OUTILS NUMERIQUES

DE BASE

Partie I

Résolution analytique des équations aux dérivées Partielles

S. DERRADJI

Table des Matières

Chapitre III

Méthodes analytiques

de résolution des problèmes aux limites

Introduction

Ce document est conçu dans le cadre des cours à distance. C'est une introduction à la résolution analytique des équations aux dérivées partielles. Son contenu correspond la première partie du programme du module intitulé: Outils Numériques de Base que j'ai dispensé aux étudiants master I MMTH. Il se distingue par l'autosuffisance, l'auto apprentissage et l'autoévaluation.

Il est constitué de trois chapitres:

Chapitre I : Séries de Fourier.

Chapitre II : Transformation de Laplace.

Chapitre III : Méthodes analytiques de résolution des problèmes aux limites.

Chapitre I

Séries de Fourier

1.1 Séries de Fourier des fonctions périodiques de période $p = 2\pi$

Définition 1.1.1 a) Une fonction f , définie sur D , est dite périodique si

$$f(x+p) = f(x)\,,\ \forall x \in D \tag{1.1}$$

b) La plus petite valeur de *p* vérifiant (4.1) est appelée période de f .

Exemple 1.1.1

Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont des fonctions périodiques de période $p = 2\pi$.

Définition 1.1.2 La série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.2}$$

où

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \tag{1.3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,\ n = 1,2,\cdots \tag{1.4}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx\ ,\ n = 1,2,\cdots \tag{1.5}$$

est appelée série de Fourier de la fonction f .

Les coefficients a_0, a_n, b_n donnés respectivement par (1.3), (1.4) et (1.5) sont appelés les coefficients de Fourier.

Pour dire que la série de Fourier (1.2) correspond à la fonction f , on écrit :

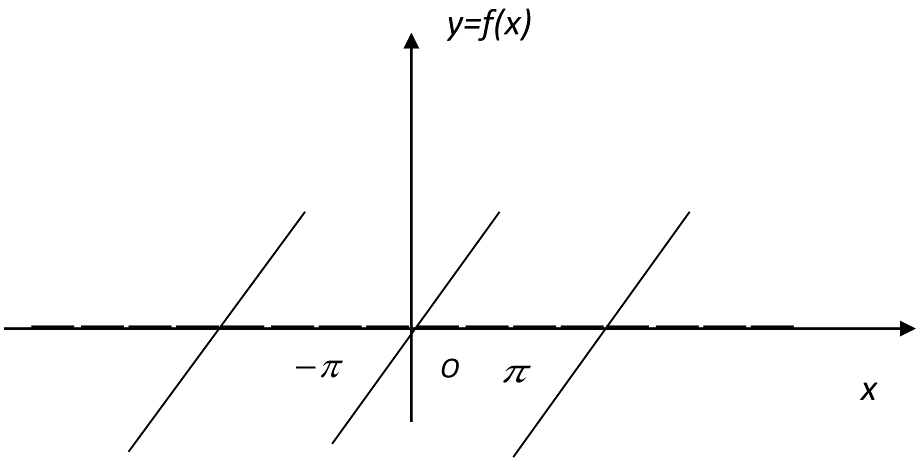
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.6}$$

Exemple 1.1.2

Soit f une fonction périodique de période $p = 2\pi$ définie par

$$f(x) = x\,,\ -\pi \le x \le \pi \tag{1.7}$$

Déterminons la série de Fourier de cette fonction.



Pour ce faire déterminons les coefficients de Fourier de cette fonction.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = 0 \tag{1.8}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0\,,\ n = 1,2,\cdots \tag{1.9}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-2\pi)\cos n\pi}{n\pi}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}2}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\frac{(-2\pi)\cos n\pi}{n} = (-1)^{n+1}\frac{2}{n} \quad ,\ n = 1,2,\cdots \tag{1.10}$$

Portons les expressions de (1.8), (1.9) et (1.10) dans (1.2), nous obtenons:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx \tag{1.11}$$

1.2 Séries de Fourier des fonctions périodiques de période $p \neq 2\pi$

Soit f une fonction périodique de période $p \neq 2\pi$. Déterminons sa série de Fourier. Pour ce faire, posons $y = \frac{2\pi}{p} x$. Alors $f(x) = f(\frac{py}{2\pi}) = g(y)$. La fonction g ainsi construite est périodique de période 2π et par conséquent, la série de Fourier de g est donnée par :

$$f(y) = g(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos ny + b_n \sin ny\right) \tag{1.12}$$

où

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{2\pi}{p} f(x) dx = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) dx \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cos ny dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{2\pi}{p} f(x) \cos \frac{2n\pi}{p} x dx \\ &= \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) \cos \frac{2n\pi}{p} x dx \end{aligned} \quad , \; n = 1, 2, \cdots \tag{1.14}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sin ny dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{2\pi}{p} f(x)\sin\frac{2n\pi}{p} x dx$$
$$= \frac{2}{p}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x)\sin\frac{2n\pi}{p} x dx \quad , \quad n = 1,2,\cdots \qquad (1.15)$$

1.3 Séries de Fourier des prolongements périodiques

Supposons qu'une fonction f soit définie sur $[-a, a]$ seulement. On appelle prolongement périodique de la fonction f, la fonction $\overline{f}$ définie par :

$$\overline{f}(x) = f(x), \ -a < x < a$$
$$\overline{f}(x) = f(x+2a), \ -3a < x < -a \qquad (1.16)$$
$$\overline{f}(x) = f(x-2a), \ a < x < 3a$$

La fonction $\overline{f}$ ainsi construite est périodique de période $2a$.Donc, d'après (1.12), la série de Fourier de $\overline{f}$ est donnée par :

$$\overline{f}(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{a}x + b_n \sin\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad (1.17)$$

où

$$a_0 = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)dx \qquad (1.18)$$

$$a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos\frac{n\pi x}{a} dx \quad , \ n = 1,2,\cdots \qquad (1.19)$$

$$b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\sin\frac{n\pi x}{a} dx \quad , n = 1,2,\cdots \qquad (1.20)$$

