

UNIVERSITE BATNA 2

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE MECANIQUE

VOLUMES FINIS

RESUME DE COURS

TRAVAUX DIRIGES

TRAVAUX PRATIQUES

S. DERRADJI

Table des Matières

Introduction	01
--------------	----

Partie Résumé de Cours

Chapitre I

Méthode des Volumes Finis

Pour la

Résolution d'un Problème de Conduction de la Chaleur

en Régime Stationnaire

1.1 Problème de conduction de la chaleur en une dimension et stationnaire	03
1.2 Principe de la méthode des Volumes Finis	03
1.3 Traitement du terme source	06
1.4 Règles à respecter	06
1.5 L'espacement dans un maillage	07
1.6 Conductivité à l'interface	07
1.7 Condition aux limites	09
1.8 Algorithme de Thomas	10

Chapitre II

Résolution d'un Problème de Conduction de la Chaleur en Régime Instationnaire

2.1 Problème de conduction de la chaleur en une dimension et instationnaire	13
2.1.1 Schéma explicite	15
2.1.2 Schéma de Crank-Nicolson	15
2.1.3 Schéma purement implicite	16
2.2 Problème de conduction de la chaleur en deux dimensions et instationnaire	16

Chapitre III

Résolution d'un Problème de Convection et Diffusion en Régime Stationnaire

3.1 Problème de convection diffusion en une dimension	18
3.2 Schéma différence centrale	18
3.3 Schéma Upwind	20
3.4 Schéma Hybride	21

Partie TD

TD SUR LE CHAPITRE I

EXERCICE 1.1	24
EXERCICE 1.2	27
EXERCICE 1.3	31

Table des Matières

TD SUR LE CHAPITRE II

EXERCICE 2.1	35
EXERCICE 2.1	38

TD SUR LE CHAPITRE III

EXERCICE 3. 1	42
EXERCICE 3. 2	50
EXERCICE 3.3	56

Partie TP

TP SUR LE CHAPITRE I

TP 1. 1	61
---------	----

TP SUR LE CHAPITRE II

TP 2. 1	64
TP 2. 2	68

TP SUR LE CHAPITRE III

TP 3. 1	71
TP 3. 2	72
BIBLIOGRAPHIE	73

Introduction

Ce document est conçu afin de rattraper les cours, non dispensés à cause de la covid19, du module intitulé volumes finis du semestre II de l'année universitaire 2019-2020 destiné aux étudiants Master I énergétique. Donc, il ne contient que le minimum requis du programme officiel pour valider le module, et se distingue par l'autosuffisance, l'auto apprentissage et l'autoévaluation.

Il est constitué de trois parties : résumé de cours, TD et TP.

La partie résumé de cours est constituée de trois chapitres:

Chapitre I : Méthode des Volumes finis Pour la Résolution d'un Problème de Conduction de la Chaleur en Régime Stationnaire.

Chapitre II : Résolution d'un Problème de Conduction de la Chaleur en Régime instationnaire.

Chapitre III : Résolution d'un Problème de Convection et Diffusion en Régime Stationnaire.

La partie TD est une série d'exercices corrigés.

La partie TP contient un ensemble de programmes, écrits en matlab, des méthodes présentées dans la partie résumé de cours.

S. Derradji

05/09/2020

Partie Résumé de Cours

Chapitre I

Méthode des Volumes Finis

Pour la

Résolution d'un Problème de Conduction de la Chaleur en Régime Stationnaire

1.1 Problème de conduction de la chaleur en une dimension et stationnaire

Considérons le problème aux limites suivant :

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{d\left(k \frac{dT(x)}{dx}\right)}{dx} + S = 0 & 0 \leq x \leq 1 & (1) \\ T(0) = c_1 & & (2) \\ T(1) = c_2 & & (3) \end{cases}$$

Où

K est la conductivité Thermique et T est la température.

S est le taux de génération de chaleur par unité de Volume.

Le Problème (I) décrit la conduction de la chaleur en une dimension et en régime stationnaire.

1.2 Principe de la méthode des Volumes Finis

La méthode des Volumes Finis, comme la méthode des différences Finies et la méthode des éléments finis, est une méthode numérique. Elle transforme un problème continu en un problème discret dont la solution est approximativement la même que celle du problème continu aux points de discrétisation.

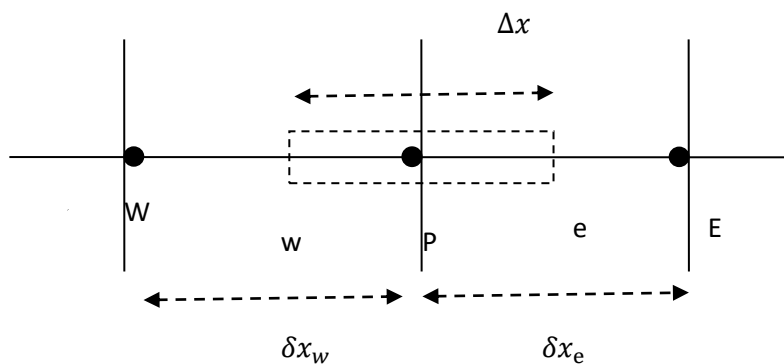
Elle consiste à :

- 1) Discrétiser le domaine de calcul: diviser ce domaine en un nombre de sous domaines appelés volumes de contrôle non chevauchant et entourant chacun d'eux un nœud. Pour ce faire, plaçons N points appelés nœuds sur la segment AB constituant le domaine de calcul. Les faces (frontières) de contrôle sont placées entre des nœuds adjacents. Donc chaque nœud est entouré d'un volume de

contrôle. Pratiquement, les volumes de contrôle proches de la frontière du domaine sont placés de telle sorte que leurs faces coïncident avec les frontières du domaine. Il est approprié (recommandé), dans la méthode des volumes fins, d'utiliser un système de notation qu'on utilisera ultérieurement :

- a) Un nœud quelconque est identifié par la lettre alphabétique P .
- b) Ces voisins, dans le cas unidimensionnel sont les nœuds West et Est, sont respectivement identifiés par W et E .
- c) La face West du volume de contrôle est désigné par w .
- d) La face Est du volume de contrôle est désigné par e .
- e) La distance entre les nœuds W et P est désignée par δx_w .
- f) La distance entre les nœuds P et E est désignée par δx_e .
- g) La distance entre les face w et e est désignée par Δx

Cette étape est appelée discrétisation du domaine de calcul.



- 2) Discrétiser le problème continu. Pour ce faire, Considérons un volume de contrôle dont les épaisseurs suivant les directions x, y et z sont respectivement $\Delta x, 1$ et 1 . Donc son volume est $\Delta V = \Delta x \times 1 \times 1 = \Delta x$.

Et intégrons l'équation (1) du problème (I) sur le volume ΔV , nous obtenons :

$$\int_{\Delta V} \frac{d\left(k \frac{dT(x)}{dx}\right)}{dx} + S dV = \int_w^e \frac{d\left(k \frac{dT(x)}{dx}\right)}{dx} dx + \int_w^e S dx = 0 \quad (4)$$

$$\left[\frac{kd(T(x))}{dx} \right]_e - \left[\frac{kd(T(x))}{dx} \right]_w + \int_w^e S dx = 0 \quad (5)$$

Utilisons un profile linéaire par morceaux pour calculer $\left[k \frac{d(T(x))}{dx} \right]_e$ et $\left[k \frac{d(T(x))}{dx} \right]_w$, nous obtenons :

$$\left[k \frac{d(T(x))}{dx} \right]_e = k_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} \quad (6)$$

$$\left[k \frac{d(T(x))}{dx} \right]_w = k_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \quad (7)$$

Portons (6) et (7) dans (5), nous obtenons :

$$k_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} - k_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} + \bar{S} \Delta x = 0 \quad (8)$$

Où \bar{S} est la valeur moyenne sur le volume de contrôle.

(8) peut être écrite sous la forme standard :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b \quad (9)$$

Où

$$a_E = \frac{k_e}{\delta x_e}, a_W = \frac{k_w}{\delta x_w}, a_P = a_E + a_W, b = \bar{S} \Delta x$$

En appliquant (9) pour chaque nœud P , à l'exception des nœuds voisins (proches) de la frontière, nous obtenons un ensemble d'équations algébriques linéaires dont les inconnues sont les T aux nœuds. Pour les nœuds voisins de la frontière du domaine, l'équation (9) est modifiée pour tenir compte des conditions aux limites ou frontières.

Cette étape est appelée discrétisation du problème continu.

- 3) Résoudre le système algébrique donnant les valeurs approximatives de T aux nœuds. L'ensemble des équations obtenues précédemment constitue un système algébrique linéaire dont la matrice est tridiagonale. Sa résolution peut se faire par la méthode de Gauss adaptée aux systèmes tridiagonaux, appelée algorithme de Thomas dans la méthode des volumes finis.

1.3 Traitement du terme source

Nous supposons que \bar{S} et T sont linéairement dépendants et que T_p domine à l'intérieur du volume de contrôle :

$$\bar{S} = S_c + S_p T_p \quad (10)$$

En tenant compte de (10), alors (8) s'écrit sous la forme standard suivante :

$$a_p T_p = a_E T_E + a_W T_W + b \quad (11)$$

Où

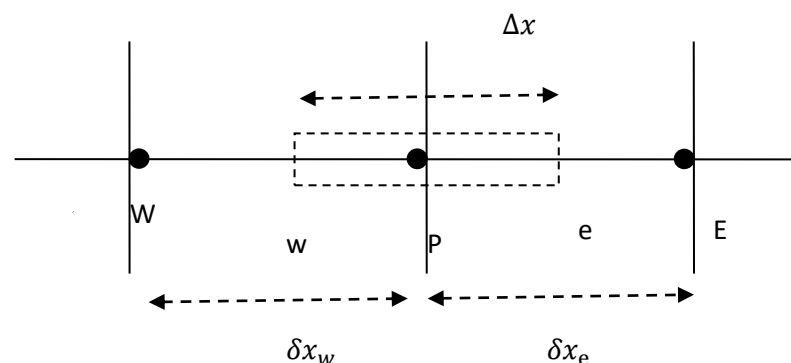
$$a_E = \frac{k_e}{\delta x_e}, a_W = \frac{k_w}{\delta x_w}, a_p = a_E + a_W - S_p \text{ et } b = S_c$$

1.4 Règles à respecter

Les règles suivantes sont basées sur des considérations physiques : réalisme physique et bilan global. Elles nous permettent de choisir, parmi le grand nombre de formulations disponibles, celles qui sont adéquates. Elles nous guident aussi dans le développement de nos propres formulations.

Règle 1. (Consistance aux surfaces du volume de contrôle)

Lorsqu'une face est commune à deux volumes de contrôles adjacents, le flux à travers cette surface doit être représenté par la même expression dans les équations de discrétisations pour les deux volumes de contrôles.



En général, les pentes des tangentes à gauche et à droite du point e sont différentes et par conséquent les flux à travers une face commune sont différents. Ce qui représente une inconsistance.

Une autre inconsistance est de supposer que les flux à travers les faces d'un volume de contrôle sont gouvernés par la conductivité évaluée au centre du volume de contrôle.

Règle 2. (Coefficients positifs)

Tous les coefficients de l'équation discrétisée doivent être positifs. Le non respect de cette règle conduit à une solution dépourvue de sens de sens physique.

Règle 3. (Pente négative de la linéarisation du terme source)

Lorsque le terme source est linéarisé : $\bar{S} = S_c + S_p T_p$, S_p doit être inférieur ou égal à zéro.

Règle 4. (Somme des coefficients voisins)

$$a_p = \sum a_{nb}$$

Pour les situations où l'équation différentielle est satisfaite par T et $T+c$, où c est une constante arbitraire.

1.5 L'espace dans un maillage

Il n'est pas nécessaire que δx_e doit être égal à δx_w . L'utilisation d'un espacement non uniforme est souvent désirable. Il dépend seulement de la manière avec laquelle la variable dépendante T varie dans le domaine de calcul.

1.6 Conductivité à l'interface

La procédure la plus simple pour obtenir k_e est de supposer qu'il varie linéairement entre les nœuds P et E :

$$k_e = f_e k_P + (1 - f_e) k_E \tag{12}$$

Où f_e est donné par

$$f_e = \frac{\delta x_{e+}}{\delta x_e} \quad (13)$$

δx_{e+} est la distance entre l'interface e et le nœud E .

Notre objectif principal est d'obtenir une bonne approximation de q_e à l'interface :

$$q_e = \frac{k_e (T_P - T_E)}{\delta x_e} \quad (14)$$

Dans le cas où le volume de contrôle entourant le point P est d'un matériaux de conductivité uniforme k_P et celui entourant le point E est d'un matériaux de conductivité uniforme k_E , le flux à l'interface e (en régime stationnaire) est donné par :

$$q_e = \frac{T_P - T_E}{\frac{\delta x_{e-}}{k_P} + \frac{\delta x_{e+}}{k_E}} \quad (15)$$

δx_{e-} est la distance entre l'interface e et le nœud P

De (12),(13),(14) et (15), on a :

$$k_e = \left(\frac{1-f_e}{k_P} + \frac{f_e}{k_E} \right)^{-1} \quad (16)$$

Si $\delta x_{e+} = \delta x_{e-}$, alors $f_e = \frac{1}{2}$ et par conséquent (16) se réduit à :

$$k_e = \frac{2k_P k_E}{k_P + k_E} \quad (17)$$

$$k_e = \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_P} + \frac{1}{k_E} \right)} \quad (18)$$

Ce qui représente la moyenne harmonique de k_P et k_E .

Cette formule est meilleure que la moyenne arithmétique. En effet,

- 1) Si $k_E \rightarrow 0$, alors de (17) on a : $k_e \rightarrow 0$. Ce qui implique que le flux à travers une surface isolée est zéro. Par contre, la moyenne arithmétique donne un flux différent de zéro.
- 2) Si $k_P \gg k_E$, alors $k_e \rightarrow \frac{k_E}{f_e}$. Ce qui implique que k_e ne dépend pas de k_P ce qui est espéré, car la haute conductivité du matériau entourant P offre une résistance négligeable.

1.7 Condition aux limites

Il y a trois types de conditions aux limites :

- 1) Température à la frontière donnée.
- 2) Flux à la frontière donné.
- 3) Flux exprimé en fonction d'un coefficient de chaleur et de la température du fluide environnant.

Si la température est donnée, il n'y a aucun problème. Sinon, nous devons trouver une équation pour cette température. Pour ce faire, intégrons l'équation (1) du problème(I) sur le demi volume de contrôle ci-dessous.

$$\int_{\frac{\Delta V}{2}} \frac{d(k \frac{dT(x)}{dx})}{dx} + S dV = \int_{x_B}^e \frac{d(k \frac{dT(x)}{dx})}{dx} + (S_c + S_P T_B) \frac{\Delta x}{2} = 0 \quad (19)$$

$$\left[k \frac{d(T(x))}{dx} \right]_e - \left[k \frac{d(T(x))}{dx} \right]_{x_B} + (S_c + S_P T_B) \frac{\Delta x}{2} = 0 \quad (20)$$

Or

$$\left[k \frac{d(T(x))}{dx} \right]_e = 2k_e \frac{T_E - T_B}{\delta x_e} \quad (21)$$

$$\left[k \frac{d(T(x))}{dx} \right]_B = -q_B \quad (22)$$

Portons (21) et (22) dans (20)

$$q_B + 2k_e \frac{T_E - T_B}{\delta x_e} + (S_c + S_p T_B) \frac{\Delta x}{2} = 0 \quad (23)$$

1) Si q_B est donné alors (23) s'écrit sous la forme standard :

$$a_B T_B = a_E T_E + b \quad (24)$$

Où

$$a_E = 2 \frac{k_e}{\delta x_e} \quad , \quad a_B = a_E - S_p \frac{\Delta x}{2} \quad , \quad b = q_B + S_c \frac{\Delta x}{2}$$

1) Si q_B est exprimé en fonction d'un coefficient de chaleur et de la température T_f du fluide environnant :

$$q_B = h(T_f - T_B)$$

alors (23) s'écrit sous la forme standard :

$$a_B T_B = a_E T_E + b$$

Où

$$a_E = 2 \frac{k_e}{\delta x_e} \quad , \quad a_B = a_E - S_p \frac{\Delta x}{2} + h \quad , \quad b = h T_f + S_c \frac{\Delta x}{2}$$

1.8 Algorithme de Thomas

Dans ce qui suit, nous donnons le principe de la méthode de Thomas qui n'est que l'adaptation de l'élimination de Gauss aux systèmes tridiagonaux.

