Chapitre 2. Interpolation polynomiale (2 Semaines)

1. Introduction générale,
2. Polynôme de Lagrange,
3. Polynômes de Newton.

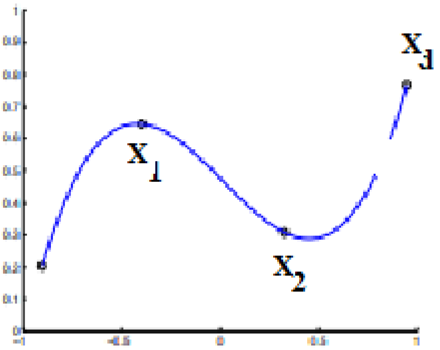
1. *Introduction générale :*

En Mathématique et spécialement en analyse numérique, une fonction f qui est inconnue explicitement est généralement :

- ✓ connue en certains points $x_0, x_1, ..., x_d$
- ✓ ou évaluable uniquement au moyen de l'appel à un code qui peut être très couteux.

Mais dans de nombreux cas, on a besoin d'effectuer des opérations (dérivation, intégration, ...) sur la fonction f.

On cherche donc à reconstruire cette fonction f par une autre fonction fr qui est simple et facile à évaluer à partir des données discrètes de f. On procède de manière que le modèle fr ne sera pas trop loin de la fonction f aux autres points.



On s'intéresse dans ce cours à la reconstruction de f par des polynômes.

1.1 Théorème d'approximation de Weierstrass :

Pour toute fonction f définie et continue sur l'intervalle [a, b] et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme p tel que

$$\forall x \in [a, b], |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

Plus ε est petit, plus le degré du polynôme est grand.

La simplicité de l'évaluation d'un polynôme par le schéma de **Horner** :

$$\sum_{j=0}^{n} c_j x^j = ((\ldots..((c_0 x + c_{n-1})x + c_{n-2})x + \cdots. + c_1)x + c_0)$$

Plus précisément, étant donnés d+ 1 points d'abscisses distinctes $\mathbf{M_i = (a_i, f_i), i = 0, 1, ..., d}$

Dans le plan, le problème de l'interpolation polynomiale consiste `a trouver un polynôme de degré inférieur ou égal `a m dont le graphe passe par les d + 1 points Mi,

c'est-`a-dire trouver $\mathbf{p \in P_m}$ **tel que** $\mathbf{p(a_i) = f_i, \forall i = 0, 1, ..., d}$.

Interpolation polynômiale :

Soit par exemple une expérience où on enregistre la distance parcourue par un objet tel qu'une lance ou pierre en fonction du temps, les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

t(sec)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
X(m)	**0**	**5**	**15**	**0**	**3**

On veut par exemple calculer la position de l'objet au temps t=2.5 sec ou la vitesse de l'objet à un temps donné.

Pour cela, il faut avoir une forme analytique de x en fonction de t, X(t).

Cette forme doit au moins coïncider avec les points donnés dans le tableau.

Ensuite on peut calculer :

$$X(2,5) = \int_0^4 X(t)dt \text{ où bien } v(t) = dX(t)\ dt\ .$$

Dans ce qui suit, on va considérer l'approximation de X(t) par une forme polynômiale c'est-à-dire :

$$X(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

Avec a_i ($i = 0, n$) sont des coefficients à déterminer.

Les polynômes que nous allons étudier diffèrent seulement par la façon de déterminer les coefficients a_i ($i = 0, n$), car pour un tableau de valeurs données le polynôme d'interpolation est unique.

1. ***Polynôme d'interpolation de LAGRANGE.***

Soient (n+1) points distincts $x_0, x_1, \dots \dots, x_n$ et f une fonction dont les valeurs sont :

$f(x_0), f(x_1), \dots \dots, f(x_n)$.

Alors, il existe un seul polynôme de degré inférieur ou égal à n et qui coïncide avec les points d'interpolation, i e : $f(x_k) = Pn\ (x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots \dots, n$

Ce polynôme est donné par :

$$P_n(X) = \int_0^n f(x_i)L_i(x) = f(x_0)\, L_0(x) + f(x_1)\, L_1(x) + \dots\dots\dots + f(x_n)\, L_n(x)$$

Avec :

$$L_k(x) = \sum_{i=0\ i\neq k}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} = \frac{(x-x_0)-(x-x_1)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)} \dots\dots\dots \frac{(x-x_{k-1})-(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})} \dots\dots . \frac{(x-x_n)}{(x_k-x_n)} \quad (k = 0,\ n)$$

$L_k(x)$ sont dits coefficients polynômes de Lagrange, ils sont orthogonaux c'est-à-dire

$$L_k(x_j) = 0 \text{ et } L_k(x_k) = 1.$$

Exemple : Reprenons la table donnée au début du chapitre et essayons de calculer le polynôme de Lagrange pour cette table.