Pour $x \in \left]-a, a\right[$, (1.17) se réduit à

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{a}x + b_n \sin\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{1.21}$$

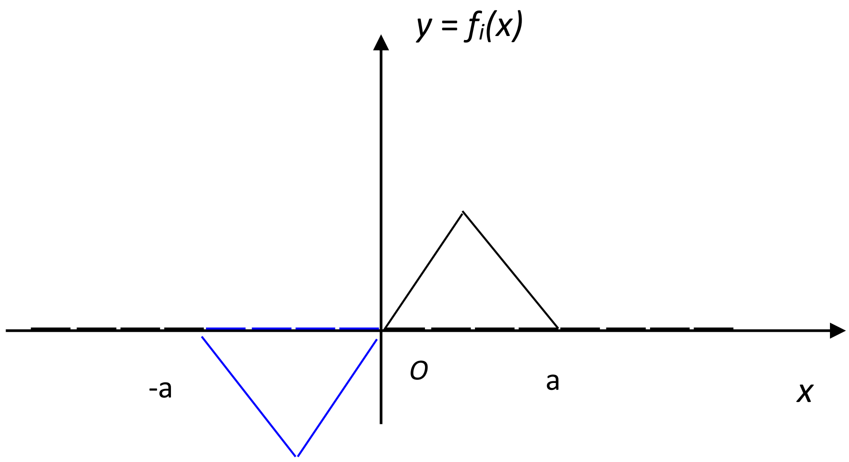
Définition 1.3.1 a) Soit f une fonction définie dans l'intervalle $]0, a[$. Le prolongement impaire de f est défini par

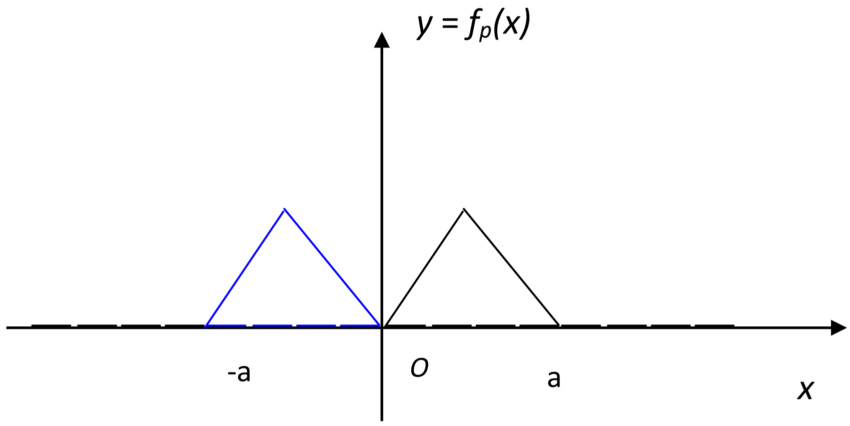
$$f_i = \begin{cases} f(x), & 0 < x < a \\ -f(-x), & -a < x < 0 \end{cases} \tag{1.22}$$

b) Le prolongement paire de f est défini par

$$f_p = \begin{cases} f(x), & 0 < x < a \\ f(-x), & -a < x < 0 \end{cases} \tag{1.23}$$

Graphiquement on a :





Les séries de Fourier de f_i et f_p sont données respectivement par (5.24) et (5.26):

$$f_i(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{a} x \qquad (1.24)$$

où

$$b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f_i(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx \qquad n = 1,2,\cdots \qquad (1.25)$$

$$f_p(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{a} x \qquad (1.26)$$

$$a_0 = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f_p(x) dx \qquad (1.27)$$

$$a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f_p(x) \cos \frac{n\pi x}{a} dx \qquad , n = 1,2,\cdots \qquad (1.28)$$

Pour $x \in \left]0, a\right[$, (1.24) et (1.26) donnent

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{a} x \qquad (1.29)$$

et

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{a} x \qquad (1.30)$$

Où les b_n, a_0 et a_n sont donnés respectivement par (1.25), (1.27) et (1.28).

1.4 Convergence des séries de Fourier

Définition 1.4.1 Soit x_0 un point de discontinuité d'une fonction f .

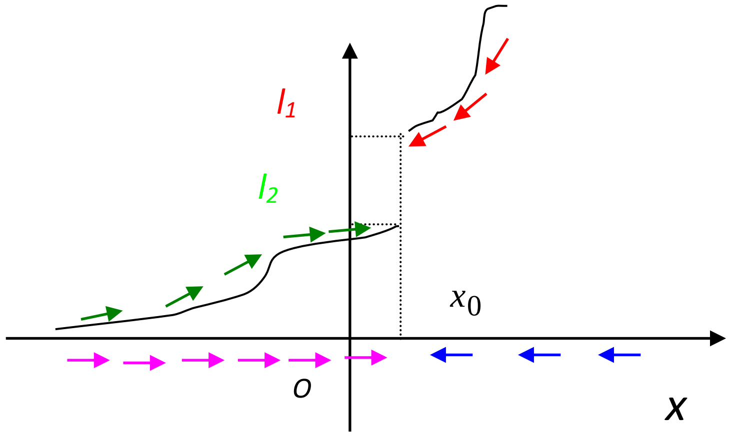
a) x_0 est dit point de discontinuité de première espèce si $f(x_0+) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x>0}} f(x)$ et $f(x_0-) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x<0}} f(x)$ existent et sont différentes.

b) Le nombre $\left(f(x_0+) - f(x_0-)\right)$ est appelé saut de la fonction.

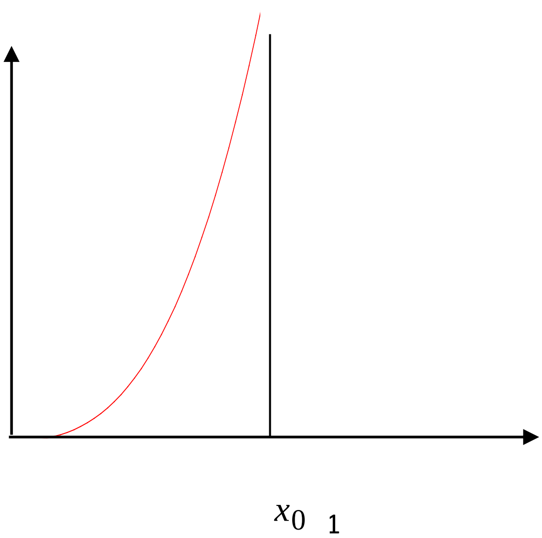
c) x_0 est dit point de discontinuité de deuxième espèce, si l'une des limites $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x>0}} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x<0}} f(x)$ n'existe pas.