Considérons

$$a_p T_p = a_E T_E + a_W T_W + b \quad (25)$$

Numérotons les nœuds de 1 à N . Avec cette numérotation, (25) s'écrit :

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1} + d_i, i = 1, 2, \dots, N \quad (26)$$

Où P correspond au nœud i , E correspond au nœud $i+1$, W correspond au nœud $i-1$

Pour $i = 1$, on pose

$$c_1 = 0 \text{ (car } T_0 \text{ n'a aucun role significatif)}$$

Et

Et pour $i = N$, on pose

$$b_N = 0 \text{ (} T_{N+1} \text{ n'a aucun role significatif)}$$

L'équation correspondant à $i = 2$ relie T_1 , T_2 et T_3 et puisque T_1 peut être exprimée en fonction de T_2 seulement, alors cette équation relie T_2 et T_3 seulement. En continuant ainsi jusqu'à l'équation correspondant à $i = N$ reliant T_N et T_{N+1} . Mais T_{N+1} n'a aucun role significatif, donc cette dernière équation donne la valeur de T_N . En remontant nous obtenons T_{N-1} en fonction de T_N , en continuant ainsi jusqu'à l'équation correspondant à $i = 1$ qui nous donne T_1 en fonction de T_2 .

D'après ce qu'on vient de faire, la nouvelle équation i est de la forme :

$$T_i = P_i T_{i+1} + Q_i \quad (27)$$

Où P_i et Q_i son à déterminés.

(27) s'obtient après avoir déterminé la relation liant T_{i-1} à T_i :

$$T_{i-1} = P_{i-1} T_i + Q_{i-1} \quad (28)$$

Où $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \dots, P_{i-1}$ et Q_{i-1} sont déjà déterminés.

Déterminons maintenant P_i et Q_i .

Pour ce faire, portons (28) dans (26), nous obtenons :

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i (P_{i-1} T_i + Q_{i-1}) + d_i$$

$$T_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} T_{i+1} + \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (29)$$

Identifiant cette équation avec (27), nous obtenons :

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (30)$$

$$Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad , i = 1, 2, \dots, N \quad (31)$$

Où

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \quad (32)$$

$$Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \quad (33)$$

Puisque $b_N = 0$, alors d'après (30), $P_N = 0$ et par conséquent $T_N = Q_N$. En portant cette valeur dans l'équation (29), nous obtenons successivement $T_{N-1}, T_{N-2}, \dots, T_1$

Chapitre II

Résolution d'un Problème de Conduction de la Chaleur en Régime instationnaire

2.1 Problème de conduction de la chaleur en une dimension et instationnaire

Considérons le problème aux limites suivant :

$$(I) \quad \begin{cases} \rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \left(k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right)}{\partial x} & 0 \leq x \leq 1, t > 0 & (1) \\ T(0, t) = f(t) & t > 0 & (2) \\ T(1, t) = g(t) & t > 0 & (3) \\ T(x, 0) = h(x) & 0 \leq x \leq 1 & (4) \end{cases}$$

Où

K est la conductivité thermique et T est la température.

Posons T_P^0, T_E^0, T_W^0 les valeurs de T à l'instant $t \geq 0$ et T_P^1, T_E^1, T_W^1 les valeurs de T à l'instant $t + \Delta t$

Intégrons l'équation (1) du problème (I) sur le volume de contrôle entourant P et sur l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$.

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Delta V} \rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} dV dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Delta V} \frac{\partial \left(k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right)}{\partial x} dV dt \quad (5)$$

$$\rho c \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} dt dx = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial \left(k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right)}{\partial x} dx dt \quad (6)$$

Pour l'intégrale à gauche, supposons que la température est T_P sur tout le volume de contrôle ΔV , alors

$$\int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} dt dx = \int_w^e (T_P^1 - T_P^0) dx = (T_P^1 - T_P^0) \Delta x \quad (7)$$

Et

$$\int_w^e \frac{\partial \left(k \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right)}{\partial x} dx = \left[k \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right]_w^e = k_e \left[\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right]_e - k_w \left[\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right]_w \quad (8)$$

Or

$$k_e \left[\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right]_e = k_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} \quad (9)$$

Et

$$k_w \left[\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right]_w = k_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \quad (10)$$

Donc (8) se réduit à :

$$\int_w^e \frac{\partial \left(k \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right)}{\partial x} dx = k_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} - k_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \quad (11)$$

Portons (7) et (11) dans (6) nous obtenons :

$$\rho c (T_P^1 - T_P^0) \Delta x = \int_t^{t+\Delta t} k_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} - k_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} dt \quad (12)$$

A ce niveau, nous devons faire une supposition sur la manière T_P, T_E, T_W varient avec t .

Proposons :

$$\int_t^{t+\Delta t} T_P dt = (f T_P^1 + (1-f) T_P^0) \Delta t \quad (13)$$

Où

$$0 \leq f \leq 1$$

Alors de (12) on a :

$$\begin{aligned} \rho c (T_P^1 - T_P^0) \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \frac{k_e}{\delta x_e} [(f(T_E^1 - T_P^1) + (1-f)(T_E^0 - T_P^0))] \\ &\quad - \frac{k_w}{\delta x_w} [(f(T_P^1 - T_W^1) + (1-f)(T_P^0 - T_W^0))] \end{aligned}$$

$$\left[\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{k_e f}{\delta x_e} + \frac{k_w f}{\delta x_w} \right] T_P^1 = \frac{k_e}{\delta x_e} [f T_E^1 + (1-f) T_E^0] + \frac{k_w}{\delta x_w} [f T_W^1 + (1-f) T_W^0] + \left[\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} - (1-f) \frac{k_e}{\delta x_e} - (1-f) \frac{k_w}{\delta x_w} \right] T_P^0$$

$$a_P T_P = a_E [f T_E + (1-f) T_E^0] + a_W [f T_W + (1-f) T_W^0] + [a_P^0 - (1-f) a_E - a_W] T_P^0 \quad (14)$$

Où

$$a_E = \frac{k_e}{\delta x_e}, \quad a_W = \frac{k_w}{\delta x_w}, \quad a_P^0 = \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad a_P = f a_E + f a_W + a_P^0$$

2.1.1 Schéma explicite

Si on choisit $f = 0$, l'équation (14) se réduit à

$$a_P T_P = a_E T_E^0 + a_W T_W^0 + (a_P^0 - a_E - a_W) T_P^0 \quad (15)$$

(15) est appelée schéma explicite. Il est conditionnellement stable. La condition de stabilité, dans le cas où $\Delta x = \delta x_e = \delta x_w$ et $k_e = k_w = k$, est

$$\Delta t < \rho c \frac{\Delta x^2}{2k} \quad (16)$$

En effet, si cette condition n'est pas respectée, alors le coefficient $(a_P^0 - a_E - a_W)$ de T_P^0 (considéré comme un voisin de T_P dans la direction du temps) serait négatif ce qui est une violation de la règle 2. Ce Schéma est appelé explicite car T_P s'obtient directement de (15) dont le membre droit est connu.

2.1.2 Schéma de Crank-Nicolson

Si on choisit $f = \frac{1}{2}$, l'équation (14) se réduit à

$$a_P T_P = \frac{a_E}{2} (T_E + T_E^0) + \frac{a_W}{2} (T_W + T_W^0) + (a_P^0 - \frac{a_E + a_W}{2}) T_P^0 \quad (17)$$

(17) est appelée schéma de Crank-Nicolson. Il est inconditionnellement stable. Cependant, il peut donner des solutions oscillantes car la stabilité au sens mathématique assure

simplement que ces oscillations seront amorties mais pas la plausibilité physique des solutions.

2.1.3 Schéma purement implicite

Si on choisit $f = 1$, l'équation (14) devient :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_P^0 T_P^0 \quad (18)$$

(18) est appelée schéma purement implicite. Il est inconditionnellement stable et satisfait aux conditions assurant un comportement physiquement réaliste des solutions. C'est pour cela que ce schéma est préféré.

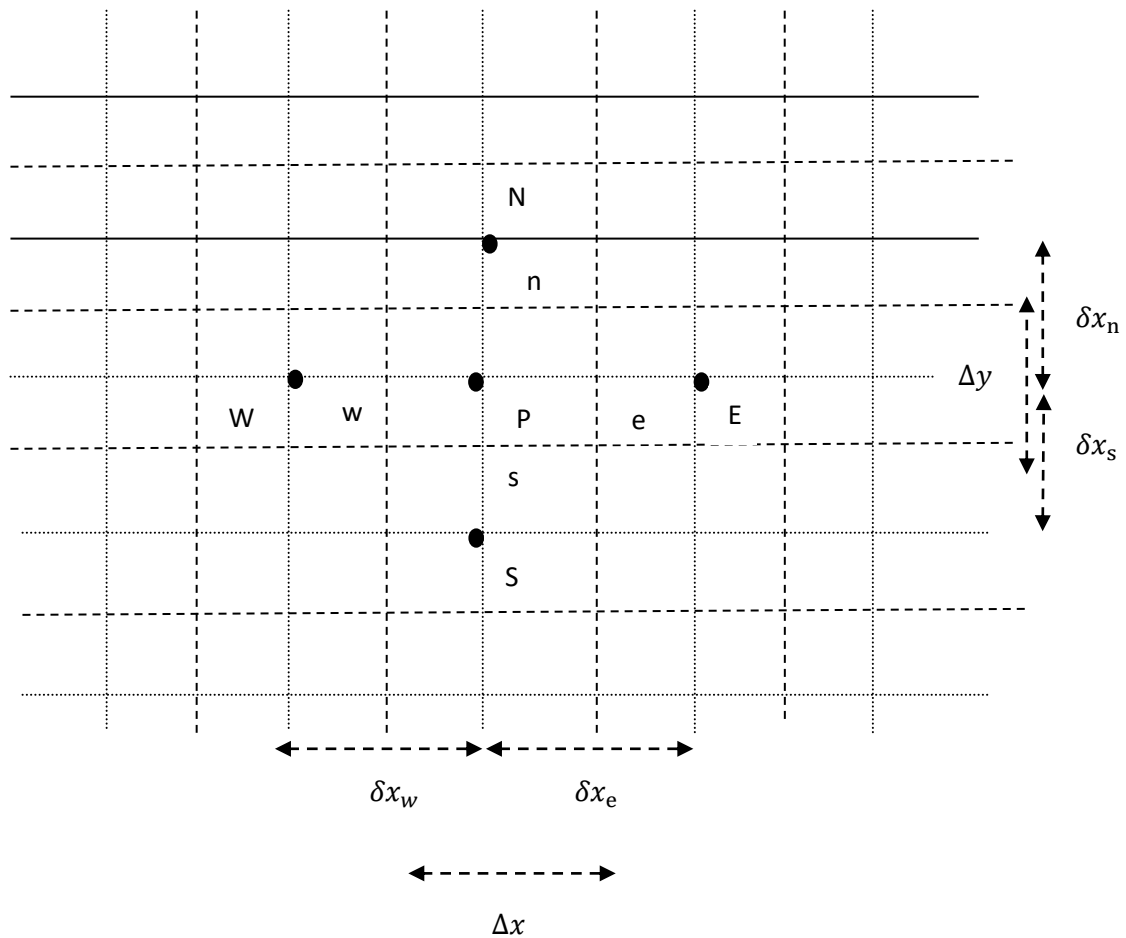
2.2 Problème de conduction de la chaleur en deux dimensions et instationnaire

Considérons le problème aux limites suivant :

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \rho c \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\partial \left(k \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(k \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} \right)}{\partial y} + S \quad (x,y) \in D = [0,1] \times [0,1], t > 0 \quad (1) \\ T(x,y,t) = f(t) \quad (x,y) \in \text{Frontière de } D, t > 0 \quad (2) \\ T(x,y,t) = g(t) \quad (x,y) \in \text{Frontière de } D, t > 0 \quad (3) \\ T(x,y,0) = h(x,y) \quad (x,y) \in D \quad (4) \end{array} \right.$$

Où,

K est la conductivité thermique et T est la température.



En appliquant à $\frac{\partial(k\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y})}{\partial y}$ le même traitement que celui de $\frac{\partial(k\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x})}{\partial x}$ dans le cas unidimensionnel traité précédemment, nous obtenons :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + b$$

Où,

$$a_E = \frac{k_e \Delta y}{\delta x_e}, a_W = \frac{k_w \Delta y}{\delta x_w}, a_N = \frac{k_n \Delta x}{\delta x_n}, a_S = \frac{k_s \Delta x}{\delta x_s}, a_P^0 = \rho c \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y \text{ et } b = S_c \Delta x \Delta y + a_P^0 T_P^0$$

$\Delta x \Delta y$ est le volume de contrôle avec $\Delta z = 1$.

Chapitre III

Résolution d'un Problème de Convection et Diffusion

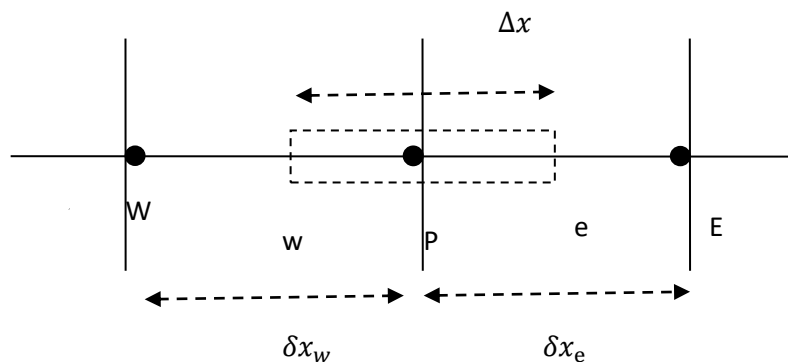
en Régime Stationnaire

3.1 Problème de convection diffusion en une dimension

$$\frac{d(\rho u \varphi(x))}{dx} = \frac{d\left(\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx}\right)}{dx} \quad (1)$$

Où u représente la vitesse dans la direction x .

3.2 Schéma différence centrale



Intégrons l'équation (1) sur le volume de contrôle ΔV ci-dessus :

$$\int_{\Delta V} \frac{d(\rho u \varphi(x))}{dx} dV = \int_{\Delta V} \frac{d\left(\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx}\right)}{dx} dV \quad (2)$$

$$\int_w^e \frac{d(\rho u \varphi(x))}{dx} dx = \int_w^e \frac{d\left(\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx}\right)}{dx} dx \quad (3)$$

$$[(\rho u \varphi(x))]_e - [(\rho u \varphi(x))]_w = \left[\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx}\right]_e - \left[\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx}\right]_w \quad (4)$$

En supposant un profile linéaire pour $\varphi(x)$, on a :

$$\varphi_e = \frac{1}{2}(\varphi_E + \varphi_P) \quad (5)$$

$$\varphi_w = \frac{1}{2}(\varphi_P + \varphi_W) \quad (6)$$

Où e et w sont aux milieux de PE et PW respectivement .

