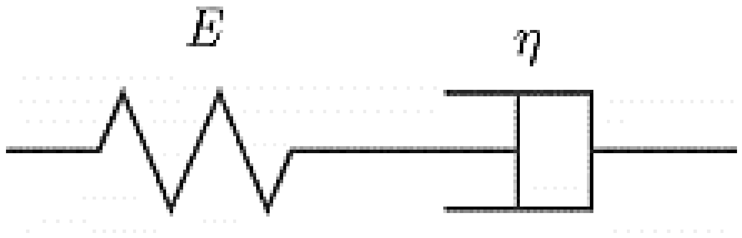
Pour obtenir la solution, on doit trouver la solution homogène de l'équation . Par la suite, on détermine la solution particulière. Cela conduit au résultat final suivant:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}\left(1 - \exp\left[-\frac{E}{\eta}t\right]\right.$$

Il doit être noté que l'on ne peut pas représenter un essai de relaxation avec ce modèle.

Modèle de Maxwell

Le modèle de Maxwell est obtenu en associant un ressort et un amortisseur en série.



Dans ce modèle, on suppose que la contrainte est constante dans les deux éléments et que la déformation totale est la somme des déformations des composants puisqu'ils sont montés en série. On aura:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta}$$

Si l'on réalise un essai de fluage, en t = 0, $\sigma = \sigma_0$ et uniquement le ressort se déforme, alors $\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E}$

Par la suite, le taux de déformation dans l'amortisseur sera de : $\varepsilon^{\cdot}(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} = cte$

Alors, en fluage et selon le modèle de Maxwell, on aura (après intégration):

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} t$$

Ce type de modèle est souvent utilisé pour représenter le comportement des métaux à haute température.

Si l'on réalise un essai de relaxation, en t = 0, $\varepsilon = \varepsilon_0$ et uniquement le ressort se déforme, alors : $\sigma(0) = E\varepsilon_0$

Par la suite, le taux de déformation est nul sur tout le matériau

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{\sigma^{\cdot}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta}$$

La solution de cette équation différentielle est du type: $\sigma(t) = A\exp\,(Bt)$

$$\Rightarrow \quad \sigma(t) = A\exp\left[-\frac{E}{\eta}t\right]$$

Comme: $\sigma(0) = E\varepsilon_0$ Alors: $A = E\varepsilon_0$

Références:

[1] Lemaître J., Handbook of materials behavior models, Academic Press, 2001.

[2] A. Jouandeau, B. Dupenay, "les modèles rhéologiques en viscoélasticité linéaire" XVIIème congrès Fapitec - LUGANO - 23, 28 Septembre 1984 -, Double liaison chimique des Peintures - Tome XXXI n" 348 - Octobre 1984