Chargé de module : S. Derradji Chargés de T.D : L. Douha (grpes : 1,2,3), S. Gaid (grpes : 4,5 ;6)

Université de Batna- Faculté de Technologie

Département de Mécanique L.M.D ($2^{ème}$ année) - Module : Maths4

Année Universitaire 2021-2022 Semestre II

Série d'exercices N°1

Exercice 1

a) Montrer que	b) Soit $z \neq (0,0)$ un nombre complexe, montrer que
1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \forall z_1, z_2 \in C$ 2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in C$ 3) $(z_1 \bullet z_2) \bullet z_3 = z_1 \bullet (z_2 \bullet z_3)$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in C$	$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

Exercice 2

Montrer que

1) $\frac{1}{z_1 z_2} = \left(\frac{1}{z_1}\right)\left(\frac{1}{z_2}\right)$, $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$

2) $\frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}$, $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0, z_3 \neq 0, z_4 \neq 0$

3) $\frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = \left(\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{z_2}{z_4}\right)$, $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0, z_3 \neq 0, z_4 \neq 0$

Exercice 3

Montrer les propriétés des nombres complexes suivantes :

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $z_1, z_2 \in C$	5) $\lvert z_1 \bullet z_2 \rvert = \lvert z_1 \rvert \bullet \lvert z_2 \rvert$
2) $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$, $z_1, z_2 \in C$	6) $\left\lvert \frac{z_1}{z_2} \right\rvert = \frac{\lvert z_1 \rvert}{\lvert z_2 \rvert}$
3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$	7) $\lvert z_1 + z_2 \rvert \leq \lvert z_1 \rvert + \lvert z_2 \rvert$
4) $z \bullet \overline{z} = \lvert z \rvert^2$	8) $\lvert \lvert z_1 \rvert - \lvert z_2 \rvert \rvert \leq \lvert z_1 + z_2 \rvert$

Solution

Exercice 1

a)

1) Posons $z_1=(x_1,y_1)$ et $z_2=(x_2,y_2)$, alors

$$\begin{aligned}z_1+z_2=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)&=(x_2+x_1,y_2+y_1)\\&=(x_2,y_2)+(x_1,y_1)\\&=z_2+z_1\end{aligned}$$

2) Posons $z_3=(x_3,y_3)$, alors

$$\begin{aligned}(z_1+z_2)+z_3=(x_1+x_2,y_1+y_2)+(x_3,y_3)&=(x_1+x_2+x_3,y_1+y_2+y_3)\\&=(x_1,y_1)+(x_2+x_3,y_2+y_3)\\&=z_1+(z_2+z_3)\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}(z_1\bullet z_2)\bullet z_3&=(x_1.x_2-y_1.y_2,x_1.y_2+x_2.y_1)(x_3,y_3)\\&=\begin{pmatrix}(x_1.x_2-y_1.y_2)x_3-(x_1.y_2+x_2.y_1)y_3\\ ,(x_1.x_2-y_1.y_2)y_3+(x_1.y_2+x_2.y_1)x_3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}x_1(x_2.x_3-y_2.y_3)-y_1(x_2.y_3+y_2.x_3)\\ ,x_1(.x_2.y_3+y_2.x_3)+y_1(x_2.x_3-y_2.y_3)\end{pmatrix}\\&=(x_1,y_1)\begin{pmatrix}(x_2.x_3-y_2.y_3)\\ ,(.x_2.y_3+y_2.x_3)\end{pmatrix}\\&=z_1\bullet(z_2\bullet z_3)\end{aligned}$$

b) Montrons que $z^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

Pour ce faire, posons $z=(x,y)\neq(0,0)$ $z^{-1}=(u,v)$ et cherchons u et v tels que :

$zz^{-1}=1$. Cal culons zz^{-1} et égalons le résultat à 1, nous obtenons :

$$zz^{-1}=(xu-yv,xv+yu)=(1,0)\Leftrightarrow\begin{cases}xu-yv=1\\xv+yu=0\end{cases}$$

En résolvant ces deux équations, nous obtenons :

$$\overline{z_2^{-1}} = \left(\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2}, \frac{y_2}{x_2^2+y_2^2}\right) = \left(\overline{z_2}\right)^{-1} = \frac{1}{\overline{z_2}}$$

donc

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{z_1}\,\frac{1}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

4) On a :

$$z \bullet \overline{z} = (x,y)(x,-y) = (x^2+y^2, -xy+xy) = (x^2+y^2, 0) = x^2+y^2 = |z|^2$$