Utilisons un profile linéaire par morceaux pour calculer $\left[\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]_e$ et $\left[\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]_w$, nous obtenons :

$$\left[\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]_e = \Gamma_e \frac{\varphi_E - \varphi_P}{\delta x_e} \quad (7)$$

$$\left[\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]_w = \Gamma_w \frac{\varphi_P - \varphi_W}{\delta x_w} \quad (8)$$

Portons (5),(6), (7)et (8) dans (4), nous obtenons :

$$\frac{1}{2}[\rho u]_e(\varphi_E + \varphi_P) - \frac{1}{2}[\rho u]_w(\varphi_P + \varphi_W) = \Gamma_e \frac{\varphi_E - \varphi_P}{\delta x_e} - \Gamma_w \frac{\varphi_P - \varphi_W}{\delta x_w} \quad (9)$$

Où Γ_e et Γ_w s'obtiennent de la même manière que précédemment, en supposant un profile linéaire :

$$\Gamma_e = \frac{1}{2}(\Gamma_E + \Gamma_P) \quad (10)$$

$$\Gamma_w = \frac{1}{2}(\Gamma_P + \Gamma_W) \quad (11)$$

Posons :

$$F = \rho u \quad (12)$$

F est appelé l'intensité de convection et

$$D = \frac{\Gamma}{\delta x} \quad (13)$$

F est appelé la conductance de diffusion

Portons (10), (11), (12) et (13), l'équation (9) se réduit à

$$a_P \varphi_P = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W \quad (14)$$

Où

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \quad (15)$$

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2} \quad (16)$$

$$a_P = D_e + \frac{F_e}{2} + D_w - \frac{F_w}{2} = a_E + a_W + (F_e - F_w) \quad (17)$$

Ce schéma est appelé schéma différence centrale. Il est limité à des nombres de Reynolds faibles ($\frac{F}{D}$ petit). Il peut donner des résultats non plausibles. En effet, considérons l'exemple suivant :

- 1) Si $D_e = D_w = 1$, $F_e = F_w = 4$, $\varphi_E = 200$ et $\varphi_W = 100$ alors $\varphi_P = 50$ qui est physiquement inacceptable, car elle est supposée être entre 100 et 200.
- 2) $\varphi_E = 100$ et $\varphi_W = 200$ alors $\varphi_P = 250$ qui est aussi physiquement inacceptable, car elle est supposée être entre 100 et 200.

3.3 Schéma Upwind

Pour remédier aux difficultés rencontrées précédemment, nous évaluons φ_e et φ_w , au lieu de leur attribuer des valeurs moyennes, nous allons supposer :

$$\varphi_e = \begin{cases} \varphi_P, & \text{si } F_e > 0 \\ \varphi_E, & \text{si } F_e < 0 \end{cases} \quad (18)$$

Et

$$\varphi_w = \begin{cases} \varphi_W, & \text{si } F_w > 0 \\ \varphi_P, & \text{si } F_w < 0 \end{cases} \quad (19)$$

Pour simplifier l'écriture de l'équation :

$$F_e \varphi_e - F_w \varphi_w = \Gamma_e \frac{\varphi_E - \varphi_W}{\delta x_e} - \Gamma_w \frac{\varphi_P - \varphi_W}{\delta x_w} \quad (20)$$

Introduisons l'opérateur $\|\cdot, \cdot\|$ défini sur $R \times R$ par

$$\|A, B\| = \text{maximum}(A, B) \quad (21)$$

alors

$$F_e \varphi_e = \varphi_P \|F_e, 0\| - \varphi_E \| -F_e, 0\| \quad (22)$$

$$F_w \varphi_w = \varphi_W \|F_w, 0\| - \varphi_P \| -F_w, 0\| \quad (23)$$

Portons (22) et (23) dans (20), nous obtenons :

$$a_P \varphi_P = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W$$

Où

$$a_E = D_e + \| -F_e, 0\| \quad (24)$$

$$a_W = D_w + \|F_w, 0\| \quad (25)$$

$$a_P = D_e + \|F_e, 0\| + D_w + \| -F_w, 0\| = a_E + a_W + (F_e - F_w) \quad (26)$$

Ce schéma est appelé Upwind.

3.4 Schéma Hybride

Le schéma hybride est un schéma qui exploite les avantages des schéma centrale et upwind. Son équation de discrétisation est donnée par :

$$a_P \varphi_P = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W \quad (27)$$

Où,

$$a_E = \left\| -F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0 \right\| \quad (28)$$

$$a_W = \left\| F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0 \right\| \quad (29)$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w) \quad (30)$$

Partie TD

TD SUR LE

CHAPITRE I

Méthode des Volumes Finis

Pour la

Résolution d'un Problème de Conduction de la Chaleur en Régime Stationnaire

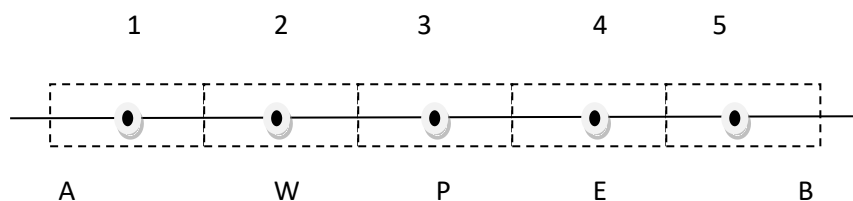
EXERCICE 1.1

En utilisant la méthode des volumes finis, déterminer les valeurs approchées de $T(0.05)$, $T(0.15)$, $T(0.25)$, $T(0.35)$ et $T(0.45)$, où $T(x)$ est la solution exacte du problème (1).

$$(I) \begin{cases} \frac{d^2 T(x)}{dx^2} = 0 & 0 \leq x \leq 0.5 & (1) \\ T(0) = 100 & & (2) \\ T(1) = 500 & & (3) \end{cases}$$

Solution

Divisons l'intervalle $[0, 0.5]$ en cinq sous intervalles de longueur $\Delta x = \frac{0.5}{5} = 0.1$, prenons comme nœuds les centres de ces sous intervalles. Chacun de ces nœuds est entouré d'un volume de contrôle dont les épaisseurs suivant les directions x , y et z sont respectivement Δx , 1 et 1.



L'équation discrète correspondant au volume de contrôle autour du point P est

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W \quad (4)$$

Où

$$a_E = \frac{k_e}{\delta x_e} = \frac{1}{\delta x_e}, \quad a_W = \frac{k_w}{\delta x_w} = \frac{1}{\delta x_w}, \quad a_P = a_E + a_W \quad \delta x_e = \delta x_w = \Delta x = 0.1,$$

Dance cas, (4) se réduit à :

$$2T_P = T_E + T_W \quad (5)$$

Où P correspond aux nœuds : 2, 3, 4

Les conditions aux limites nécessitent un traitement spécial qui est le suivant :

Traitement du nœud 1

Intégrons l'équation (1) du problème (I) sur le volume de contrôle entourant le point P correspondant au nœud 1.

$$\int_V \frac{d^2 T(x)}{dx^2} dV = \int_{x_w}^{x_e} \frac{d^2 T(x)}{dx^2} dx = \left[\frac{dT(x)}{dx} \right]_e - \left[\frac{dT(x)}{dx} \right]_w = 0 \quad (6)$$

Or

$$\left[\frac{dT(x)}{dx} \right]_e = \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} = \frac{T_E - T_P}{\Delta x} \quad (7)$$

$$\left[\frac{d(kT(x))}{dx} \right]_w = \frac{T_P - T_A}{\frac{\delta x_w}{2}} = 2 \frac{T_P - T_A}{\Delta x} \quad (8)$$

Portons (7) et (8) dans (6), nous obtenons :

$$\frac{T_E - T_P}{\Delta x} - 2 \frac{T_P - T_A}{\Delta x} = 0$$

$$3T_P = T_E + 2T_A \quad (9)$$

où $T_A = 100$

En portant cette valeur dans (9), nous obtenons :

$$3T_P = T_E + 200 \quad (10)$$

P correspond au nœud 1.

Traitement du nœud 5

Intégrons l'équation (1) du problème (I) sur le volume de contrôle entourant le point P correspondant au nœud 5.

$$\int_V \frac{d^2T(x)}{dx^2} dV = \int_{x_w}^{x_e} \frac{d^2T(x)}{dx^2} dx = \left[\frac{dT(x)}{dx} \right]_e - \left[\frac{dT(x)}{dx} \right]_w = 0 \quad (11)$$

Or

$$\left[\frac{dT(x)}{dx} \right]_e = \frac{T_B - T_P}{\frac{\delta x_e}{2}} = 2 \frac{T_B - T_P}{\Delta x} \quad (12)$$

$$\left[\frac{dT(x)}{dx} \right]_w = \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \quad (13)$$

En tenant compte de (12) et (13), (11) nous donne :

$$2 \frac{T_B - T_P}{\Delta x} - \frac{T_P - T_W}{\Delta x} = 0$$
$$3T_P = T_W + 2T_B \quad (14)$$

où $T_B = 500$

En portant cette valeur dans (14), nous obtenons :

$$3T_P = T_W + 1000 \quad (15)$$

P correspond au nœud 5

L'équation donnée par (10), les trois équations données par (5) et l'équation donnée par (15) constituent un système algébrique linéaire de cinq équations avec cinq inconnues: $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, $T(4)$ et $T(5)$:

$$(II) \begin{cases} 3T_1 - T_2 & = 200 \\ -T_1 + 2T_2 - T_3 & = 0 \\ -T_2 + 2T_3 - T_4 & = 0 \\ -T_3 + 2T_4 - T_5 & = 0 \\ -T_4 + 3T_5 & = 1000 \end{cases}$$

Sous forme matricielle, (II) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

C'est un système tridiagonal dont la solution est :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 220 \\ 300 \\ 380 \\ 460 \end{bmatrix}$$

Cette solution est obtenue par matlab, en utilisant les instructions de matlab suivantes :

A=[3 -1 0 0 0;-1 2 -1 0 0;0 -1 2 -1 0;0 0 -1 2 -1;0 0 0 -1 3];

B=[200;0;0;0;0;1000];

T=A\B

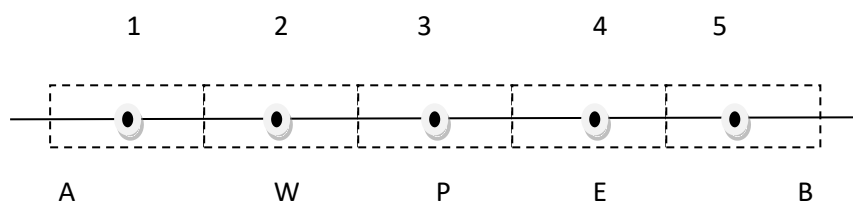
EXERCICE 1.2

En utilisant la méthode des volumes finis, déterminer les valeurs approchées de $T(0.002)$, $T(0.006)$, $T(0.01)$, $T(0.014)$ et $T(0.018)$, où $T(x)$ est la solution exacte du problème (1).

$$(II) \begin{cases} \frac{d^2T(x)}{dx^2} + 2x10^6 = 0 & 0 \leq x \leq 0.02 & (1) \\ T(0) = 100 & & (2) \\ T(1) = 200 & & (3) \end{cases}$$

Solution

Divisons l'intervalle $[0, 0.02]$ en cinq sous intervalles de longueur $\Delta x = \frac{0.02}{5} = 0.004$, prenons comme nœuds les centres de ces sous intervalles . Chacun de ces nœuds est entouré d'un volume de contrôle dont les épaisseurs suivant les directions x , y et z sont respectivement Δx , 1 et 1.



L'équation discrète correspondant au volume de contrôle autour du point P est

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b \quad (16)$$

Où

$$a_E = \frac{k_e}{\delta x_e} = \frac{1}{\delta x_e}, a_W = \frac{k_w}{\delta x_w} = \frac{1}{\delta x_w}, a_P = a_E + a_W - S_P \text{ et } b = \bar{S} \Delta x$$

$$\delta x_e = \delta x_w = \Delta x = 0.004, S_P = 0 \text{ et } S_c = 2 \times 10^6 \text{ (car } \bar{S} = S_c + S_P T_P = 2 \times 10^6 \text{)}$$

Dans ce cas, (16) se réduit à :

$$2T_P = T_E + T_W + 2 \times 10^6 \Delta x^2 \quad (17)$$

Où

P correspond aux nœuds : 2, 3, 4

Les conditions aux limites nécessitent un traitement spécial qui est le suivant :

Traitement du nœud 1

Intégrons l'équation (1) du problème (II) sur le volume de contrôle entourant le point P correspondant au nœud 1.

$$\int_V \frac{d^2T(x)}{dx^2} dV + \int_V 2 \times 10^6 dV = \int_{x_w}^{x_e} \frac{d^2T(x)}{dx^2} dx = \left[\frac{dT(x)}{dx} \right]_e - \left[\frac{dT(x)}{dx} \right]_w + 2 \times 10^6 \Delta x = 0 \quad (18)$$

Or

$$\left[\frac{dT(x)}{dx} \right]_e = \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} = \frac{T_E - T_P}{\Delta x} \quad (19)$$

$$\left[\frac{d(kT(x))}{dx} \right]_w = \frac{T_P - T_A}{\frac{\delta x_w}{2}} = 2 \frac{T_P - T_A}{\Delta x} \quad (20)$$

Portons (19) et (20) dans (18), nous obtenons :

$$\frac{T_E - T_P}{\Delta x} - 2 \frac{T_P - T_A}{\Delta x} + 2 \times 10^6 \Delta x = 0$$

$$3T_P = T_E + 2T_A + 2 \times 10^6 \Delta x^2 \quad (21)$$

où $T_A = 100$

En portant cette valeur dans (21), nous obtenons :

$$3T_P = T_E + 200 + 2 \times 10^6 \Delta x^2 \quad (22)$$

P correspond au nœud 1

Traitement du nœud 5

Intégrons l'équation (1) du problème (II) sur le volume de contrôle entourant le point P correspondant au nœud 5.

$$\int_V \frac{d^2T(x)}{dx^2} dV + \int_V 2 \times 10^6 dV = \int_{x_w}^{x_e} \frac{d^2T(x)}{dx^2} dx = \left[\frac{dT(x)}{dx} \right]_e - \left[\frac{dT(x)}{dx} \right]_w + 2 \times 10^6 \Delta x = 0 \quad (23)$$

Or

$$\left[\frac{dT(x)}{dx} \right]_e = \frac{T_B - T_P}{\frac{\delta x_e}{2}} = 2 \frac{T_B - T_P}{\Delta x} \quad (24)$$

$$\left[\frac{dT(x)}{dx} \right]_W = \frac{T_P - T_W}{\delta x_W} \quad (25)$$

En tenant compte de (24) et (25), (23) nous donne :

$$2 \frac{T_B - T_P}{\Delta x} - \frac{T_P - T_W}{\Delta x} + 2 \times 10^6 \Delta x = 0$$

$$3T_P = T_W + 2T_B + 2 \times 10^6 \Delta x^2 \quad (26)$$

où $T_B = 200$

En portant cette valeur dans (26), nous obtenons :

$$3T_P = T_W + 400 + 2 \times 10^6 \Delta x^2 \quad (27)$$

P correspond au nœud 5

L'équation donnée par (22), les trois équations données par (17) et l'équation donnée par (27) constituent un système algébrique linéaire de cinq équations avec cinq inconnues: $T(1), T(2), T(3), T(4)$ et $T(5)$:

$$(III) \begin{cases} 3T_1 - T_2 & = 200 + 2 \times 10^6 \Delta x^2 \\ -T_1 + 2T_2 - T_3 & = 2 \times 10^6 \Delta x^2 \\ -T_2 + 2T_3 - T_4 & = 2 \times 10^6 \Delta x^2 \\ -T_3 + 2T_4 - T_5 & = 2 \times 10^6 \Delta x^2 \\ -T_4 + 3T_5 & = 400 + 2 \times 10^6 \Delta x^2 \end{cases}$$

Où $\Delta x = 0.004$

Sous forme matricielle, (III) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 232 \\ 32 \\ 32 \\ 32 \\ 432 \end{bmatrix}$$

C'est un système tridiagonal dont la solution est :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 218 \\ 254 \\ 258 \\ 230 \end{bmatrix}$$

Cette solution est obtenue par matlab, en utilisant les instructions de matlab suivantes :

$$A=[3 -1 0 0 0 ; -1 2 -1 0 0 ; 0 -1 2 -1 0 ; 0 0 -1 2 -1 ; 0 0 0 -1 3] ;$$

$$B=[232 ; 32 ; 32 ; 32 ; 1000] ;$$

$$T=A \setminus B$$

Dans ce qui suit, nous allons développer une méthode de résolution de systèmes tridagonaux qui exploite la structure de ce type de système.