Exemple 1.4.1

a) Le point x_0 de la figure suivante est un point de discontinuité de première espèce.



Le point x_0 de la figure suivante est un point de discontinuité de deuxième espèce.



Définition 1.4.2 Une fonction f est dite continue par morceaux sur $[\,a,b\,]$ si elle est continue sur $[\,a,b\,]$, sauf peut être en un nombre fini de points de discontinuité de première espèce.

Définition 1.4.3 On dit qu'une fonction f satisfait aux conditions de Dirichlet sur $]a,b[$ si

1. elle est continue par morceaux sur $]a,b[$.
2. $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{f(x+h)-f(x+)}{h}$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{f(x-)-f(x-h)}{h}$ existent. C'est

à dire, si les dérivées à droite et à gauche de f existent en ce point *x*.

Théorème 1.4.1 Si une fonction f définie sur $]-\pi,\pi[$ satisfait sur cet intervalle aux conditions de Dirichlet, alors la série de Fourier de f converge sur $]-\pi,\pi[$ et sa somme $s(x)$ est donnée par

1. $s(x)=f(x)$, si $x\in\,]-\pi,\pi[$ est un point de continuité de f
2. $s(x)=\dfrac{\left(f(x+)+f(x-)\right)}{2}$, si $x\in\,]-\pi,\pi[$ est un point de discontinuité de f
3. $s(x)=\dfrac{\left(f(-\pi+)+f(\pi-)\right)}{2}$, pour $x=-\pi$ et $x=\pi$

Exemple 1.4.2

D'après l'exemple 5.1.2, la série de Fourier de $f(x)=x$, $x\in]-\pi,\pi[$, est donnée par

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx$$

La fonction $f(x)=x$ vérifie les conditions du théorème (5.5.1). En effet, elle est continue et dérivable sauf aux points: $\pm\pi,\pm3\pi,\pm5\pi,\cdots$.Donc sa série de Fourier converge en chaque point de continuité vers la valeur de *f* en ce point. Aux points de discontinuité, elle converge vers la moyenne arithmétique de la limite à droite au point $x=(2k-1)\pi$ et la limite à gauche au point $x=(2k+1)\pi$ de la fonction:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin n(2k-1)\pi=\frac{1}{2}\{f((2k-1)\pi+)+f((2k+1)\pi-)\}=0$$

$$k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$

Théorème 1.4.2 Si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n| \tag{1.37}$$

converge, alors la série de Fourier de f :

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{a}x+b_n\sin\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{1.38}$$

converge uniformément sur $[-a,a]$.

Exemple 1.4.3

$f(x)=|x|$, $-1<x<1$. Les coefficients de Fourier de cette fonction sont donnés par:

$$a_0=1,\ a_n=\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{-1+(-1)^n}{n^2}\right),\ b_n=0,\ n=1,2,3,\cdots$$

La série de Fourier de cette fonction converge uniformément vers $f(x)$ sur $-1<x<1$, car la série $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|$ converge . En effet, on a:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|=\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{-1+(-1)^n}{n^2}\right)\right|$$

Théorème 1.4.3 Si la série de Fourier d'une fonction continue f converge uniformément alors sa somme est *f*.

Exemple 1.4.4

D'après l'exemple 1.5.3, la série de Fourier de $f(x)=|x|$, $-1<x<1$ converge uniformément. Donc elle a pour somme f . C'est-à-dire,

$$|x| = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{-1+(-1)^n}{n^2}\right)\cos nx, -1 < x < 1$$

Théorème 1.4.4 Soit f une fonction continue sur $[-\pi, \pi]$ telle que $f(-\pi) = f(\pi)$, et possédant une dérivée continue par morceaux sur $]-\pi, \pi[$, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f.

Exemple 1.4.5

La fonction $f(x) = |\ x\ |$ est continue sur $[-1,1]$ et $f(-1) = f(1) = 1$

Sa dérivée:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & , \ 0 < x < 1 \\ -1 & , \ -1 < x < 0 \end{cases}$$

est continue par morceaux sur $-1 < x < 1$. Donc d'après ce théorème, la série de Fourier de *f*:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{-1+(-1)^n}{n^2}\right)\cos nx$$

converge uniformément vers $f(x) = |\ x\ |$ sur $[-1,1]$.

Cependant la série de Fourier de $f(x) = x$, $-1 < x < 1$, ne converge pas uniformément.

Chapitre II

Transformation de Laplace

2.1 Définition de la Transformation de Laplace

Définition 2.1.1 Soit f une fonction réelle à variable réelle définie sur $[0,+\infty[$. L'intégrale :

$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim\limits_{R\to+\infty} \int_0^{R} e^{-st} f(t)dt$, si elle existe, définit une fonction de la variable réelle ou complexe s est appelée transformée de Laplace de f. On la note par :

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Dans ce qui suit, nous supposons la variable s réelle.