Notons que pour n+1 points le degré du polynôme est inférieur ou égal à n.

Pour notre cas on a 5 points, cela nous donne un polynôme de degré inférieur ou égal à 4.

$$X(t) \approx P_4(t) = \sum_{i=0}^{4} f(t_i)\, L_i(t)$$
$$= f(t_0)\, L_0(t) + f(t_1)\, L_1(t) + f(t_2)\, L_2(t) + f(t_3)\, L_3(t) + f(t_4)\, L_4(t)$$

Avec les coefficients $f(t_i)$ sont les valeurs de $X(t_i)$ aux points donnés t_i, on remplace et on écrit donc :

$$X(t) \approx P_4(t) = 0 * L_0(t) + 5 * L_1(t) + 15 * L_1(t) + 0 * L_3(t) + 3 * L_4(t)$$

Ensuite, on calcule les coefficients polynômes de Lagrange :

$$L_4(t) = \sum_{i=0\ i\neq 0}^{n} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} = \frac{(t-t_1)}{(t_k-t_1)}\frac{(t-t_2)}{(t_k-t_2)}\frac{(t-t_3)}{(t_k-t_3)}\frac{(t-t_4)}{(t_k-t_4)} \quad (k = 0,\ 4)$$

$$\boldsymbol{L_0(t) = \sum_{i=0\ i\neq 0}^{n} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} = \frac{(t-t_1)}{(t_0-t_1)}\frac{(t-t_2)}{(t_0-t_2)}\frac{(t-t_3)}{(t_0-t_3)}\frac{(t-t_4)}{(t_0-t_4)} = \frac{(t-1)}{(0-1)}\frac{(t-2)}{(0-2)}\frac{(t-3)}{(0-3)}\frac{(t-4)}{(0-4)}}$$
$$\boldsymbol{= \frac{1}{24}(t^4-10t^3+35t^2-50t+24)}$$

$$\boldsymbol{L_1(t) = \sum_{i=0\ i\neq 1}^{n} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} = \frac{(t-t_0)}{(t_1-t_0)}\frac{(t-t_2)}{(t_1-t_2)}\frac{(t-t_3)}{(t_1-t_3)}\frac{(t-t_4)}{(t_1-t_4)} = \frac{(t-0)}{(1-0)}\frac{(t-2)}{(1-2)}\frac{(t-3)}{(1-3)}\frac{(t-4)}{(1-4)}}$$
$$\boldsymbol{= \frac{1}{6}(t^4-9t^3+26t^2-24t)}$$

$$\boldsymbol{L_2(t) = \sum_{i=0\ i\neq 2}^{n} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} = \frac{(t-t_0)}{(t_2-t_0)}\frac{(t-t_1)}{(t_2-t_1)}\frac{(t-t_3)}{(t_2-t_3)}\frac{(t-t_4)}{(t_2-t_4)} = \frac{(t-0)}{(2-0)}\frac{(t-1)}{(2-1)}\frac{(t-3)}{(2-3)}\frac{(t-4)}{(2-4)}}$$
$$\boldsymbol{= \frac{1}{4}(t^4-8t^3+19t^2-12t)}$$

$$\boldsymbol{L_3(t) = \sum_{i=0\ i\neq 3}^{n} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} = \frac{(t-t_0)}{(t_3-t_0)}\frac{(t-t_1)}{(t_3-t_1)}\frac{(t-t_2)}{(t_3-t_2)}\frac{(t-t_4)}{(t_3-t_4)} = \frac{(t-0)}{(3-0)}\frac{(t-1)}{(3-1)}\frac{(t-2)}{(3-2)}\frac{(t-4)}{(3-4)}}$$
$$\boldsymbol{= \frac{-1}{6}(t^4-7t^3+14t^2-8t)}$$

$$\boldsymbol{L_4(t) = \sum_{i=0\ i\neq 4}^{n} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} = \frac{(t-t_0)}{(t_4-t_0)}\frac{(t-t_1)}{(t_4-t_1)}\frac{(t-t_2)}{(t_4-t_2)}\frac{(t-t_3)}{(t_4-t_3)} = \frac{(t-0)}{(4-0)}\frac{(t-1)}{(4-1)}\frac{(t-2)}{(4-2)}\frac{(t-3)}{(4-3)}}$$
$$\boldsymbol{= \frac{1}{24}(t^4-6t^3+11t^2-6t)}$$

Noter bien qu'il est inutile de calculer les coefficients polynômes $\boldsymbol{L_0\ (t)}$ et $\boldsymbol{L_3\ (t)}$ car ils seront multipliés par zéro dans le remplacement.