EXERCICE 1.3

En utilisant la méthode des volumes finis, déterminer les valeurs approchées de $T(0.1)$, $T(0.3)$, $T(0.5)$, $T(0.7)$ et $T(0.9)$, où $T(x)$ est la solution exacte du problème (IV).

$$(IV) \begin{cases} \frac{d^2 T(x)}{dx^2} - n^2(T - T_\infty) = 0 & 0 \leq x \leq 1 & (1) \\ T(0) = 100 & & (2) \\ \frac{dT(1)}{dx} = 0 & & (3) \end{cases}$$

Solution

Divisons l'intervalle $[0, 1]$ en cinq sous intervalles de longueur $\Delta x = \frac{1}{5} = 0.004$, prenons comme nœuds les centres de ces sous intervalles . Chacun de ces nœuds est entouré d'un volume de contrôle dont les épaisseurs suivant les directions x , y et z sont respectivement Δx , 1 et 1.

Intégrons l'équation (1) du problème (IV) sur le volume de contrôle entourant le point P.

$$\int_{\Delta V} \frac{d^2 T(x)}{dx^2} dV - n^2 \int_{\Delta V} (T - T_\infty) dV = 0 \quad (28)$$

Le premier terme a été traité précédemment :

$$\int_{\Delta V} \frac{d^2 T(x)}{dx^2} dV = k_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} - k_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \quad (29)$$

Pour le traitement du deuxième terme, nous supposons que T est constante dans chaque volume de contrôle et elle est égale à T_P .

$$\int_{\Delta V} (T - T_\infty) dV = (T_P - T_\infty) \Delta x \quad (30)$$

Portons (29) et (30) dans (28) et en tenant compte de $\delta x_e = \delta x_w = \Delta x$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} k_e \frac{T_E - T_P}{\Delta x} - k_w \frac{T_P - T_W}{\Delta x} - n^2 (T_P - T_\infty) \Delta x &= 0 \\ \left(\frac{k_e}{\Delta x} + \frac{k_w}{\Delta x} + n^2 \Delta x \right) T_P &= k_e \frac{T_E}{\Delta x} + k_w \frac{T_W}{\Delta x} + n^2 T_\infty \Delta x \\ a_P T_P &= a_E T_E + a_W T_W + b \end{aligned} \quad (31)$$

Où

$$a_P = \frac{k_e}{\Delta x} + \frac{k_w}{\Delta x} + n^2 \Delta x, \quad a_E = \frac{k_e}{\Delta x}, \quad a_W = \frac{k_w}{\Delta x}, \quad b = n^2 T_\infty \Delta x$$

L'équation (30) est valable pour tous les nœuds qui ne sont pas voisins des frontières du domaine de contrôle, c'est-à-dire P correspond aux nœuds 2, 3, 4.

Traitement du nœud 1

Au nœud 1 la face west du volume de contrôle est maintenue à une température constante T_A . Donc, en procédant de la même manière que dans l'exercice 2.1, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left(\frac{k_e}{\Delta x} + \frac{2k_w}{\Delta x} + n^2 \Delta x \right) T_P &= k_e \frac{T_E}{\Delta x} + \frac{2k_w T_A}{\Delta x} + n^2 T_\infty \Delta x \\ a_P T_P &= a_E T_E + a_W T_W + b \end{aligned} \quad (32)$$

Où

$$a_P = \frac{k_e}{\Delta x} + \frac{2k_w}{\Delta x} + n^2 \Delta x, \quad a_E = \frac{k_e}{\Delta x}, \quad a_W = 0, \quad b = \frac{2k_w T_A}{\Delta x} + n^2 T_\infty \Delta x \quad (33)$$

P correspond au nœud 1

Traitement du nœud 5

De la même manière que précédemment, (27) donne :

$$k_e \left[\frac{dT(x)}{dx} \right]_e - k_w \left[\frac{dT(x)}{dx} \right]_w - n^2(T_P - T_\infty)\Delta x \quad (34)$$

Or , au nœud 5 la face est du volume de contrôle est maintenue isolée : $\left[\frac{dT(x)}{dx} \right]_e = \frac{dT(1)}{dx} = 0$.

Donc , (34) se réduit à

$$0 - k_w \frac{T_P - T_W}{\Delta x} - n^2(T_P - T_\infty)\Delta x = 0 \quad (35)$$

$$\left(\frac{k_w}{\Delta x} + n^2\Delta x \right) T_P = \frac{k_w T_W}{\Delta x} + n^2 T_\infty \Delta x \quad (36)$$

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b \quad (37)$$

Où

$$a_P = \frac{k_w}{\Delta x} + n^2\Delta x, a_E = 0, a_W = \frac{k_w}{\Delta x}, b = n^2 T_\infty \Delta x \quad (38)$$

P correspond au nœud 5

L'équation donnée par(33), les trois équations données par (31) et l' équation donnée par (37) constituent un système algébrique linéaire de cinq équations avec cinq inconnues: $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, $T(4)$ et $T(5)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{k_e}{\Delta x} + \frac{2k_w}{\Delta x} + n^2\Delta x \right) T_1 - \left(\frac{k_e}{\Delta x} \right) T_2 = \frac{2k_w T_B}{\Delta x} + n^2 T_\infty \Delta x \\ - \left(\frac{k_w}{\Delta x} \right) T_1 + \left(\frac{k_e}{\Delta x} + \frac{k_w}{\Delta x} + n^2\Delta x \right) T_2 - \left(\frac{k_e}{\Delta x} \right) T_3 = n^2 T_\infty \Delta x \\ - \left(\frac{k_w}{\Delta x} \right) T_2 + \left(\frac{k_e}{\Delta x} + \frac{k_w}{\Delta x} + n^2\Delta x \right) T_3 - \left(\frac{k_e}{\Delta x} \right) T_4 = n^2 T_\infty \Delta x \\ - \left(\frac{k_w}{\Delta x} \right) T_3 + \left(\frac{k_e}{\Delta x} + \frac{k_w}{\Delta x} + n^2\Delta x \right) T_4 - \left(\frac{k_e}{\Delta x} \right) T_5 = n^2 T_\infty \Delta x \\ - \frac{k_w}{\Delta x} T_4 + \left(\frac{k_w}{\Delta x} + n^2\Delta x \right) T_5 = n^2 T_\infty \Delta x \end{array} \right.$$

Où $\Delta x = 0.2$, $k_e = k_w = 1$, $T_\infty = 20$, $T_B = 100$, $n^2 = 25$

Sous forme matricielle, ce système d'équations s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 20 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 15 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

C'est un système tridiagonal dont la solution est :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64.2 \\ 39.91 \\ 26.50 \\ 22.60 \\ 21.30 \end{bmatrix}$$

TD SUR LE

CHAPITRE II

Résolution d'un Problème de Conduction de la Chaleur

en Régime Instationnaire

EXERCICE 2.1

En utilisant la méthode explicite des volumes finis, déterminer les valeurs approchées de $T(0.002, t_j)$, $T(0.006, t_j)$, $T(0.01, t_j)$, $T(0.014, t_j)$ et $T(0.018, t_j)$, avec $t_j = j\Delta t$, $j = 1, 2, \dots$ et où $T(x, t)$ est la solution exacte du problème (I).

$$(I) \begin{cases} \rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \left(k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right)}{\partial x} & 0 \leq x \leq 0.02, t > 0 & (1) \\ \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0 & t > 0 & (2) \\ T(0.02, t) = 0 & t > 0 & (3) \\ T(x, 0) = 200 & 0 \leq x \leq 0.02 & (4) \end{cases}$$

Où

$$\rho c = 10 \times 10^6 \text{ J/K m}^3 \text{ et } k = 10 \text{ W/K m.}$$

Solution

La méthode explicite est conditionnellement stable. Donc le pas Δt doit vérifier la condition

$$\text{de stabilité : } \Delta t < \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2k}$$

$$\Delta t < \frac{\rho c (\Delta t)^2}{2k} = \frac{10 \times 10^6 (0.004)^2}{2 \times 10} = 8 \text{ s}$$

Cas1 : $\Delta t = 2 \text{ s}$

L'équation de discrétisation du schéma explicite est donnée par :

$$a_P T_P = a_E T_E^0 + a_W T_W^0 + (a_P^0 - a_E - a_W) T_P^0 \quad (39)$$

$$a_E = \frac{k_e}{\delta x_e} = \frac{10}{0.004} = 2500 \quad , \quad a_W = \frac{k_w}{\delta x_w} = 2500 \quad , \quad a_P^0 = \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} = 10 \times 10^6 \frac{0.004}{2} = 2 \times 10^4 =$$

$$, \quad a_P = a_P^0 = 2 \times 10^4$$

L'équation (39)(18)(19) est valable pour tous les nœuds qui ne sont pas voisins des frontières du domaine de contrôle, c'est-à-dire P correspond aux nœuds 2, 3, 4.

Traitement du nœud 1

Intégrons l'équation (1) du problème (I) sur le volume de contrôle entourant P correspondant au nœud 1 et sur l'intervalle de temps $[t \quad t + \Delta t]$ et tenons compte de $k_w \left[\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right]_w = 0$, nous obtenons :

$$\rho c (T_P^1 - T_P^0) \Delta x = \int_t^{t+\Delta t} k_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} dt$$

$$\rho c (T_P^1 - T_P^0) \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{k_e}{\delta x_e} (T_E^0 - T_P^0)$$

$$\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} T_P^1 = \frac{k_e}{\delta x_e} T_E^0 + \left(\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{k_e}{\delta x_e} \right) T_P^0 \quad (40)$$

Traitement du nœud 5

Intégrons l'équation (1) du problème (I) sur le volume de contrôle entourant P correspondant au nœud 5 et sur l'intervalle de temps $[t \quad t + \Delta t]$ et procédons de la même manière que précédemment en tenant compte de l'hypothèse : $T_B = cte$ pour $t > 0$, nous obtenons :

$$\rho c (T_P^1 - T_P^0) \Delta x = \int_t^{t+\Delta t} 2k_e \frac{T_B - T_P}{\delta x_e} - k_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} dt$$

$$\rho c (T_P^1 - T_P^0) \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2 \frac{k_e}{\delta x_e} (T_B - T_P^0) - \frac{k_w}{\delta x_w} (T_P^0 - T_W^0)$$

$$\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} T_P^1 = \frac{k_w}{\delta x_w} T_W^0 + \left(\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} - 2 \frac{k_e}{\delta x_e} - \frac{k_w}{\delta x_w} \right) T_P^0 + 2 \frac{k_e}{\delta x_e} T_B \quad (41)$$

L'équation donnée par (40), les trois équations données par (39) et l'équation donnée par (41) constituent un système algébrique linéaire de cinq équations avec cinq inconnues: $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, $T(4)$ et $T(5)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} T_1^1 = \frac{k_e}{\delta x_e} T_2^0 + \left(\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{k_e}{\delta x_e} \right) T_1^0 \\ \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} T_2^1 = \frac{k_e}{\delta x_e} T_3^0 + \frac{k_w}{\delta x_w} T_1^0 + \left(\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{k_e}{\delta x_e} - \frac{k_w}{\delta x_w} \right) T_2^0 \\ \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} T_3^1 = \frac{k_e}{\delta x_e} T_4^0 + \frac{k_w}{\delta x_w} T_2^0 + \left(\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{k_e}{\delta x_e} - \frac{k_w}{\delta x_w} \right) T_3^0 \\ \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} T_4^1 = \frac{k_w}{\delta x_w} T_5^0 + \frac{k_w}{\delta x_w} T_3^0 + \left(\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{k_e}{\delta x_e} - \frac{k_w}{\delta x_w} \right) T_4^0 \\ \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} T_5^1 = \frac{k_w}{\delta x_w} T_4^0 + \left(\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} - 2 \frac{k_e}{\delta x_e} - \frac{k_w}{\delta x_w} \right) T_5^0 + 2 \frac{k_e}{\delta x_e} T_B \end{array} \right.$$

En tenant compte de

$$\frac{k_e}{\delta x_e} = \frac{10}{0.004} = 2500 \quad , \quad \frac{k_w}{\delta x_w} = 2500 \quad , \quad a_p = \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} = 10 \times 10^6 \frac{0.004}{2} = 2 \times 10^4 \quad , \quad T_B = 0$$

$$T_1^0 = 200, T_2^0 = 200, T_3^0 = 200, T_4^0 = 200, T_5^0 = 200$$

Nous obtenons , à l'instant $t_1 = 2s$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 200T_1^1 = 25T_2^0 + 175T_1^0 \\ 200T_2^1 = 25T_3^0 + 25T_1^0 + 150T_2^0 \\ 200T_3^1 = 25T_4^0 + 25T_2^0 + 150T_3^0 \\ 200T_4^1 = 25T_5^0 + 25T_3^0 + 150T_4^0 \\ 200T_5^1 = 25T_4^0 + 125T_5^0 \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} T(0.002, 2) \\ T(0.006, 2) \\ T(0.01, 2) \\ T(0.014, 2) \\ T(0.018, 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \\ T_5^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 150 \end{bmatrix}$$

A l'instant $t_2 = 4s$, on a :

$$\begin{cases} 200T_1^2 = 25T_2^1 + 175T_1^1 \\ 200T_2^2 = 25T_3^1 + 25T_1^1 + 150T_2^1 \\ 200T_3^2 = 25T_4^1 + 25T_2^1 + 150T_3^1 \\ 200T_4^2 = 25T_5^1 + 25T_3^1 + 150T_4^1 \\ 200T_5^2 = 25T_4^1 + 125T_5^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 200T_1^2 = 25 \times 200 + 175 \times 200 \\ 200T_2^2 = 25 \times 200 + 25 \times 200 + 150 \times 200 \\ 200T_3^2 = 25 \times 200 + 25 \times 200 + 150 \times 200 \\ 200T_4^2 = 25 \times 150 + 25 \times 200 + 150 \times 200 \\ 200T_5^2 = 25 \times 200 + 125 \times 150 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} T(0.002, 4) \\ T(0.006, 4) \\ T(0.01, 4) \\ T(0.014, 4) \\ T(0.018, 4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^2 \\ T_2^2 \\ T_3^2 \\ T_4^2 \\ T_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \\ 193.75 \\ 118.75 \end{bmatrix}$$

EXERCICE 2.2

En utilisant la méthode implicite des volumes finis, déterminer les valeurs approchées de $T(0.002, t_j)$, $T(0.006, t_j)$, $T(0.01, t_j)$, $T(0.014, t_j)$ et $T(0.018, t_j)$, avec $t_j = j\Delta t$, $j = 1, 2, \dots$ et où $T(x, t)$ est la solution exacte du problème (I).

$$(I) \begin{cases} \rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial \left(k \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right)}{\partial x} & 0 \leq x \leq 0.02, t > 0 & (1) \\ \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0 & t > 0 & (2) \\ T(0.02,t) = 0 & t > 0 & (3) \\ T(x,0) = 200 & 0 \leq x \leq 0.02 & (4) \end{cases}$$

Où

$$\rho c = 10 \times 10^6 \text{ J/m}^3/\text{K} \text{ et } k = 10 \text{ W/m/K}$$

Solution

La méthode implicite est inconditionnellement stable.

Cas1 : $\Delta t = 2s$

L'équation de discrétisation du schéma implicite est donnée par :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_P^0 T_P^0 \quad (42)$$

Où

$$a_E = \frac{k_e}{\delta x_e}, \quad a_W = \frac{k_w}{\delta x_w}, \quad a_P^0 = \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad a_P = a_E + a_W + a_P^0$$

$$a_E = \frac{k_e}{\delta x_e} = \frac{10}{0.004} = 2500, \quad a_W = \frac{k_w}{\delta x_w} = 2500, \quad a_P^0 = \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} = 10 \times 10^6 \frac{0.004}{2} = 2 \times 10^4$$

$$, a_P = 5000 + 2 \times 10^4$$

L'équation (42) est valable pour tous les nœuds qui ne sont pas voisins des frontières du domaine de contrôle, c'est-à-dire P correspond aux nœuds 2, 3, 4.