Exemple 2.1.1 Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(t) = 1$$

Alors

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(1) = \int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \lim_{R\to+\infty} \int_0^{R} e^{-st}\, dt = \lim_{R\to+\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_{t=0}^{R}$$

$$F(s) = \mathcal{L}(1) = \lim_{R\to+\infty} \left[-\frac{e^{-sR}}{s} + \frac{1}{s}\right] = \frac{1}{s}, \text{ si } s > 0.$$

Exemple 2.1.2 Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(t) = t$$

Alors

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(t) = \int_0^{+\infty} e^{-st}t\,dt = \lim_{R\to+\infty} \int_0^{R} e^{-st}\, t\,dt = \lim_{R\to+\infty} \left\{\left[-\frac{te^{-st}}{s}\right]_{t=0}^{R} - \int_0^{R} -\frac{e^{-st}}{s}dt\right\}$$

$$F(s) = \mathcal{L}(t) = \lim_{R\to+\infty} \left\{\left[-\frac{te^{-st}}{s}\right]_{t=0}^{R} - \left[\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_{t=0}^{R}\right\}$$

$$F(s) = \mathcal{L}(t) = \lim_{R\to+\infty} \left\{\left[-\frac{Re^{-Rt}}{s}\right] - \left[\frac{e^{-sR}}{s^2} - \frac{1}{s^2}\right]\right\}$$

$$F(s) = \mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}, \text{ si } s > 0.$$

Exemple 2.1.3 Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(t) = sinbt$$

Alors

$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(sinbt) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, sinbtdt = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-st} sinbt\, dt$

Intégrons $\int_0^R e^{-st} sinbt\, dt$ par parties

Posons

$u(t) = e^{-st}$ alors $du(t) = -se^{-st}dt$

et

$dv(t) = sinbtdt$ alors $v(t) = -\frac{cosbt}{b}$

alors

$$\int_0^R e^{-st} sinbt\, dt = \left[-\frac{e^{-st}}{b} cosbt\right]_{t=0}^{R} - \int_0^R \frac{se^{-st}}{b} cosbt\, dt \qquad (1)$$

Intégrons $\int_0^R e^{-st} cosbt\, dt$ par parties

Posons

$u(t) = e^{-st}$ alors $du(t) = -se^{-st}dt$

et

$dv(t) = cosbtdt$ alors $v(t) = \frac{sinbt}{b}$

alors

$$\int_0^R e^{-st} cosbt\, dt = \left[\frac{e^{-st}}{b} sinbt\right]_{t=0}^{R} + \int_0^R \frac{se^{-st}}{b} sinbt\, dt \qquad (2)$$

De (1) et (2), on a :

$$\int_0^R e^{-st} sinbt\, dt = \left[-\frac{e^{-st}}{b} cosbt\right]_{t=0}^{R} - \frac{s}{b}\left[\frac{e^{-st}}{b} sinbt\right]_{t=0}^{R} - \frac{s}{b}\int_0^R \frac{se^{-st}}{b} sinbt$$

$$\left(1 + \frac{s^2}{b^2}\right)\int_0^R e^{-st} sinbt\, dt = \left[-\frac{e^{-st}}{b}\left(cosbt + \frac{s}{b} sinbt\right)\right]_{t=0}^{R}$$

$$\left(1+\frac{s^2}{b^2}\right)\int_0^R e^{-st}sinbt\,dt=\left[-\frac{e^{-st}}{b^2}(bcosbt+ssinbt)\right]_{t=0}^R$$

$$\left(1+\frac{s^2}{b^2}\right)\int_0^R e^{-st}sinbt\,dt=-\frac{e^{-sR}}{b^2}(bcosbR+ssinbR)+\frac{b}{b^2}$$

$$\int_0^R e^{-st}sinbt\,dt=-\frac{e^{-sR}}{s^2+b^2}(bcosbR+ssinbR)+\frac{b}{s^2+b^2}$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-st}sinbt\,dt=\lim_{R\to+\infty}\left\{-\frac{e^{-sR}}{s^2+b^2}(bcosbR+ssinbR)+\frac{b}{s^2+b^2}\right\}$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-st}sinbt\,dt=\frac{b}{s^2+b^2}\text{, si } s>0.$$

$$F(s)=\mathcal{L}(f(t))=\mathcal{L}(sinbt)=\frac{b}{s^2+b^2}\text{, si } s>0.$$

Exemple 2.1.4 Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(t)=cosbt$$

De la même manière, on démontre que :

$$F(s)=\mathcal{L}(f(t))=\mathcal{L}(cosbt)=\frac{s}{s^2+b^2}\text{, si } s>0.$$

2.2 Propriétés de la Transformation de Laplace

Théorème 2.2.1 Soit $f_1(t)$ et $f_2(t)$ deux fonctions dont les transformées de Laplace existent et soit c_1 et c_2 deux constantes quelconques. Alors

$$\mathcal{L}\big(c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\big)=c_1\,\mathcal{L}(f_1(t))+c_2\,\mathcal{L}(f_2(t))$$

Exemple 2.2.1

Trouvons $\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos2at\right)$.

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos2at\right)=\frac{1}{2}\mathcal{L}(1)-\frac{1}{2}\mathcal{L}(cos2at)=\frac{1}{2}\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+(2a)^2}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos2at\right)=\frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}$$

Théorème 2.2.2 Si les transformées de $f_1(t)$ et $f_1'(t) = \frac{df_1}{dt}$ existent, alors

$$\mathcal{L}(f_1'(t)) = s\,\mathcal{L}(s(t)) - f(0)$$

Exemple 2.2.2

$f(t) = \frac{sinbt}{b}$, $f'(t) = cosbt$

$\mathcal{L}(f'(t)) = \mathcal{L}(cosbt) = s\mathcal{L}\left(\frac{sinbt}{b}\right) - \frac{sinb(0)}{b} = \frac{s}{b}\left(\frac{b}{s^2+b^2}\right) = \frac{s}{s^2+b^2}$

Nous avons retrouvé le même résultat que précédemment.