Finalement on remplace les coefficients polynômes et on obtient :

$$\boldsymbol{X(t) \approx P_4\,(t) = -25.75t + 50.95833t^2 - 23.25t^3 + 3.04167t^4}$$

2. Polynôme d'interpolation de NEWTON

On à déjà vu que **le polynôme de LAGRANGE** utilise (n+1) coefficients polynômes qui sont eux aussi des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Le calcul de ces coefficients polynômes est aussi une tâche délicate, c'est pourquoi il est intéressant d'utiliser une autre formulation plus souple, c'est **le polynôme de NEWTON**.

Le calcul du polynôme de NEWTON commence par la construction d'un polynôme de degré 1, $\boldsymbol{P_1(x)}$ qui passe par les deux premiers points. Ensuite, ce dernier sera utilisé pour calculer un autre de degré 2, $\boldsymbol{P_2(x)}$ qui passe par les trois premiers points et ainsi de suite jusqu'au polynôme final de degré inférieur ou égal à n, $\boldsymbol{P_n(x)}$.

On a la relation de récurrence suivante entre deux polynômes successifs $\boldsymbol{P_{i-1}(x)}$ et $\boldsymbol{P_i(x)}$ **(i=2,3,..,n+1)**.

$$\begin{cases} P_1(x) = a_0 + a_1(x-x_0) \\ P_2(x) = P_1(x) + a_2(x-x_0)(x-x_1) \\ P_3(x) = P_2(x) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots\dots\dots.(x-x_{n-1}) \end{cases}$$

On remarque que les coefficients $\boldsymbol{a_k}$ **(k=0,…,n)** sont les éléments essentiels dans le calcul des polynômes de Newton. Ces coefficients sont les différences divisées d'ordre k de la fonction f

2.1 Calcul des différences divisées d'une fonction f.

Les différences divisées d'une fonction f basée sur les points $\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}, \dots \dots, \boldsymbol{xn}$ sont données par :

$$\boldsymbol{a_k} = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}, \dots \dots, \boldsymbol{x_k}] = \sum_{i=0}^{k} \frac{y_i}{\prod_{j=0\ \ j\neq i}^{k}(x_i - x_j)}$$

En pratique et pour le nombre limité de points, les différences divisées sont calculées en utilisant un tableau qui a la forme suivante :

x_k	$f(t_k) = f[t_k]$	DD[1]	DD[2]	DD[3]	DD[4]
x_0 x_1 x_2 x_3 x_4	$f[x_0]$ $f[x_1]$ $f[x_2]$ $f[x_3]$ $f[x_4]$	$f[x_0, x_1]$ $f[x_1, x_2]$ $f[x_2, x_3]$ $f[x_3, x_4]$	$f[x_0, x_1, x_2]$ $f[x_1, x_2, x_3]$ $f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ $f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$

Avec :

$$\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}] = \frac{\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_1}] - \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_0}]}{\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_0}} \quad ; \quad \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}] = \frac{\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_2}] - \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_1}]}{\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}} \dots\dots\dots\dots$$

$$\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}] = \frac{\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}] - \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}]}{\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_0}} \quad ; \quad \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}] = \frac{\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}] - \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}]}{\boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x_1}} \dots\dots\dots\dots$$

$$\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}] = \frac{\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}] - \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}]}{\boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x_0}} \quad ; \quad \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{x_4}] = \frac{\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{x_4}] - \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}]}{\boldsymbol{x_4} - \boldsymbol{x_1}}$$

$$\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{x_4}] = \frac{\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{x_4}] - \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}]}{\boldsymbol{x_4} - \boldsymbol{x_0}}$$

3. Erreur d'interpolation

C'est l'erreur commise lorsqu'on remplace la fonction f par le polynôme d'interpolation équivalent. Elle est notée par $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ car elle varie d'un point à un autre dans l'intervalle d'interpolation.

Cette erreur doit être nulle aux points d'interpolation, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x_i}) = \mathbf{0}$, (i=0,…n).