Traitement du nœud 1

Intégrons l'équation (1) du problème (I) sur le volume de contrôle entourant P correspondant au nœud 1 et sur l'intervalle de temps $[t \ t + \Delta t]$ et tenons compte de

$k_w \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x} \right]_w = 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \rho c(T_P^1 - T_P^0)\Delta x &= \int_t^{t+\Delta t} k_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} dt \\ \rho c(T_P^1 - T_P^0) \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \frac{k_e}{\delta x_e} (T_E^1 - T_P^1) \\ \left(\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{k_e}{\delta x_e} \right) T_P^1 &= \frac{k_e}{\delta x_e} T_E^1 + \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} T_P^0 \end{aligned} \quad (43)$$

Traitement du nœud 5

Intégrons l'équation (1) du problème (I) sur le volume de contrôle entourant P correspondant au nœud 5 et sur l'intervalle de temps $[t \ t + \Delta t]$ et procédons de la même manière que précédemment, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \rho c(T_P^1 - T_P^0)\Delta x &= \int_t^{t+\Delta t} 2k_e \frac{T_B - T_P}{\delta x_e} - k_w \frac{T_P - T_w}{\delta x_w} dt \\ \rho c(T_P^1 - T_P^0) \frac{\Delta x}{\Delta t} &= 2 \frac{k_e}{\delta x_e} (T_B - T_P^1) - \frac{k_w}{\delta x_w} (T_P^1 - T_w^1) \\ \left(\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} + 2 \frac{k_e}{\delta x_e} + \frac{k_w}{\delta x_w} \right) T_P^1 &= \frac{k_w}{\delta x_w} T_w^1 + 2 \frac{k_e}{\delta x_e} T_B \end{aligned} \quad (44)$$

L'équation donnée par(43), les trois équations données par (42)et l'équation donnée par (44) constituent un système algébrique linéaire de cinq équations avec cinq inconnues: $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, $T(4)$ et $T(5)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{k_e}{\delta x_e} \right) T_1^1 = \frac{k_e}{\delta x_e} T_2^1 + \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} T_1^0 \\ \left(\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{k_e}{\delta x_e} + \frac{k_w}{\delta x_w} \right) T_2^1 = \frac{k_e}{\delta x_e} T_3^1 + \frac{k_w}{\delta x_w} T_1^1 + \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} T_2^0 \\ \left(\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{k_e}{\delta x_e} + \frac{k_w}{\delta x_w} \right) T_3^1 = \frac{k_e}{\delta x_e} T_4^1 + \frac{k_w}{\delta x_w} T_2^1 + \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} T_3^0 \\ \left(\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{k_e}{\delta x_e} + \frac{k_w}{\delta x_w} \right) T_4^1 = \frac{k_w}{\delta x_w} T_5^1 + \frac{k_w}{\delta x_w} T_3^1 + \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} T_4^0 \\ \left(\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} + 2 \frac{k_e}{\delta x_e} + \frac{k_w}{\delta x_w} \right) T_5^1 = \frac{k_w}{\delta x_w} T_4^1 + 2 \frac{k_e}{\delta x_e} T_B \end{array} \right.$$

En tenant compte de

$$\frac{k_e}{\delta x_e} = \frac{10}{0.004} = 2500, \quad \frac{k_w}{\delta x_w} = 2500, \quad a_p = \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} = 10 \times 10^6 \frac{0.004}{2} = 2 \times 10^4, \quad T_B = 0$$

$$T_1^0 = 200, T_2^0 = 200, T_3^0 = 200, T_4^0 = 200, T_5^0 = 200$$

Nous obtenons, à l'instant $t_1 = 2s$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 225T_1^1 = 25T_2^1 + 200T_1^0 \\ 250T_2^1 = 25T_3^1 + 25T_1^1 + 200T_2^0 \\ 250T_3^1 = 25T_4^1 + 25T_2^1 + 200T_3^0 \\ 250T_4^1 = 25T_5^1 + 25T_3^1 + 200T_4^0 \\ 275T_5^1 = 25T_4^1 + 200T_5^0 \end{array} \right.$$

Sous forme matricielle, ce système d'équations s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 225 & -25 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 250 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 250 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 250 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & -25 & 275 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \\ T_5^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200T_1^0 \\ 200T_2^0 \\ 200T_3^0 \\ 200T_4^0 \\ 200T_5^0 \end{bmatrix}$$

Où T_i^1 est la température au point x_i et à l'instant $t + \Delta t$ et T_i^0 est la température au point x_i et à l'instant t .

TD SUR LE

CHAPITRE III

Résolution d'un Problème de Convection et Diffusion

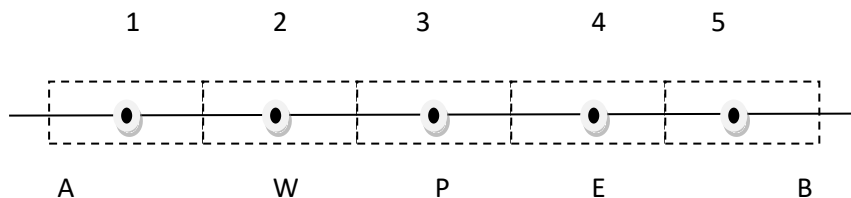
en Régime Stationnaire

EXERCICE 3. 1

Soit le problème aux limites suivant :

$$(I) \begin{cases} \frac{d(\rho u \varphi(x))}{dx} = \frac{d(\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx})}{dx} & 0 \leq x \leq 1 & (1) \\ T(0) = 1 & & (2) \\ T(1) = 0 & & (3) \end{cases}$$

En utilisant la méthode des volumes finis (schéma aux différences), déterminer les valeurs approchées de $T(0.1)$, $T(0.3)$, $T(0.5)$, $T(0.7)$ et $T(0.9)$, où $T(x)$ est la solution exacte du problème (I).



A et B représentent les frontières du domaine.

L'équation de discrétisation:

$$a_P \varphi_P = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W \quad (45)$$

Où

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2} = D - \frac{F}{2} \quad (46)$$

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2} = D + \frac{F}{2} \quad (47)$$

$$a_P = D_e + \frac{F_e}{2} + D_w - \frac{F_w}{2} = a_E + a_W + (F_e - F_w) = a_E + a_W = 2D \quad (48)$$

S'applique aux nœuds 2, 3 et 4.

Cependant les nœuds 1 et 5 nécessitent un traitement spécial.

Traitement du nœud 1

Intégrons l'équation (1) du problème (I) sur le volume de contrôle entourant le point P correspondant au nœud 1.

$$\int_{\Delta V} \frac{d(\rho u \varphi(x))}{dx} dV = \int_{\Delta V} \frac{d\left(\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx}\right)}{dx} dV$$

$$\int_w^e \frac{d(\rho u \varphi(x))}{dx} dx = \int_w^e \frac{d\left(\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx}\right)}{dx} dx \quad (49)$$

$$[(\rho u \varphi(x))_e - (\rho u \varphi(x))_w] = \left[\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx}\right]_e - \left[\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx}\right]_w \quad (50)$$

En supposant un profil linéaire pour $\varphi(x)$, on a :

$$\varphi_e = \frac{1}{2}(\varphi_E + \varphi_P) \quad (51)$$

$$\varphi_w = \varphi_A \quad (52)$$

Où e et w sont aux milieux de P_E et P_W respectivement.

Utilisons un profile linéaire par morceaux pour calculer $\left[\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]_e$ et $\left[\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]_w$, nous obtenons :

$$\left[\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]_e = \Gamma_e \frac{\varphi_E - \varphi_P}{\delta x_e} \quad (53)$$

$$\left[\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]_w = \Gamma_w \frac{\varphi_P - \varphi_A}{\frac{\delta x_w}{2}} \quad (54)$$

Portons (51), (52),(53) et(54) dans (50), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\rho u]_e (\varphi_E + \varphi_P) - [\rho u]_A \varphi_A &= \Gamma_e \frac{\varphi_E - \varphi_P}{\delta x_e} - \Gamma_w 2 \frac{\varphi_P - \varphi_A}{\delta x_w} \\ \frac{F}{2} (\varphi_E + \varphi_P) - F \varphi_A &= D(\varphi_E - \varphi_P) - 2D(\varphi_P - \varphi_A) \end{aligned} \quad (55)$$

Où

$$\delta x_e = \delta x_w = \Delta x$$

$$F_e = F_w = F = \rho u$$

$$D_e = D_w = D = \frac{\Gamma}{\Delta x}$$

(55) s'écrit sous la forme standard :

$$a_P \varphi_P = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W + b \quad (56)$$

où

$$a_E = D - \frac{F}{2}, a_W = 0, a_P = 3D + \frac{F}{2}, b = (2D + F)\varphi_A \quad (57)$$

P correspond au nœud 1

Traitement du nœud 5

Intégrons l'équation (1) du problème (I) sur le volume de contrôle entourant le nœud 5 et procédons de la même manière que précédemment, nous obtenons l'équation standard correspondant à ce nœud :

$$a_P \varphi_P = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W + b \quad (58)$$

où

$$a_E = 0, a_W = D + \frac{F}{2}, a_P = 3D - \frac{F}{2}, b = (2D - F)\varphi_B \quad (59)$$

P correspond au nœud 5

L'équation donnée par (56), les trois équations données par (45) et l'équation donnée par (58) constituent un système algébrique linéaire de cinq équations avec cinq inconnues: $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, $T(4)$ et $T(5)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(3D + \frac{F}{2}\right)\varphi_1 - \left(D - \frac{F}{2}\right)T_2 = (2D + F)\varphi_A \\ -\left(D + \frac{F}{2}\right)\varphi_1 + 2D\varphi_2 - \left(D - \frac{F}{2}\right)\varphi_3 = 0 \\ -\left(D + \frac{F}{2}\right)\varphi_2 + 2D\varphi_3 - \left(D - \frac{F}{2}\right)\varphi_4 = 0 \\ -\left(D + \frac{F}{2}\right)\varphi_3 + 2\varphi_4 - \left(D - \frac{F}{2}\right)\varphi_5 = 0 \\ -\left(D + \frac{F}{2}\right)\varphi_4 + \left(3D - \frac{F}{2}\right)\varphi_5 = (2D - F)\varphi_B \end{array} \right.$$

Où

$$\Delta x = 0.2, D = \frac{\Gamma}{\Delta x} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5, \varphi_A = 1, \varphi_B = 0, F = \rho u = u$$

Cas 1 $u = 0.1 \text{ m/s}$

Sous forme matricielle, ce système d'équations s'écrit :

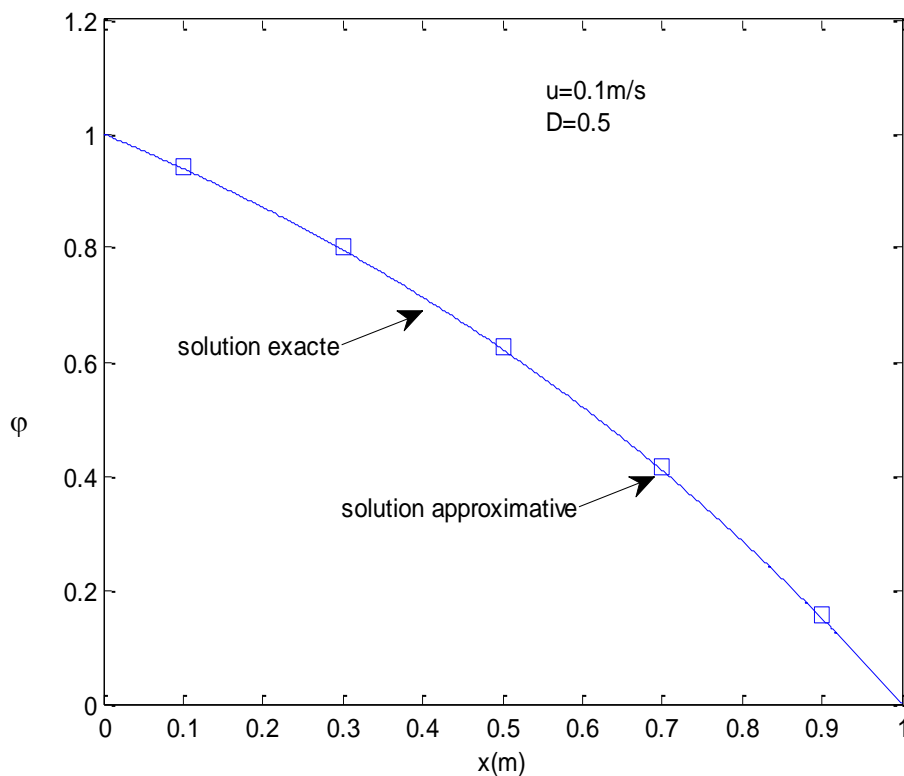
$$\begin{bmatrix} 1.55 & -0.45 & 0 & 0 & 0 \\ -0.55 & 1 & -0.45 & 0 & 0 \\ 0 & -0.55 & 1 & -0.45 & 0 \\ 0 & 0 & -0.55 & 1 & -0.45 \\ 0 & 0 & 0 & -0.55 & 1.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

C'est un système tridiagonal dont la solution est :

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.942 \\ 0.801 \\ 0.628 \\ 0.416 \\ 0.158 \end{bmatrix}$$

La solution exacte est $\varphi(x) = (2.7183 - \exp(x))/1.7183$

x	solution approximative	solution exacte	Erreur absolue
0.1	0.9421	0.9388	0.33×10^{-2}
0.3	0.8006	0.7964	0.42×10^{-2}
0.5	0.6276	0.6225	0.52×10^{-2}
0.7	0.4163	0.4100	0.62×10^{-2}
0.9	0.1579	0.1506	0.73×10^{-2}



Cas 2 $u = 2.5 \text{ m/s}$

Sous forme matricielle, ce système d'équations s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 2.75 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ -1.75 & 1 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & -1.75 & 1 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & -1.75 & 1 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & -1.75 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

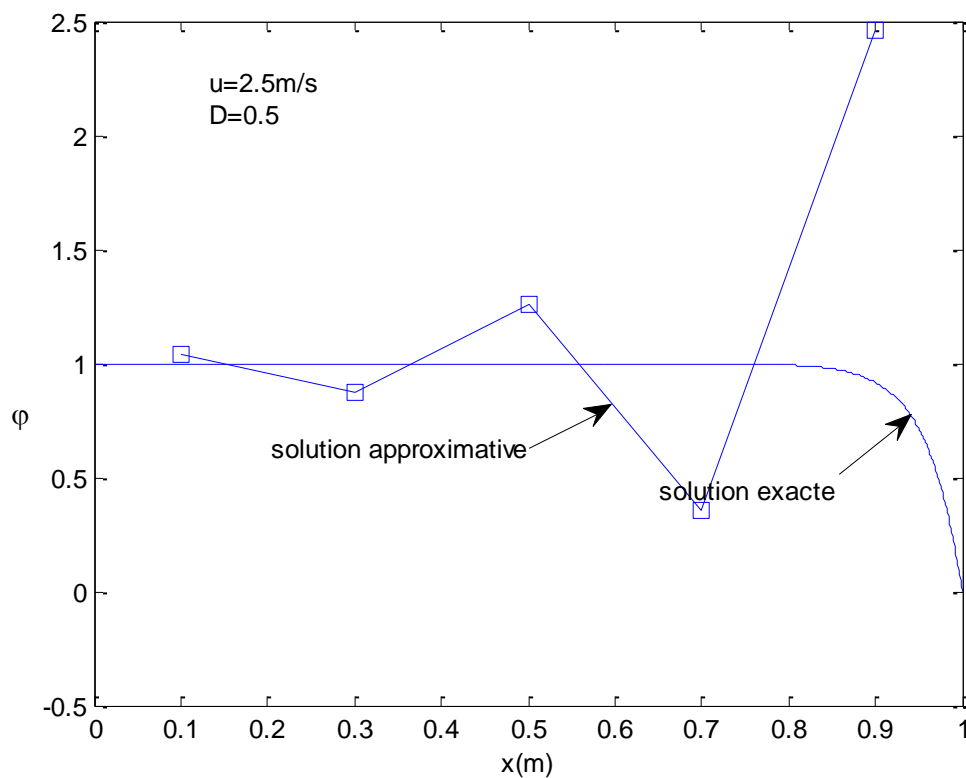
C'est un système tridiagonal dont la solution est :