Théorème 2.2.3 Soit f une fonction telle que $\mathcal{L}(f(t)), \mathcal{L}(f'(t)), \mathcal{L}(f''(t))\ldots, \mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right)$ existent. Alors

$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right) = s^n\,\mathcal{L}(f(t)) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$

Exemple 2.2.3

Si $n = 2$, alors $\mathcal{L}\left(f^{(2)}(t)\right) = s^2\,\mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - f^{(1)}(0)$

Si $n = 3$, alors $\mathcal{L}\left(f^{(3)}(t)\right) = s^3\,\mathcal{L}(f(t)) - s^2f(0) - sf^{(1)}(0) - f^{(2)}(0)$

Exemple 2.2.4

Soit $f(t) = sinbt$, $f'(t) = bcosbt, f''(t) = -b^2sinbt$

$f(0) = sinb0 = 0$ et $f'(0) = bcosb0 = b$

$\mathcal{L}\left(f^{(2)}(t)\right) = \mathcal{L}(-b^2sinbt) = s^2\mathcal{L}(sinbt) - s\,sinb(0) - bcosb(0)$

$\mathcal{L}\left(f^{(2)}(t)\right) = \mathcal{L}(-b^2cosbt) = s^2\left(\frac{b}{s^2+b^2}\right) - b = -\frac{b^3}{s^2+b^2}$

$\mathcal{L}(-b^2sinbt) = -\frac{b^3}{s^2+b^2}$

$\mathcal{L}(sinbt) = \frac{b}{s^2+b^2}$

Théorème 2.2.4 Soit f une fonction réelle telle que $\mathcal{L}(f(t))$ existe. Alors

$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a)$, où $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ et $a \in R.$

Exemple 2.2.5

Trouvons $\mathcal{L}(e^{at}t)$.

$\mathcal{L}(e^{at}t) = F(s-a) = \frac{1}{(s-a)^2}$, où $F(s) = \mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$.

Théorème 2.2.5 Soit f une fonction réelle telle que $\mathcal{L}(f(t))$ existe. Alors

$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$, où $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ et $F^{(n)}(s) = \frac{d^n f(s)}{ds^n}$.

Exemple 2.2.6

Soit $f(t) = sinbt$. Déterminons $\mathcal{L}(t^2 f(t))$.

$\mathcal{L}(t^2 f(t)) = \mathcal{L}(t^2 sinbt) = (-1)^2 F^{(2)}(s)$, où $F(s) = \mathcal{L}(sinbt) = \frac{b}{s^2+b^2}$

$$F^{(2)}(s) = \frac{d^2F(s)}{ds^2} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{b}{s^2+b^2}\right)$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{b}{s^2+b^2}\right) = b\left(-\frac{2s}{(s^2+b^2)^2}\right)$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{b}{s^2+b^2}\right) = \frac{d}{ds}\left(-\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}\right)$$

$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}\right) = -2b\left(\frac{(s^2+b^2)^2 - 4s^2(s^2+b^2)}{(s^2+b^2)^4}\right)$$

$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}\right) = \frac{6s^2b - 2b^3}{(s^2+b^2)^3}$$

$\mathcal{L}(t^2 sinbt) = \frac{6s^2b-2b^3}{(s^2+b^2)^3}$.

$\mathcal{N}°$	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3	$sinbt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$

4	$cosbt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
5	sht	$\frac{b}{s^2-b^2}$
6	cht	$\frac{s}{s^2-b^2}$
7	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
8	$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
9	$tsinbt$	$\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$
10	$tcosbt$	$\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$
11	$e^{-at}sinbt$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
12	$e^{-at}cosbt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$

2.3 Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples

Définition 2.3.1 Soit Q_m(x)= b_0x^m+b_1x^{m-1}+…+b_m et P_n(x)= a_0x^n+a_1x^{n-1}+…+a_n

Deux polynômes de degrés respectifs m et n. Le rapport (quotient) $\frac{Q_m(\mathrm{x})}{P_n(\mathrm{x})}$ est appelé fraction rationnelle.

Exemple 2.3.1

$$\frac{4x-6}{x^2+2x+1}$$

Et

$$\frac{2x^3-4x^2+x-1}{x^2+2x+1}$$

Sont deux fractions rationnelles.

Définition 2.3.2 Une fraction rationnelle $\frac{Q_m(\mathrm{x})}{P_n(\mathrm{x})}$ est dite régulière si le degré de Q_m(x) est inférieur à celui de P_n(x). Dans le cas contraire, on dit qu'elle est irrégulière.

Exemple 2.3.2

$$\frac{4x-6}{x^2+2x+1}$$

est régulière.

$$\frac{2x^3-4x^2+x-1}{x^2+2x+1}$$

est irrégulière.

Définition 2.3.4 Les fractions régulières suivantes :

$\frac{A}{(x-a)^k}$, $k = 1{,}2\ 3, , \ldots$

$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, où $p^2-4q<0,\ \ k = 1{,}2\ 3, , \ldots$

Sont appelées éléments simples.

Théorème 2.3.1 La fraction rationnelle régulière $\frac{Q_m(\mathrm{x})}{P_n(\mathrm{x})}$

Où $P_n(\mathrm{x}) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2} \ldots (x-a_l)^{k_l}\,(x^2+p_1x+q_1)^{h_1} \ldots (x^2+p_tx+q_t)^{h_t}$

Peut être décomposée en éléments simples de la manière suivante :

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_0}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_1}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{k_1-2}} + \cdots + \frac{A_{k_1-1}}{(x-a_1)} + \ldots + \frac{B_0}{(x-a_l)^{k_l}} +$$
$$\frac{B_1}{(x-a_l)^{k_l-1}} + \frac{B_2}{(x-a_l)^{k_l-2}} + \cdots + \frac{B_{k_l-1}}{(x-a_l)} + \frac{C_0x+D_0}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{h_1}} + \frac{C_1\boldsymbol{x}+D_1}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{h_1-1}} + \ldots +$$
$$\frac{C_{h_1-1}\boldsymbol{x}+D_{h_1-1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)} +$$

$$\frac{M_0x+N_0}{\left(x^2+p_tx+q_t\right)^{h_t}} + \frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+p_tx+q_t\right)^{h_t-1}} + \ldots + \frac{M_{h_t-1}x+N_{h_t-1}}{\left(x^2+p_tx+q_t\right)}$$

Exemple 2.3.3

Décomposer en élément simples $\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{\boldsymbol{A}}{(x-1)} + \frac{Mx+N}{(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1)+(Mx+N)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{Ax^2+A+Mx^2-Mx+Nx-N}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{x^2(A+M)+x(-M+N)+A-N}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$\begin{cases} A+M=0 \\ -M+N=1 \\ A-N=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-M \\ A+N=1 \\ A-N=0 \end{cases} \quad A=\frac{1}{2}, M=-\frac{1}{2}, N=\frac{1}{2}$$