Si la fonction f est continue et (n+1) fois dérivable sur l'intervalle d'interpolation $[\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x_n}]$. Alors pour tout $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ il existe $\boldsymbol{z} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ tel que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{P_n}(\boldsymbol{x})| = \prod_{i=0}^{n} \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_i})}{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})!} \boldsymbol{f}^{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})}(\boldsymbol{z})$$

$\boldsymbol{Si}\ \left|\boldsymbol{f}^{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})}(\boldsymbol{z})\right| \leq \boldsymbol{M}\ \forall \boldsymbol{z}\ \boldsymbol{\epsilon}[\boldsymbol{ab}]$; On peut donc écrire

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{P_n}(\boldsymbol{x})| = \prod_{i=0}^{n} \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_i})}{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})!} \boldsymbol{M}$$

Dans ce cas M est majorant de la fonction $\boldsymbol{f}^{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})}(\boldsymbol{x})$ sur l'intervalle [a,b]**.**

Exemple : Reprenons la table déjà donnée au début de ce chapitre

t(sec)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
X(m)	**0**	**5**	**15**	**0**	**3**

Essayons de calculer **le polynôme de Newton** pour ce tableau.

Notons que pour n+1 points le degré du polynôme est inférieur ou égal à n.
Pour notre cas on a 5 points, cela nous donne un polynôme de degré inférieur ou égal à 4.

Ecrivons **les polynômes de Newton** :

$$\begin{cases} P_1(t) = a_0 + a_1(t-t_0) \\ P_2(t) = P_1(t) + a_2(t-t_0)(t-t_1) \\ P_3(t) = P_2(t) + a_3(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2) \\ P_4(t) = P_3(t) + a_4(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3) \\ les\ a_i\ sont\ les\ differnces\ divisées\ d'ordre\ \ i \end{cases}$$

Calculons le tableau des différences divisées :

t_k	$f(t_k) = f[t_k]$	DD^1	DD^2	DD^3	DD^4
0 1 2 3 4	$\mathbf{0} = a_0$ 5 15 0 3	$\mathbf{5} = a_1$ 10 −15 3	$\mathbf{2.5} = a_2$ −12.5 9	$\mathbf{-5} = a_3$ 7.1667	$\mathbf{3.04167} = a_4$

Remplaçant les a_i et les t_i par leurs valeurs dans **les polynômes de NEWTON**, on trouve :

$P_1(t) = a_0 + a_1(t - t_0) = 0 + 5(t - 0) = 5t$
$P_2(t) = P_1(t) + a_2(t - t_0)(t - t_1) = 5t + 2.5(t - 0)(t - 1) = 2.5t\ 2 + 2.5t$
$P_3(t) = P_2(t) + a3\ (t - t_0)(t - t_1)(t - t_2) = 2.5t\ 2 + 2.5t - 5(t - 0)(t - 1)(t - 2) = -5t\ 3 + 17.5t\ 2 - 7.5t$
$P_4(t) = P_3(t) + a_4(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3) = -5t\ 3 + 17.5t\ 2 - 6t + 3.0417(t - 0)(t - 1)(t - 2)(t - 3)$
$\boldsymbol{P_4(t) = 3.04167t\ 4 - 23.25t\ 3 + 50.95833t\ 2 - 25.75t}$

C'est le même polynôme que celui de **LAGRANGE**

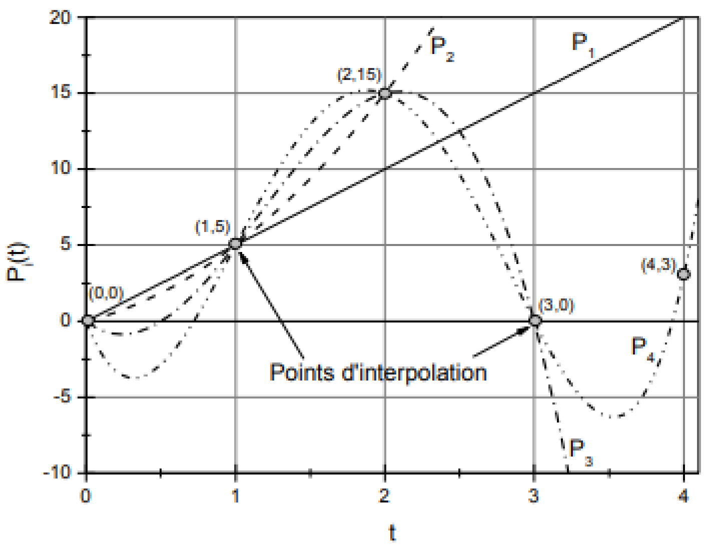


Figure 2 : Tracés des polynômes d'interpolation de NEWTON