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.036 \\ 0.869 \\ 1.257 \\ 0.352 \\ 2.464 \end{bmatrix}$$

La solution exacte est

$$\varphi(x) = 1 + (1 - \exp(25 * x))/(7.2 * 10^10)$$

x	solution approximative	solution exacte	Erreur absolue
0.1	1.0356	1.0000	3.56×10^{-2}
0.3	0.8694	1.0000	13.06×10^{-2}
0.5	1.2573	1.0000	25.73×10^{-2}
0.7	0.3521	0.9994	64.74×10^{-2}
0.9	2.4644	0.9179	154.65×10^{-2}



Cas 3 $\Delta x = 0.05$, $u = 2.5 \text{ m/s}$

Dans ce cas, $D = \frac{\gamma}{\Delta x} = \frac{0.1}{0.05} = 2$, nous obtenons un système tridiagonal 20x20 dont la diagonale principale est

$$DP=[7.25 \quad 6 \quad 6 \quad \dots \quad 6 \quad 4.75]$$

La sous diagonale

$$DI=[0 \quad -3.25 \quad -3.25 \quad \dots \quad -3.25 \quad -3.25]$$

$$DS=[-0.75 \quad -0.75 \quad -0.75 \quad \dots \quad -0.75 \quad 0]$$

Le membre droit

$$B=[6.5 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0]$$

La solution de ce système est

$$\varphi = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \dots \quad \varphi_{19} \quad \varphi_{20}]^T$$

Où les $\varphi_i, i = 1, \dots, 20$ sont respectivement :

1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000

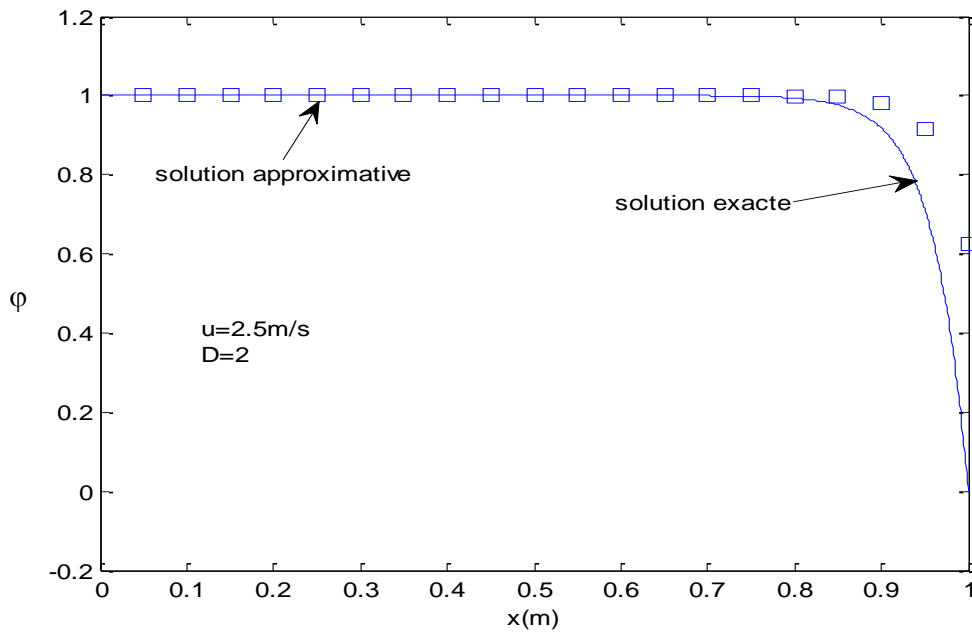
1.0000 1.0000 1.0000 0.9999 0.9998 0.9989 0.9954 0.9800 0.9135 0.6250

La solution exacte est

$$\varphi(x) = 1 + (1 - \exp(25 * x))/(7.2 * 10^{10})$$

x	solution approximative	solution exacte	Erreur absolue
0.025	1.0000	1.0000	0.00×10^{-2}
0.075	1.0000	1.0000	0.00×10^{-2}
0.125	1.0000	1.0000	0.00×10^{-2}
0.175	1.0000	1.0000	0.00×10^{-2}
0.225	1.0000	1.0000	0.00×10^{-2}
0.275	1.0000	1.0000	0.00×10^{-2}
0.325	1.0000	1.0000	0.00×10^{-2}
0.375	1.0000	1.0000	0.00×10^{-2}
0.425	1.0000	1.0000	0.00×10^{-2}
0.475	1.0000	1.0000	0.00×10^{-2}
0.525	1.0000	1.0000	0.00×10^{-2}
0.575	1.0000	1.0000	0.00×10^{-2}
0.625	1.0000	0.9998	0.01×10^{-2}
0.675	0.9999	0.9994	0.05×10^{-2}
0.725	0.9998	0.9981	0.17×10^{-2}
0.775	0.9989	0.9933	0.57×10^{-2}
0.825	0.9954	0.9765	1.89×10^{-2}
0.875	0.9800	0.9179	6.21×10^{-2}
0.9250	0.9135	0.7135	20.00×10^{-2}

0.9750	0.6250	-0.0001	62.51×10^{-2}
--------	--------	---------	------------------------



EXERCISE 3.2

Soit le problème aux limites suivant :

$$(I) \begin{cases} \frac{d(\rho u \phi(x))}{dx} = \frac{d(\Gamma \frac{d\phi(x)}{dx})}{dx} & 0 \leq x \leq 1 & (1) \\ T(0) = 1 & & (2) \\ T(1) = 0 & & (3) \end{cases}$$

En utilisant le schéma upwind, déterminer les valeurs approchées de $T(0.1)$, $T(0.3)$, $T(0.5)$, $T(0.7)$ et $T(0.9)$, où $T(x)$ est la solution exacte du problème (I) ($u = 0.1 \text{ m/s}$ et $u = 2.5 \text{ m/s}$).

L'équation de discrétisation

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (60)$$

Où

$$a_E = D_e + \|\mathbf{F}_e, 0\| \quad (61)$$

$$a_W = D_w + \|\mathbf{F}_w, 0\| \quad (62)$$

$$a_P = D_e + \|\mathbf{F}_e, 0\| + D_w + \|\mathbf{F}_w, 0\| = a_E + a_W + (F_e - F_w) \quad (63)$$

Avec

$$F_e = F_w = F = \rho u = u \quad (64)$$

$$D_e = D_w = D = \frac{\Gamma}{\Delta x} = \frac{0.1}{\Delta x} \quad (65)$$

S'applique aux nœuds 2, 3 et 4. Cependant les nœuds 1 et 5 nécessitent un traitement spécial.

Traitement du nœud 1

De (50) on a :

$$[(\rho u \varphi(x))_e - (\rho u \varphi(x))_w] = \left[\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]_e - \left[\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]_w$$

$$\varphi_e = \varphi_P$$

$$\varphi_w = \varphi_A$$

$$\left[\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]_e = \Gamma_e \frac{\varphi_E - \varphi_P}{\delta x_e} \quad (66)$$

$$\left[\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]_w = \Gamma_w \frac{\varphi_P - \varphi_A}{\frac{\delta x_w}{2}}$$

$$[\rho u]_e \varphi_P - [\rho u]_A \varphi_A = \Gamma_e \frac{\varphi_E - \varphi_P}{\delta x_e} - \Gamma_w 2 \frac{\varphi_P - \varphi_A}{\delta x_w}$$

Où

$$\delta x_e = \delta x_w = \Delta x$$

$$F\varphi_P - F\varphi_A = D(\varphi_E - \varphi_P) - 2D(\varphi_P - \varphi_A) \quad (67)$$

Où

$$F_e = F_w = F = \rho u$$

$$D_e = D_w = D = \frac{\Gamma}{\Delta x} = \frac{0.1}{\Delta x}$$

(46) s'écrit sous la forme standard :

$$a_P\varphi_P = a_E\varphi_E + a_W\varphi_W + b \quad (68)$$

où

$$a_E = D, a_W = 0, a_P = 3D + F, b = (2D + F)\varphi_A$$

Traitement du nœud 5

Intégrons l'équation (1) du problème (I) sur le volume de contrôle entourant le nœud 5 et procédons de la même manière que précédemment, nous obtenons, nous obtenons l'équation standard correspondant à ce nœud :

$$a_P\varphi_P = a_E\varphi_E + a_W\varphi_W + b \quad (69)$$

où

$$a_E = 0, a_W = D + F, a_P = 3D + F, b = 2D\varphi_B \quad (70)$$

P correspond au nœud 5

L'équation donnée par (68), les trois équations données par(60) et l' équation donnée par (69) constituent un système algébrique linéaire de cinq équations avec cinq inconnues: $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, $T(4)$ et $T(5)$:

$$\begin{cases} (3D + F)\varphi_1 - DT_2 & = (2D + F)\varphi_A \\ -(D + F)\varphi_1 + (2D + F)\varphi_2 - D\varphi_3 & = 0 \\ -(D + F)\varphi_2 + (2D + F)\varphi_3 - D\varphi_4 & = 0 \\ -(D + F)\varphi_3 + (2D + F)\varphi_4 - D\varphi_5 & = 0 \\ -(D + F)\varphi_4 + (3D + F)\varphi_5 & = 2D\varphi_B \end{cases}$$

Où,

$$\Delta x = 0.2, D = \frac{0.1}{\Delta x} = 0.5, \varphi_A = 1, \varphi_B = 0, F = \rho u = u$$

Cas 1 $u = 0.1 \text{ m/s}$

Sous forme matricielle, ce système d'équations s'écrit :

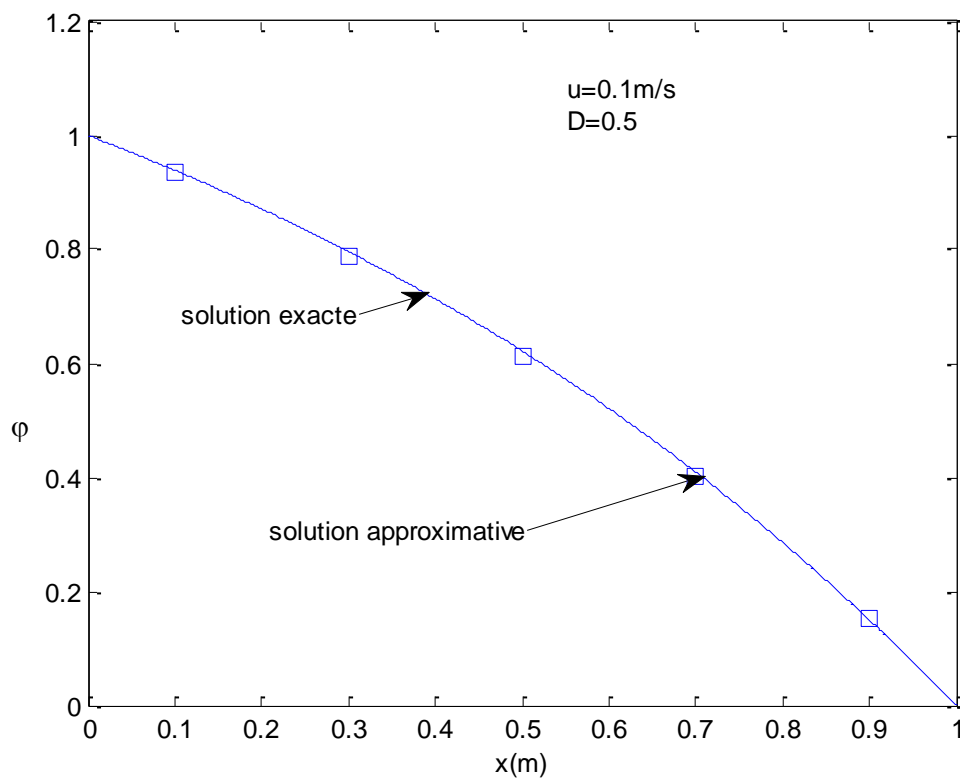
$$\begin{bmatrix} 1.6 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6 & 1.1 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & 1.1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6 & 1.1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6 & 1.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

C'est un système tridiagonal dont la solution est :

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.934 \\ 0.788 \\ 0.613 \\ 0.403 \\ 0.1512 \end{bmatrix}$$

La solution exacte est $\varphi(x) = (2.7183 - \exp(x))/1.7183$

x	solution approximative	solution exacte	Erreur absolue
0.1	0.9337	0.9388	0.51×10^{-2}
0.3	0.7879	0.7964	0.84×10^{-2}
0.5	0.6130	0.6225	0.95×10^{-2}
0.7	0.4031	0.4100	0.70×10^{-2}
0.9	0.1512	0.1506	0.060×10^{-2}



Cas 2 $u = 2.5 \text{ m/s}$

Sous forme matricielle, ce système d'équations s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 4 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

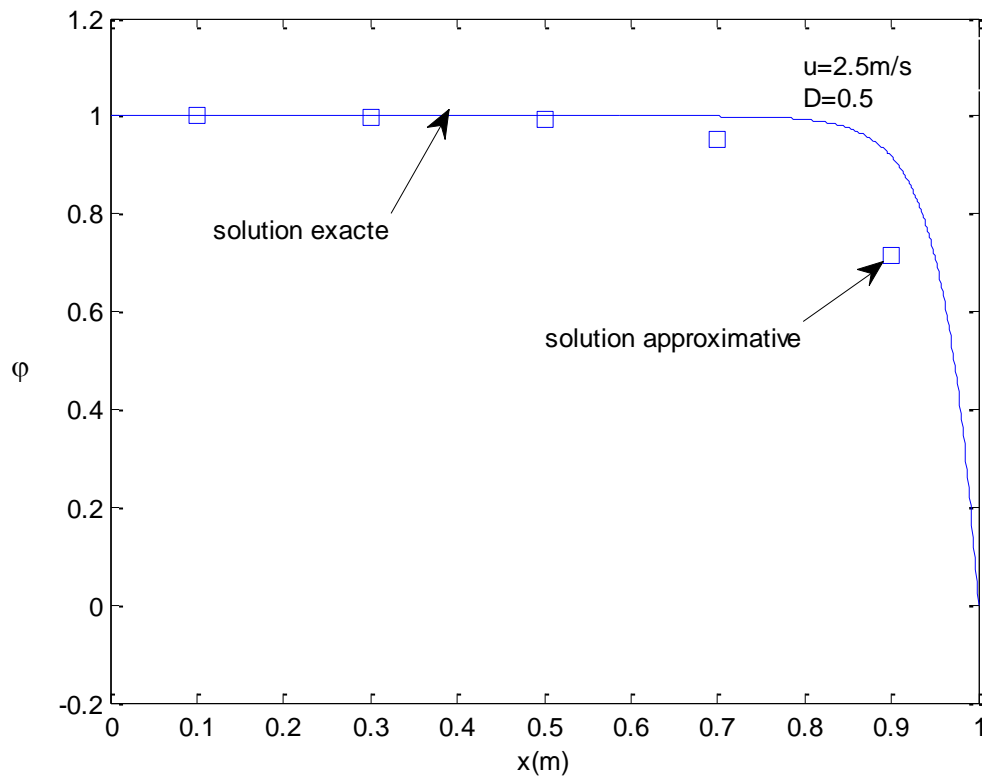
C'est un système tridiagonal dont la solution est :

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9998 \\ 0.9987 \\ 0.9921 \\ 0.9524 \\ 0.7143 \end{bmatrix}$$

La solution exacte est

$$\varphi(x) = 1 + (1 - \exp(25 * x))/(7.2 * 10^{10})$$

x	solution approximative	solution exacte	Erreur absolue
0.1	0.9998	1.0000	0.02×10^{-2}
0.3	0.9987	1.0000	0.13×10^{-2}
0.5	0.9921	1.0000	0.79×10^{-2}
0.7	0.9524	0.9994	4.70×10^{-2}
0.9	0.7143	0.9179	20.36×10^{-2}



EXERCISE 3.3

Soit le problème aux limites suivant :

$$(I) \begin{cases} \frac{d(\rho u \varphi(x))}{dx} = \frac{d\left(\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx}\right)}{dx} & 0 \leq x \leq 1 & (1) \\ T(0) = 1 & & (2) \\ T(1) = 0 & & (3) \end{cases}$$

En utilisant le schéma hybride, déterminer les valeurs approchées de $T(0.1)$, $T(0.3)$, $T(0.5)$, $T(0.7)$ et $T(0.9)$, où $T(x)$ est la solution exacte du problème (I) ($u = 2.5 \text{ m/s}$).