Donc

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{2}\frac{-x+1}{(x^2+1)}$$

Décomposer en élément simples $\frac{4x-6}{x^2+2x+1}$

$$\frac{4x-6}{x^2+2x+1} = \frac{A_0}{(x+1)^2} + \frac{A_1}{(x+1)} = \frac{A_0+A_1x+A_1}{(x+1)^2}$$

$$\frac{4x-6}{x^2+2x+1} = \frac{A_1x+(A_0+A_1)}{(x+1)^2}$$

$$\begin{cases} A_1=4 \\ A_0+A_1=-6 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} A_1=4 \\ A_0=-A_1-6=-10 \end{cases}$$

Donc

$$\frac{4x-6}{x^2+2x+1} = \frac{-10}{(x+1)^2} + \frac{4}{(x+1)}$$

2.4 Résolution des équations différentielles ordinaires

Définition 2.4.1 Une fonction $f(t)$ est dite transformée inverse de $F(s)$ si $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$. On la désigne par $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$.

Propriété 2.4.1 Soit $F_1(s)$ et $F_2(s)$ deux fonctions dont les transformées inverses de Laplace existent et soit c_1 et c_2 deux constantes quelconques. Alors

$\mathcal{L}^{-1}\left(c_1F_1(s) + c_2F_2(s)\right) = c_1\ \mathcal{L}^{-1}(F_1(s)) + c_2\ \mathcal{L}^{-1}(F_2(s))$

Exemple 2.4.1

La transformée inverse de $F(s) = \frac{1}{s^2}$ est $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = t$ car $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$.

La transformée inverse de $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$ est $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = sint$, car

$\mathcal{L}(sint) = \frac{1}{s^2+1}$.

Considérons le problème suivant :

Trouver la solution de l'équation différentielle ordinaire à coefficients constants :

$$a_0\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y(t)}{dt^{n-2}} + \cdots + a_n y(t) = f(t)$$

Vérifiant les conditions suivantes :

$y(0) = \alpha_0, \frac{dy(0)}{dt} = \alpha_1, \frac{d^2y(0)}{d2} = \alpha_2, \ldots, \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}} = \alpha_{n-1}$

Où $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ sont des constantes données.

La transformée de Laplace transforme ce problème différentiel dont l'inconnue est $y(t)$ en un problème algébrique dont l'inconnue est la transformée de Laplace de $y(t)$.

Exemple 2.4.2

Cas n=2

$$a_0\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = f(t)$$

Appliquons la transformation de Laplace aux deux membres de cette équation :

$\mathcal{L}\left(a_0\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t)\right) = \mathcal{L}(f(t))$

$a_0\mathcal{L}\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right) + a_1\mathcal{L}\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) + a_2\ \mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(f(t))$

Or

$\mathcal{L}\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right) = s^2\mathcal{L}(y(t)) - sy(0) - \frac{dy(0)}{dt}$

$\mathcal{L}\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) = s\ \mathcal{L}(y(t))$- $y(0)$

Posons

$\mathcal{L}(y(t)) = \overline{y}(s)$ et $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$

$a_0\left(s^2\overline{y}(s) - sy(0) - \frac{dy(0)}{dt}\right) + a_1(s\overline{y}(s) - y(0)) + a_2\ \overline{y}(s) = F(s)$

$$\overline{y}(s)(s^2a_0 + sa_1 + a_2) = sa_0y(0) + a_0\frac{dy(0)}{dt} + a_1\ y(0) + F(s)$$

$$\overline{y}(s) = \frac{sa_0y(0) + a_0\frac{dy(0)}{dt} + a_1\ y(0) + F(s)}{s^2a_0 + sa_1 + a_2}$$

$$\overline{y}(s) = \frac{a_0\alpha_0 s + F(s) + a_0\alpha_1 + a_1\alpha_0}{a_0s^2 + a_1s + a_2}$$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\overline{y}(s)\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a_0\alpha_0 s + F(s) + a_0\alpha_1 + a_1\alpha_0}{a_0s^2 + a_1s + a_2}\right)$

Exemple 2.4.3

Trouver la solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{dy(t)}{dt} + y(t)\right) = \mathcal{L}(1)$$

$$\left(s\overline{y}(s) - y(0)\right) + \overline{y}(s) = \frac{1}{s}$$

$$\overline{y}(s)(s+1) = \frac{1}{s} + y(0) = \frac{1}{s}$$

$\overline{y}(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ $\quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\overline{y}(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s+1)}\right)$

Décomposons $\frac{1}{s(s+1)}$ en éléments simples.

$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} = \frac{As+A+Bs}{s(s+1)} = \frac{s(A+B)+A}{s(s+1)}$

$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-1 \\ A=1 \end{cases}$

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$\mathcal{L}^{-1}(\overline{y}(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$

Or

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1$ et $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = e^{-t}$

Donc

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\overline{y}(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = 1 - e^{-t}$

$$y(t) = 1 - e^{-t}$$

Exemple 2.4.4

$$\begin{cases} \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 9y(t) = 1 \\ y(0) = 0 \\ \frac{dy(0)}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 9y(t)\right) = \mathcal{L}(1)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right) + 9\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(1)$$

$$\left(s^2\overline{y}(s) - sy(0) - \frac{dy(0)}{dt}\right) + 9\overline{y}(s) = \frac{1}{s}$$

$$\overline{y}(s)(s^2+9) = \frac{1}{s} + sy(0) + \frac{dy(0)}{dt}$$

$$\overline{y}(s) = \frac{1}{s(s^2+9)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\overline{y}(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+9)}\right)$$

Décomposons $\frac{1}{s(s^2+9)}$ en éléments simples

$$\frac{1}{s(s^2+9)} = \frac{A}{s} + \frac{Ms+N}{(s^2+9)} = \frac{As^2+9A+Ms^2+Ns}{s(s^2+9)} = \frac{s^2(A+M)+9A+Ns}{s(s^2+9)}$$

$$\begin{cases} A+M=0 \\ 9A=1 \\ N=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M=-A \\ A=\frac{1}{9} \\ N=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M=-\frac{1}{9} \\ A=\frac{1}{9} \\ N=0 \end{cases}$$

