Chargé de module : S. Derradji Chargés de T.D : L. Douha (grpes : 1,2,3), S. Gaid (grpes : 4,5 ;6)

Université de Batna- Faculté de Technologie

Département de Mécanique L.M.D (2ème année) - Module : Maths4

Année Universitaire 2021-2022 Semestre II

Solution de la Série d'exercices N°2

Exercice 1

1)

$$|(az+b)-(az_0+b)| = |a||z-z_0|$$

$\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ / $|\overline{z-z_0}| \le |z-z_0)| < \varepsilon$, $\forall z$ vérifiant $|z-z_0)| < \delta$

Donc $\lim\limits_{z\to z_0} (az+b) = az_0 + b$

2)

$$|Re(z)-Re(z_0)| \le |z-z_0)|$$

$\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta = \varepsilon$ / $|Re(z)-Re(z_0)| \le |z-z_0)| < \varepsilon$, $\forall z$ vérifiant $|z-z_0)| < \delta$

$\lim\limits_{z\to z_0} Re(z) = Re(z_0)$

3)

$$|\bar{z}-\bar{z}_0| = |z-z_0|$$

$\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta = \varepsilon$ tel que $|\bar{z}-\overline{z_0}| \le |z-z_0)| < \varepsilon$, $\forall z$ vérifiant $|z-z_0)| < \delta$

$\lim\limits_{z\to z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$

4)

$$\begin{aligned}|(x+i(2x+y))-(1+i)| &= |(x-1)+i(2x+y-1)| \\ &\le 3|x-1|+|y+1|\end{aligned}$$

et

$|(x+iy)-(1-i)| = |(x-1)+i(y+1)| < \delta$ entraîne $|(x-1)| < \delta$ et $|(y+1)| < \delta$

alors

$\left|\left(x+i(2x+y)\right)-(1+i)\right|<\varepsilon$ pour tout $z=(x,y)$ vérifiant $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{4}$ et $|y+1|<\dfrac{\varepsilon}{4}$

cette dernière condition est vérifiée si on prend $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$. Donc

$\forall\varepsilon>0$, il existe tel que $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$ / $\left|\left(x+i(2x+y)\right)-(1+i)\right|<\varepsilon$, $\forall z$ vérifiant $|z-z_0|<\delta$

$$\lim_{z\to 1-i}\left(x+i(2x+y)\right)=1+i$$

5) $\left|\dfrac{\bar{z}^2}{z}\right|=|z|$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\ \delta=\varepsilon$ / $\left|\dfrac{\bar{z}^2}{z}\right|=|z|<\varepsilon$, $\forall z$ vérifiant $|z|<\delta$

Donc $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}^2}{z}=0$

Exercice 2

1) $\displaystyle\lim_{z\to 1+i} z^2+3=3+2i$ 2) $\displaystyle\lim_{z\to i} z^4+1=i^4+1=2$

3) $\displaystyle\lim_{z\to 3-2i}\frac{z^3-1}{z+1}=\frac{(3-2i)^3-1}{3-2i+1}=\frac{13}{5}-i\frac{51}{5}$

4) $\displaystyle\lim_{z\to a}\frac{z^3-a^3}{z-a}=\lim_{z\to a} z^2+za+a^2=3a^2$

5) $\displaystyle\lim_{z\to 1}\frac{z^n-1}{z-1}==\lim_{z\to 1} z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots z+1=n$

6) $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{z-i}{z^2+1}==\lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)}=-\frac{1}{2}i$

7) $\dfrac{Re(z)+i}{|z|}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Donc

$$\lim_{z\to i}\frac{Re(z)+i}{|z|}=\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+i\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=i$$

8) $\dfrac{\mathrm{Im}(z^2)-1}{z\bar{z}}=\dfrac{2xy-1}{x^2+y^2}$

$$\lim_{z\to 3-4i}\frac{\mathrm{Im}(z^2)-1}{z\bar{z}}=\lim_{(x,y)\to(3-4)}\frac{2xy-1}{x^2+y^2}=-1$$

9) $\sin\pi x-e^{2xyi}=\sin\pi x-\cos 2xy-i\sin 2xy$

$$\lim_{z\to 1+i}\sin\pi x-e^{2xyi}=-\cos 2-i\sin 2=-e^{2i}$$

Exercice 3

$$f(z)=\frac{2xy}{x^2+y^2}+i\frac{x^2}{y+1}$$

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{(y,y)\to(0,0)}f(z)=\lim_{y\to 0}\frac{2y^2}{2y^2}+i\frac{y^2}{y+1}=1$$

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{(x,x^2)\to(0,0)}f(z)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{x^2+x^4}+i\frac{x^4}{x^2+1}=0$$

Donc $\lim\limits_{z\to 0}f(z)$ n'existe pas.

b)

$$g(z)=\frac{4x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{(x,0)\to(0,0)}f(z)=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x}=4$$

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{(x,x)\to(0,0)}f(z)=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sqrt{2}x}=2\sqrt{2}$$

Donc $\lim\limits_{z\to 0}g(z)$ n'existe pas