Solution

L'équation de discrétisation) :

$$a_P \varphi_P = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W$$

Où,

$$a_E = \left\| -F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0 \right\|$$

$$a_W = \left\| F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0 \right\|$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w)$$

s'applique aux nœuds 2, 3, 4

Traitement du nœud 1

De (21) on a :

$$[(\rho u \varphi(x))_e - (\rho u \varphi(x))_w] = \left[\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]_e - \left[\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]_w$$

$$\varphi_e = \varphi_P$$

$$\varphi_w = \varphi_A$$

Puisque $Pe = 5 > 2$, la diffusion est absente à l'interface e , alors

$$\left[\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]_e = 0$$

Par contre à la frontière gauche on a :

$$\left[\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]_w = \Gamma_w \frac{\varphi_P - \varphi_A}{\frac{\delta x_w}{2}}$$

$$[\rho u]_e \varphi_P - [\rho u]_A \varphi_A = -\Gamma_w 2 \frac{\varphi_P - \varphi_A}{\delta x_w}$$

Où

$$\delta x_e = \delta x_w = \Delta x$$

$$F \varphi_P - F \varphi_A = -2D(\varphi_P - \varphi_A) \quad (71)$$

Où

$$F_e = F_w = F = \rho u$$

$$D_e = D_w = D = \frac{\Gamma}{\Delta x} = \frac{0.1}{\Delta x}$$

(54) s'écrit sous la forme standard :

$$a_P \varphi_P = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W + b \quad (72)$$

où

$$a_E = 0, a_W = 0, a_P = 2D + F, b = (2D + F)\varphi_A$$

Traitement du nœud 5

En procédant de la même manière que précédemment on a :

$$F \varphi_P - F \varphi_W = 2D(\varphi_B - \varphi_P) \quad (73)$$

Où

$$F_e = F_w = F = \rho u = 2.5$$

$$D_e = D_w = D = \frac{\Gamma}{\Delta x} = \frac{0.1}{0.2} 0.5$$

(73) s'écrit sous la forme standard :

$$a_P \varphi_P = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W + b \tag{74}$$

où

$$a_E = 0, a_W = F, a_P = 2D + F, b = 2D\varphi_B$$

L'équation donnée par (72), les trois équations données par (27) et l'équation donnée par (74) constituent un système algébrique linéaire de cinq équations avec cinq inconnues: $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, $T(4)$ et $T(5)$:

$$\begin{cases} (2D + F)\varphi_1 & = (2D + F)\varphi_A \\ -F\varphi_1 + F\varphi_2 & = 0 \\ -F\varphi_2 + F\varphi_3 & = 0 \\ -F\varphi_3 + F\varphi_4 & = 0 \\ -F\varphi_4 + (2D + F)\varphi_5 & = 2D\varphi_B \end{cases}$$

Où

$$\Delta x = 0.2, D = \frac{0.1}{\Delta x} = 0.5, \varphi_A = 1, \varphi_B = 0, F = \rho u = 2.5$$

Sous forme matricielle, ce système d'équations s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 3.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.5 & 2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.5 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.5 & 3.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

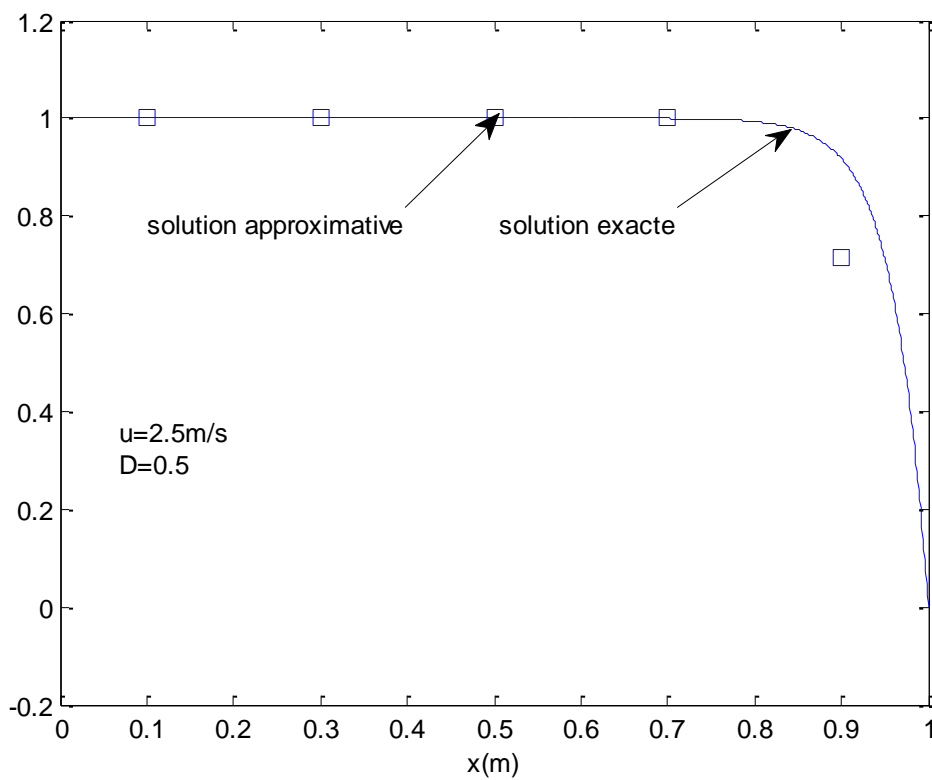
C'est un système tridiagonal dont la solution est :

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 0.7143 \end{bmatrix}$$

La solution exacte est

$$\varphi(x) = 1 + (1 - \exp(25 * x))/(7.2 * 10^{10})$$

x	solution approximative	solution exacte	Erreur absolue
0.1	1.0000	1.0000	0.00×10^{-2}
0.3	1.0000	1.0000	0.00×10^{-2}
0.5	1.0000	1.0000	0.00×10^{-2}
0.7	1.0000	0.9994	0.06×10^{-2}
0.9	0.7143	0.9179	20.36×10^{-2}



Partie TP

TP SUR LE

Chapitre I

Méthode des Volumes Finis

Pour la

Résolution d'un Problème de Conduction de la Chaleur

en Régime Stationnaire

TP 1.1

- 1) Développer un algorithme se basant sur la méthode de Thomas de résolution de systèmes tridiagonaux
- 2) Transformer cet algorithme en un programme matlab

Solution

1) Algorithme de Thomas

Début

Lire N

Lire (a(i), i=1 ,N)

Lire (b(i), i=1 ,N)

Lire (c(i), i=1 ,N)

$$P(1) \leftarrow \frac{b(1)}{a(1)}$$

$$Q(1) \leftarrow \frac{d(1)}{a(1)}$$

Pour $i=2$ à N faire

$$P(i) \leftarrow \frac{b(i)}{a(i) - c(i) * P(i-1)}$$

$$Q(i) \leftarrow \frac{d(i) + c(i) * Q(i-1)}{a(i) - c(i) * P(i-1)}$$

Fpr

$$T(N) \leftarrow Q(N)$$

Pour $i=N-1$ à 1 (avec un pas de -1)faire

$$T(i) = P(i)T(i+1) + Q(i)$$

Fpr

Ecrire $(T(i), i=1, N)$

Fin

2) Programme matlab se basant sur l'algorithme de Thomas

Programme Matlab de basant sur l'algorithme de Thomas

```
N=input('n=');
A=input('A=') ;%diagonale principale
B=input('B=') ;%diagonale superieure
C=input('C=') ;%diagonale inferieure
D=input('D=') % membre droit
P(1) = (B(1)) / (A(1)) ;
Q(1) = (D(1)) / (A(1)) ;
for I=2:N
P(I) = (B(I)) / (A(I) - C(I) * P(I-1)) ;
Q(I) = (D(I) + C(I) * Q(I-1)) / (A(I) - C(I) * P(I-1)) ;
end
```

```

T(N) = Q(N) ;
for I=N-1:-1 :1
T(I) = P(I) *T(I+1) +D(I) ;
end
T
    
```

Rappelons les équations standards de l'exercice 2.1:

$$\begin{cases} 3T_1 = 200 + T_2 \\ 2T_2 = T_3 + T_1 \\ 2T_3 = T_4 + T_2 \\ 2T_4 = T_5 + T_3 \\ 3T_5 = T_4 + 1000 \end{cases}$$

En exécutant le programme fortran avec les données suivantes :

$$N=5, A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons :

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 220 \\ 300 \\ 380 \\ 460 \end{bmatrix}$$

TP SUR LE

Chapitre II

Résolution d'un Problème de Conduction de la Chaleur

en Régime Instationnaire

TP 2.1

- 1) Ecrire un programme matlab de la méthode explicite.
- 2) La solution su problème (I) de l'exercice 2.1 page 35 est :

$$T(x, t) = \frac{800}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \exp(-\alpha \lambda_n^2 t) \cos(\lambda_n x)$$

Où

$$\lambda_n = \frac{2n-1}{2l} \pi \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{K}{\rho c}$$

Ecrire un programme qui calcule cette solution aux points : $x=0:0.0004:0.02$

Solution

Programme matlab de la méthode explicite.

```
r=input('ro=');
k=input('cond=');
c=input('capa=');
tpb=input('tpb=');
l=input('long=');
tf=input('tfin=');
n=input('nbvol=');
dt=input('dt=');
dx=l/n;
tp0=input('tinit=');
ap=r*c*dx/dt;
ae=k/dx;
aw=ae;
aop=ap-ae-aw;
j=0;
for t=dt:dt:tf
    j=j+1
```

```

tp(1)=(ae*tp0(2)+(ap-ae)*tp0(1))/ap;

for i=2:1:n-1

tp(i)=(ae*tp0(i+1)+aw*tp0(i-1)+(ap-ae-aw)*tp0(i))/ap;
end
tp(n)=(aw*tp0(n-1)+(ap-2*ae-aw)*tp0(n)+2*ae*tpb)/ap;
T(:,j)=tp';
tp0=tp;
end
T

```

L'exécution de ce programme donne la température aux instants : $t = 40s$, $t = 80s$ et $t = 120s$, dans le cas où $\Delta t = 2s$

Temps (s)	X(1)=0.002	x(2)=0.006	X(3)=0.01	X(4)=0.014	X(5)=0.018
40	188.6386	176.4132	148.2926	100.7597	35.9418
80	153.3272	139.0536	111.2984	72.0653	24.9615
120	120.5392	108.8235	86.4702	55.5862	19.1684

Programme matlab de calcul de la solution exacte du problème (I)

```

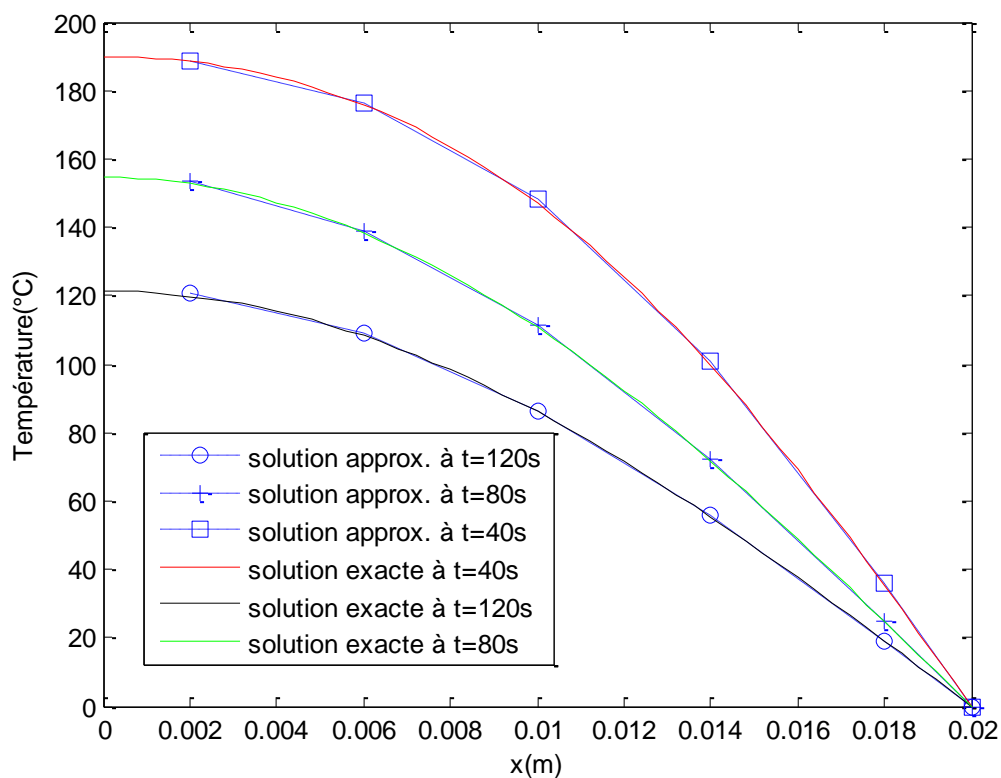
t=input('t=');
k=10;
r=10;
c=10^6;
a=k/(r*c);
s=1;
n=100;
l=0.02;
x=0:0.0004:0.02;
%x=0.002:0.004:0.02;
lx=length(x);
tp=zeros(1,lx);
for i=1:1:n
m=(2*i-1)*pi/(2*l);
tp=tp+s*exp(-a*m*m*t)*cos(m*x)/(2*i-1);
s=-s;
end
tp=800*tp/pi;
plot(x,tp,'k-');

```

L'exécution de ce programme donne la solution exacte :

Temps (s)	X(1)=0.002	x(2)=0.006	X(3)=0.01	X(4)=0.014	X(5)=0.018
40	188.3845	175.7649	147.1303	99.5043	35.3836
80	152.6572	138.3611	110.6352	71.5661	24.7737
120	119.8771	108.2130	85.9685	55.2531	19.0513

Représentation graphique de ces résultats est donnée par la figure ci-dessous :



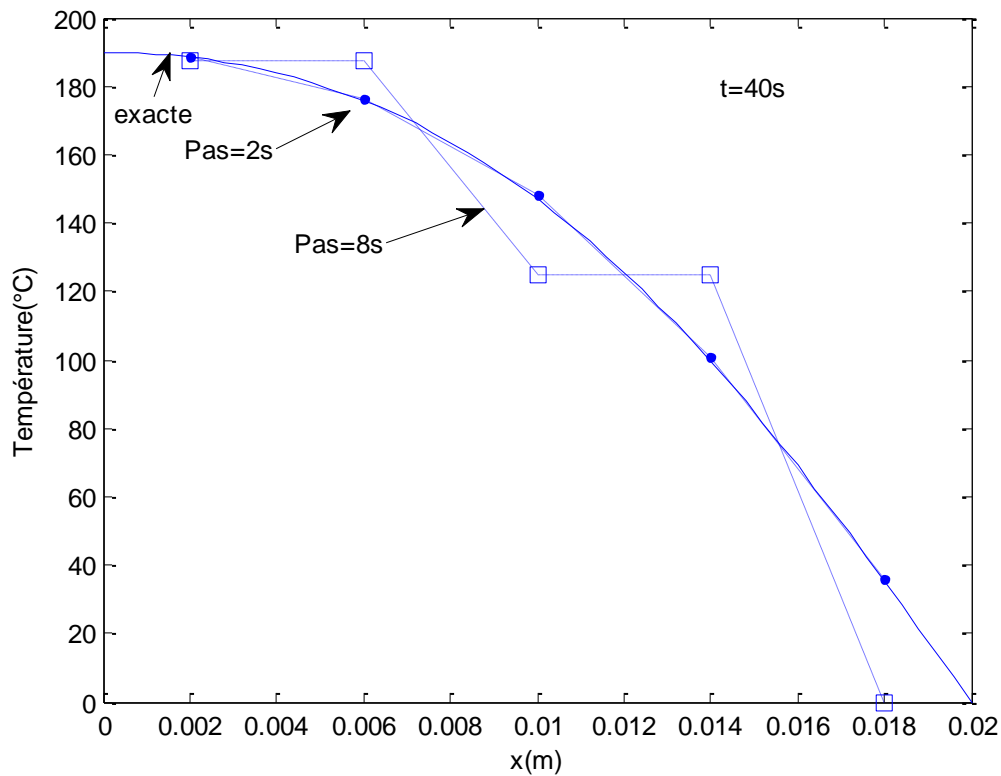
Dans le cas où $\Delta t = 8s$, l'exécution de ce programme donne

La solution approximative est

Temps (s)	X(1)=0.002	x(2)=0.006	X(3)=0.01	X(4)=0.014	X(5)=0.018
40	187.5000	187.5000	125.0000	125.0000	0
80	156.2500	126.9531	126.9531	48.8281	48.8281

120	115.9668	115.9668	71.7163	71.7163	0
-----	----------	----------	---------	---------	---

La représentation graphique de la solution numérique à l'instant $t=40s$ obtenue avec un pas $\Delta t = 8s$ et la solution exacte à l'instant $t=40s$ est donnée par la figure ci-dessous :



TP 2.2

Ecrire un programme matlab de la méthode implicite.