Donc

$$\frac{1}{s(s^2+9)} = \frac{1}{9s} - \frac{1}{9}\frac{s}{(s^2+9)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(\overline{y}(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{9s} - \frac{1}{9}\frac{s}{(s^2+9)}\right) = \frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+9)}\right)$$

Or

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1 \quad \text{et } \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = cos3t$$

Donc

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\overline{y}(s)) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}cos3t$$

Chapitre III

Méthodes analytiques
de résolution des problèmes aux limites

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous exposons quelques méthodes analytiques de résolution des problèmes aux limites décrivant des phénomènes physiques:

1) Séparation de variables

2) Transformation de Laplace

3.2. Méthode de séparation de variables

La méthode de séparation de variables est une technique fondamentale pour résoudre analytiquement des équations aux dérivées partielles linéaires .

Elle consiste à :

1. transformer l'équation aux dérivées partielles à résoudre en une paire d'équations différentielles ordinaires, en supposant la solution cherchée ϕ est de la forme $F(x)G(y)$ dans le cas des problèmes statiques ou $F(x,y)G(t)$ dans le cas de problèmes d'évolution.

2. Résoudre la paire d'équations différentielles ordinaires trouvées dans l'étape (1), en tenant compte des conditions aux limites supposées homogènes et des conditions initiales.

3. Superposer les solutions trouvées dans l'étape (2) pour obtenir la solution générale de l'équation aux dérivées partielles linéaire.

Dans ce qui suit, nous allons appliquer cette méthode à deux problèmes aux limites décrivant chacun un problème de distribution de la température, en régime transitoire, dans une barre soumise à différentes conditions aux limites :

1. température imposée aux extrémités

2. pas d'échange thermique aux extrémités

3.2.1 Distribution de la température dans une barre dont la température aux extrémités est imposée

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{1}{k}\dfrac{\partial T}{\partial t}, & 0 < x < a, 0 < t \\ T(0,t) = 0, & 0 < t \\ T(a,t) = 0, & 0 < t \\ T(x,0) = g(x), & 0 < x < a \end{cases}$$

Appliquons, pour trouver la solution, la méthode de séparation des variables, c'est-à-dire que nous allons rechercher une solution particulière de l'équation différentielle du problème (I) sous la forme de produit de deux fonctions :

$$T(x,t) = \phi(x)\psi(t) \tag{3.1}$$

En dérivant (3.1) deux fois par rapport à x et une fois par rapport à t , nous obtenons respectivement :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \phi''(x)\psi(t) \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} = \phi(x)\psi'(t) \end{cases} \tag{3.2}$$

Portons (3.2) dans l'équation différentielle du système (I), nous obtenons :

$$\phi''\psi = \frac{1}{k}\phi\psi'. \tag{3.3}$$

ou

$$\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = \frac{\psi'(t)}{k\psi(t)} \tag{3.4}$$

(3.4) ne peut être vraie que si les deux rapports sont égaux à une même constante : *p*, c'est à dire que si :

$$\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = p \tag{3.5}$$

$$\frac{\psi'(t)}{k\psi(t)} = p \tag{3.6}$$

(3.5) et (3.6) constituent deux équations différentielles ordinaires faciles à résoudre :

$$\begin{cases} \phi'' - p\phi = 0 \\ \psi' - pk\psi = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

dont les solutions sont , en supposant *p* positive, respectivement données par

$$\varphi(x) = a' ch\sqrt{p}x + b' sh\sqrt{p}x \tag{3.8}$$

$$\psi(t) = e^{pkt} \tag{3.9}$$

Pour que cette solution satisfasse la condition aux limites correspondant à x = 0, il faut que $a' = 0$, dans ce cas (3.1) se réduit à

$$T(x,t) = b' e^{pkt} sh\sqrt{p}x \tag{3.10}$$

(3.10) vérifie la condition aux limites correspondant à x = a que si $b' = 0$ ou $p = 0$. Dans les deux cas (3.10) se réduit à la solution triviale :

$$T(x,t) = 0$$

Donc *p* doit être négative. Posons donc

$$p = -\lambda^2 \tag{3.11}$$

alors (3.5) et (3.6) se réduisent à :

$$\begin{cases} \phi'' + \lambda^2 \phi = 0 \\ \psi' + \lambda^2 k \psi = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

dont les solutions sont respectivement :

$$\begin{cases} \phi(x) = a' \cos \lambda x + b' \sin \lambda x \\ \psi(t) = \exp(-\lambda^2 k t) \end{cases} \tag{3.13}$$

Des deux conditions aux limites du problème (I) , nous obtenons :

$$\begin{cases} T(0,t) = \phi(0)\psi(t) = 0 \\ T(a,t) = \phi(a)\psi(t) = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

Ces deux conditions sont vraies que si

$$\psi(t) = 0 \,,\ \forall t > 0 \tag{3.15}$$

ou

$$\begin{cases} \phi(0) = 0 \\ \phi(a) = 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

La condition (3.15) est à rejeter car elle conduit à la solution triviale. C'est donc la condition (3.16) qui doit être retenue et par conséquent on a :

$$\phi(0) = a' = 0 \tag{3.17}$$

et

$$\phi(a) = b' \sin \lambda a = 0 \tag{3.18}$$

La condition (3.18) conduit à deux cas :

$$b' = 0 \tag{3.19}$$

ou

$$\sin \lambda a = 0 \tag{3.20}$$

La condition (3.19) conduit à la solution triviale, donc à rejeter. La condition (3.20) est donc à retenir et elle conduit à :

$$\lambda = \frac{n\pi}{a},\; n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots \tag{3.21}$$

Dans ce qui suit nous nous contentons que des valeurs positives de n, car les valeurs négatives de n ne donnent aucune information additionnelle à la solution générale (car $\sin(-x) = -sinx$)

Nous avons donc pour chaque $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{a}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, une solution:

$$T_n(x,t) = \phi_n(x)\psi_n(t) \tag{3.22}$$

où

$$\phi_n(x) = \sin \lambda_n x \tag{3.23}$$

$$\psi_n(t) = \exp(-\lambda_n^2 kt) \tag{3.24}$$

d' après le principe de superposition, la combinaison linéaire des $T_n(x,t)$:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \lambda_n x \exp\left(-\lambda_n^2 kt\right) \tag{3.25}$$

vérifie le problème aux limites (I).