5) On a :

$$|z_1 \bullet z_2|^2 = (z_1 \bullet z_2)\overline{(z_1 \bullet z_2)} = (z_1 \bullet z_2)(\overline{z_1} \bullet \overline{z_2})$$
$$= (z_1 \bullet \overline{z_1})(z_2 \bullet \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2$$

Donc

$$|z_1 \bullet z_2| = |z_1| \bullet |z_2|$$

6) On a :

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)\left(\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\right) = \frac{z_1\overline{z_1}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}$$

Donc

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

7) On a :

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ et } v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

C'est à dire, $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

Exercice 2

Solution

1) Posons $z_1 = (x_1, y_1)$ et $z_2 = (x_2, y_2)$, alors

$$z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\text{et } \frac{1}{z_1z_2} = (z_1z_2)^{-1} = \left(\frac{x_1x_2 - y_1y_2}{A}, -\frac{x_1y_2 + x_2y_1}{A}\right) \quad (1)$$

où,

$$A = (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$$

Calculons $\left(\frac{1}{z_1}\right)\left(\frac{1}{z_2}\right)$.

$$\frac{1}{z_1} = z_1^{-1} = \left(\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}, -\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\right) \text{ et } \frac{1}{z_2} = z_2^{-1} = \left(\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2}, -\frac{y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$$

Donc

$$\left(\frac{1}{z_1}\right)\left(\frac{1}{z_2}\right) = \left(\frac{x_1x_2}{A} - \frac{y_1y_2}{A}, -\frac{x_1y_2}{A} - \frac{x_2y_1}{A}\right) = \left(\frac{x_1x_2 - y_1y_2}{A}, \frac{x_1y_2 + x_2y_1}{A}\right) \quad (2)$$

De (1) et (2) on a : $\frac{1}{z_1z_2} = \left(\frac{1}{z_1}\right)\left(\frac{1}{z_2}\right)$

Exercice N°3

Solution

1) Posons $z_1 = (x_1, y_1)$ et $z_2 = (x_2, y_2)$, alors on a :

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \overset{\textit{définition}}{\Leftrightarrow} \overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2))$$

Or $(x_1 + x_2, -(y_1 + y_2)) = (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Donc

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

2) On a :

$$z_1.z_2 = (x_1.x_2 - y_1.y_2, x_1.y_2 + x_2y_1) \overset{\textit{définition}}{\Leftrightarrow}$$
$$\overline{z_1.z_2} = (x_1.x_2 - y_1.y_2, -x_1.y_2 - x_2y_1) = (x_1, -y_1)(x_2 - y_2) = \overline{z_1}.\overline{z_2}$$

3) On a :

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(z_1z_2^{-1}\right)} = \overline{z_1}\,\overline{z_2^{-1}}$$

Or

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})$$
$$= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_2\overline{z_1} + \overline{z_2\overline{z_1}}$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_2\overline{z_1})$$
$$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_2\overline{z_1}|$$
$$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_2||\overline{z_1}|$$
$$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_2||z_1| = (|z_1|+|z_2|)^2$$

Donc

$$|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$

8) On a :

$$|z_1| = |(z_1+z_2)-z_2| \leq |z_1+z_2|+|z_2| \Rightarrow |z_1|-|z_2| \leq |z_1+z_2|$$

D'après ce résultat, on a aussi :

$$|z_2|-|z_1| \leq |z_1+z_2| \Rightarrow |z_1|-|z_2| \geq -|z_1+z_2|$$

Donc $\left||z_1|-|z_2|\right| \leq |z_1+z_2|$

Suite de l'exercice N°2

2) on a $\dfrac{z_1+z_2}{z_3} = (z_1+z_2)z_3^{-1} = z_1 z_3^{-1} + z_2 z_3^{-1} = \dfrac{z_1}{z_3} + \dfrac{z_2}{z_3}$

3) $\dfrac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = (z_1 z_2)\left(\dfrac{1}{z_3 z_4}\right) = (z_1 z_2)\left(\dfrac{1}{z_3}\right)\left(\dfrac{1}{z_4}\right) = \left(z_1\left(\dfrac{1}{z_3}\right)\right)\left(z_2\left(\dfrac{1}{z_4}\right)\right)$

$= \left(\dfrac{z_1}{z_3}\right)\left(\dfrac{z_2}{z_4}\right)$

4) $\dfrac{z\, z_1}{z\, z_2} = \left(\dfrac{z}{z}\right)\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = (z z^{-1})\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \dfrac{z_1}{z_2}$