La condition initiale du problème (I) conduit à

$$T(x,o) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/a) = g(x), \quad 0 < x < a \tag{3.26}$$

(3.26) est le développement en série de Fourier de la fonction $g(x)$ et par conséquent on a :

$$b_n = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx. \tag{3.27}$$

3.2.2 Distribution de la température dans une barre sans transfert thermique aux extrémités (régime transitoire)

$$(II)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{1}{k}\dfrac{\partial T}{\partial t}, & 0 < x < a \\ \dfrac{\partial T}{\partial x}(0,t) = 0, & 0 < t \\ \dfrac{\partial T}{\partial x}(a,t) = 0, & 0 < t \\ T(x,o) = f(x), & 0 < x < a \end{cases}$$

En procédant de la même manière que dans le cas d'une barre dont la température des extrémités est imposée et en posant

$$T(x,t) = \phi(x)\psi(t) \tag{3.28}$$

nous obtenons :

$$\phi''\psi = \frac{1}{k}\phi\psi' \tag{3.29}$$

En arrangeant (3.29), nous obtenons:

$$\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = \frac{\psi'(t)}{k\psi(t)}, \quad 0 < x < a, \ \ 0 < t \tag{3.30}$$

(3.30) ne peut être vraie que si les deux membres de (3.30) sont égaux à une même constante $-\lambda^2$. C'est à dire:

$$\frac{\phi''}{\phi} = -\lambda^2 = \frac{\psi'}{k\psi} \tag{3.31}$$

(3.31) est équivalente à:

$$\phi'' + \lambda^2\phi = 0, \qquad 0 < x < \alpha \tag{3.32}$$

et

$$\psi' + \lambda^2 k\psi = 0, \qquad 0 < t \tag{3.33}$$

Les conditions aux limites du problème (II) se transforment , à l'aide de (3.28), en des conditions sur les fonctions ϕ et T :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \phi'(0)\psi(t) = 0, & 0 < t \\ \dfrac{\partial T}{\partial x}(a,t) = \phi'(a)\psi(t) = 0, & 0 < t. \end{cases} \tag{3.34}$$

Les deux équations de (3.34) entraînent:

$$\psi(t) = 0\,,\ \forall t > 0 \tag{3.35}$$

ou

$$\begin{cases} \phi'(0) = 0 \\ \phi'(a) = 0 \end{cases} \tag{3.36}$$

La condition (3.35) est à rejeter car elle conduit à la solution triviale. La condition (3.36) est donc à retenir .

Les équations (3.32) et (3.36) constituent un problème aux limites:

$$(\text{ III }) \quad \begin{cases} \phi'' + \lambda^2\phi = 0, & 0 < x < a \\ \phi'(0) = 0 \\ \phi'(a) = 0 \end{cases}$$

La solution générale de l'équation différentielle du problème (III) est

$$\phi(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x. \tag{3.37}$$

De la condition aux limites du problème (III) correspondant à *x* = 0, on a :

$$B\lambda = 0 \tag{3.38}$$

(3.38) est vraie que si

$$\lambda = 0 \tag{3.39}$$

ou

$$B = 0 \tag{3.40}$$

En supposant la condition (3.40) vrai, (3.37) se réduit à

$$\phi(x) = A\cos\lambda x \tag{3.41}$$

De la deuxième condition aux limites du problème (III) correspondant à *x* = *a* et (3.41), on a :

$$\phi^{'}(a) = -A\sin\lambda a = 0 \tag{3.42}$$

(3.42) se traduit par:

$$A = 0 \tag{3.43}$$

ou

$$\sin\lambda a = 0 \tag{3.44}$$

(3.43) est à rejeter car elle conduit à la solution triviale. La condition (3.44) est donc à retenir. Elle conduit à

$$\lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.45}$$

Portons (3.45) dans (3.41) nous obtenons la solution du problème (III) correspondant à λ_n :

$$\phi_n(x) = A\cos\lambda_n x \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{3.46}$$

La condition (3.39) réduit (3.37) à :

$$A\cos 0 + B\sin 0 = A. \tag{3.47}$$

La fonction $\phi(x) = A$ est une solution correspondant à $\lambda = 0$. Prenons $A = 1$ et posons

$$\lambda_0^2 = 0, \qquad \phi_0(x) = 1. \tag{3.48}$$

En tenant compte de (3.45) et (3.48), la solution de (3.33) correspondant à λ_n est

$$\begin{cases} \psi_n = \exp\left(-\lambda_n^2 kt\right) \\ \psi_0 = 1 \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{3.49}$$

En portant (3.46) et (3.49) dans (3.28), nous obtenons :

$$T_n(x,t) = \phi_n(x)\psi_n(t) = \cos\lambda_n x \exp\left(-\lambda_n^2 kt\right) \tag{3.50}$$

T_n est la solution du problème aux limites (II) correspondant à $n = 1, 2, 3, \cdots$

La combinaison linéaire de ces T_n et $T_0 = 1$ est aussi une solution car le problème est linéaire et homogène.

$$T(x,t) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos\lambda_n x \exp\left(-\lambda_n^2 kt\right) \tag{3.51}$$

Les constantes a_n s'obtiennent, en utilisant la condition initiale du problème (II). En effet,

$$T(x,0) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos\lambda_n x = f(x), \quad 0 < x < a. \tag{3.52}$$

Nous constatons que (3.52) est le développement en série de Fourier de la fonction *f*(*x*). Par conséquent on a :

$$a_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx. \tag{3.53}$$

Remarquons qu'en faisant tendre *t* vers l'infini dans (3.51), nous obtenons la solution en régime permanent :

$$\lim_{t\to\infty} T(x,t) = a_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx. \tag{3.54}$$