Solution

Cas1 : $\Delta t = 2s$

Déterminons la température aux instants : $t = 40s$ $t = 80s$ et $t = 120s$ Pour ce faire exécutons le programme suivant pour $t = 40s$ $t = 80s$ et $t = 120s$.

```
r=input('ro=');
k=input('cond=');
c=input('capa=');
```

```

tpb=input('tpb=');
l=input('long=');
tf=input('tfin=');
n=input('nbvol=');
dt=input('dt=');
dx=l/n;
tp0=input('tinit=');
aop=r*c*dx/dt;
ae=k/dx;
aw=ae;
ap=ae+aw+aop;
A=ap*ones(1,n);
A(1)=aop+ae;
A(n)=aop+2*ae+aw;
B=ae*ones(1,n);
    B(n)=0;
    C=aw*ones(1,n);

    C(1)=0;
    j=0;

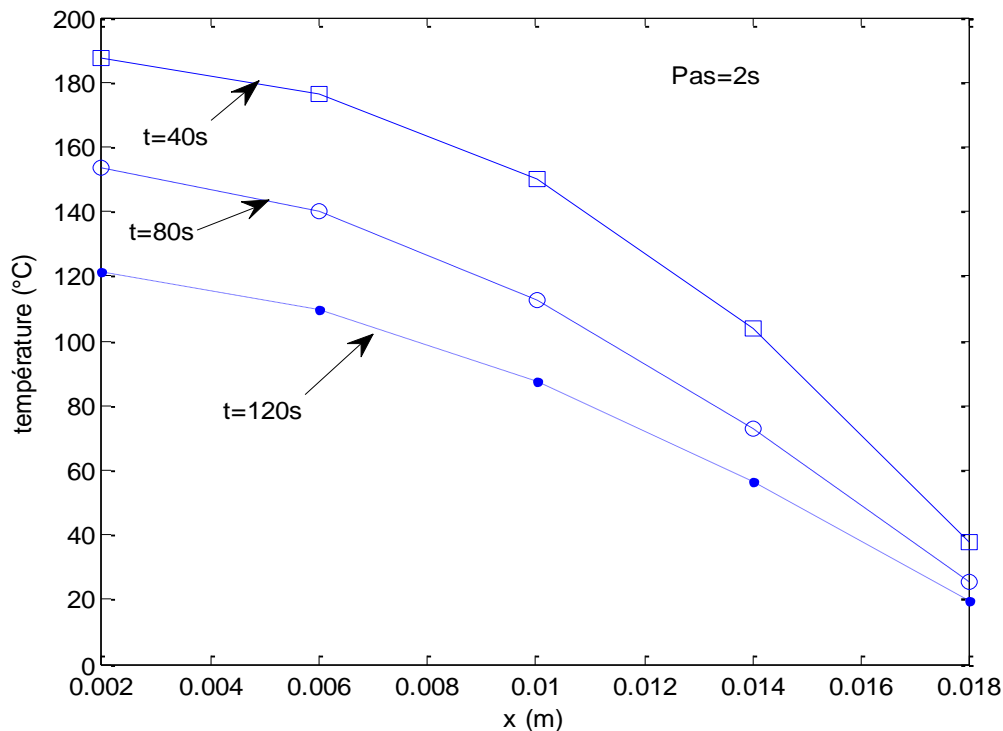
for t=2:dt:tf
    j=j+1;
    D=aop*tp0;
    P(1)=(B(1))/(A(1)) ;
    Q(1)=(D(1))/(A(1)) ;
    for I=2:n
        P(I)=(B(I))/(A(I)-C(I)*P(I-1)) ;
        Q(I)=(D(I)+C(I)*Q(I-1))/(A(I)-C(I)*P(I-1)) ;
    end
    tp(n)=Q(n) ;
    for i=n-1:-1 :1
        tp(i)=P(i)*tp(i+1)+Q(i) ;
    end
    TI(:,j)=tp';
    tp0=tp;
end
TI

```

De ce programme on a la solution numérique :

Temps (s)	X(1)=0.002	x(2)=0.006	X(3)=0.01	X(4)=0.014	X(5)=0.018
40	187.4200	176.2875	150.0.385	103.6980	37.5139
80	153.7196	139.7904	112.3854	73.0946	25.3883
120	121.5248	109.7876	87.3316	56.2012	19.3935

La représentation graphique de ces résultats est donnée par la figure ci-dessous :

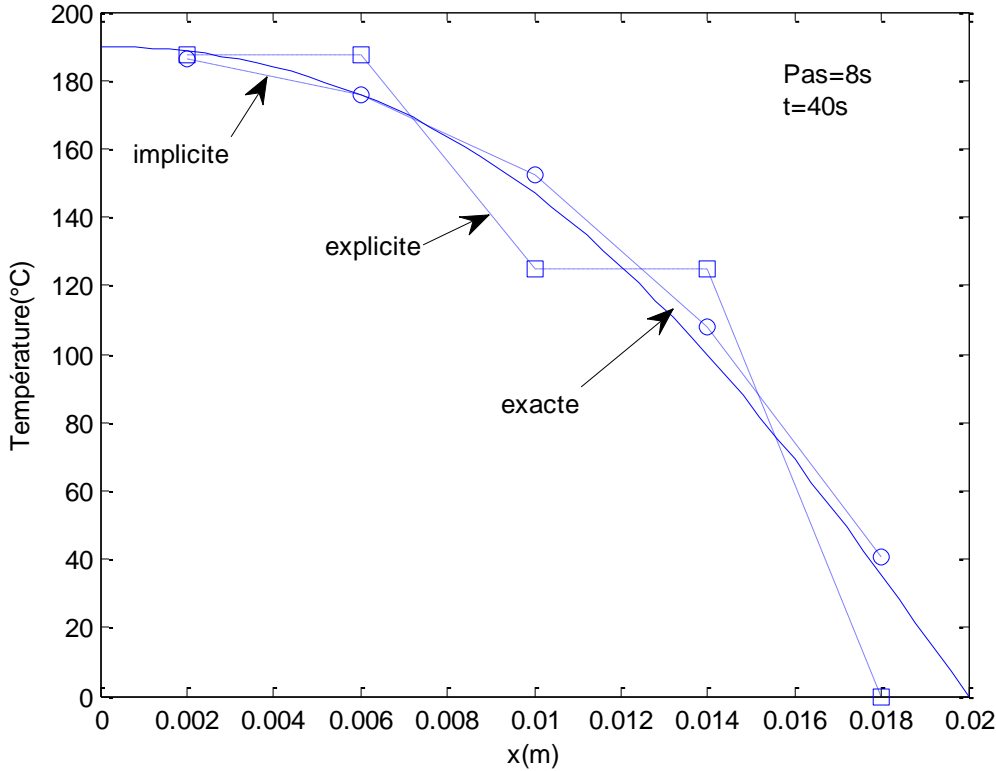


Cas1 : $\Delta t = 8s$

Déterminons la température à l'instant : $t = 40s$ par les méthodes explicite, implicite et exacte. Pour ce faire exécutons les programmes des méthodes explicite, implicite et exacte pour $t = 40s$.

Temps (s)	X(1)=0.002	x(2)=0.006	X(3)=0.01	X(4)=0.014	X(5)=0.018
explicite	187.5000	187.5000	125.0000	125.0000	0
implicite	187.4200	176.2875	150.0385	103.6980	37.5139
exacte	188.3845	175.7649	147.1303	99.5043	35.3836

La représentation graphique de ces résultats est donnée par la figure ci-dessous :



TP SUR LE

Chapitre III

Résolution d'un Problème de Convection et Diffusion

en Régime Stationnaire

TP 3.1

Ecrire un programme matlab qui trace, dans un même repère, les graphes des deux fonctions suivantes :

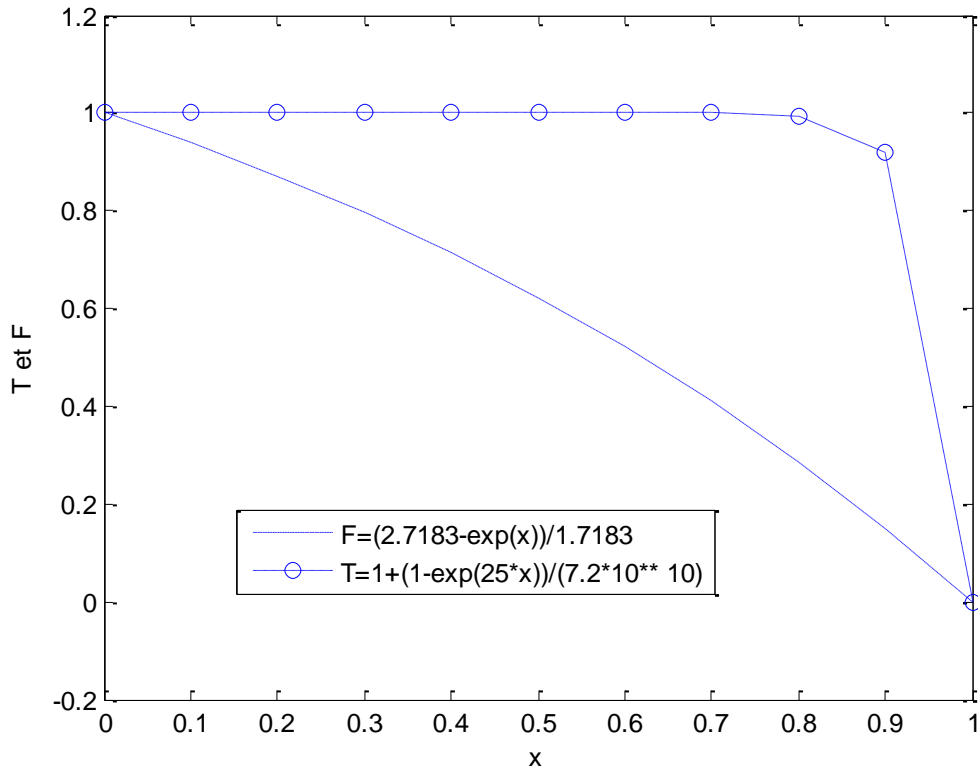
$$F(x) = (2.7183 - \exp(x))/1.7183 \text{ et } T(x) = 1 + (1 - \exp(25 * x))/(7.2 * 10^{10})$$

solutions exactes du problème (i) de l'exercice 3.1 (page 42) correspondant respectivement à $u = 0.1m/s$ et $u = 2.5m/s$

Solution

Programme

```
x=0:0.005:1;
t=0:0.005:1;
T=1+(1-exp(25*x))/(7.2*10^10);
F=(2.7183-exp(t))/1.7183;
plot(t,F,'-');
hold on;
plot(x,T,'--o');
```



TP 3.2

Soit le problème aux limites suivant :

$$(I) \begin{cases} \frac{d(\rho u \varphi(x))}{dx} = \frac{d(\Gamma \frac{d\varphi(x)}{dx})}{dx} & 0 \leq x \leq 1 & (1) \\ T(0) = 1 & & (2) \\ T(1) = 0 & & (3) \end{cases}$$

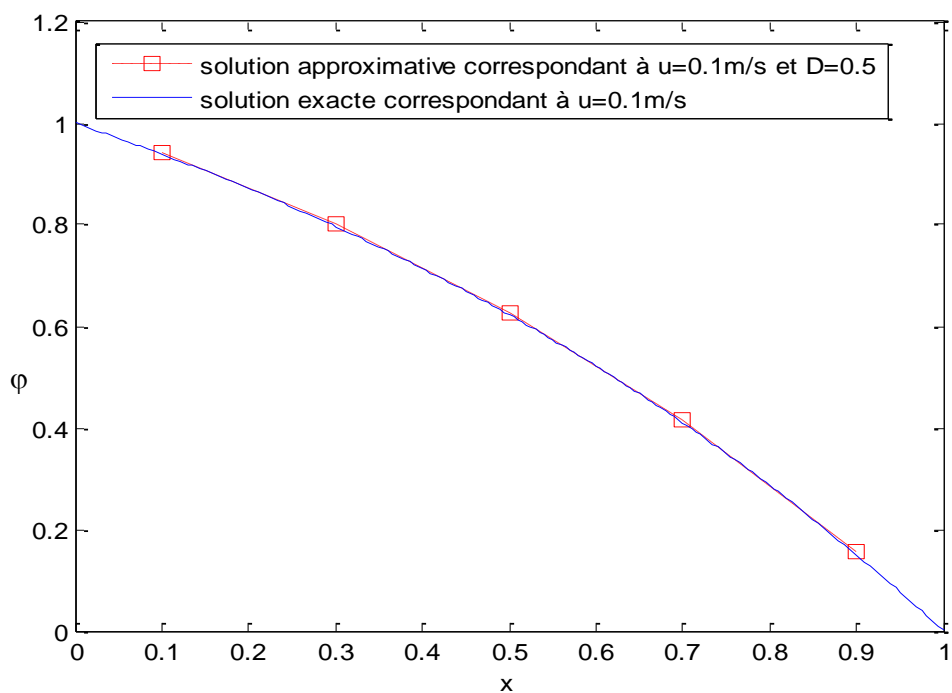
$\rho = 1.0 \text{ kg/m}^3, \Gamma = 0.1 \text{ kg/ms}$

- 1) Ecrire un programme matlab du schéma différence centrale déterminant $\varphi(x)$ aux points $x_i = i\Delta x, i = 1, 2, \dots, n$ où $\Delta x = \frac{1}{n}$ et n est le nombre de nœuds.
- 2) Exécuter ce programme pour $u = 0.1 \text{ m/s}, u = 2.5 \text{ m/s}, n = 5 (D=0.5)$ et $n = 20 (D=2)$

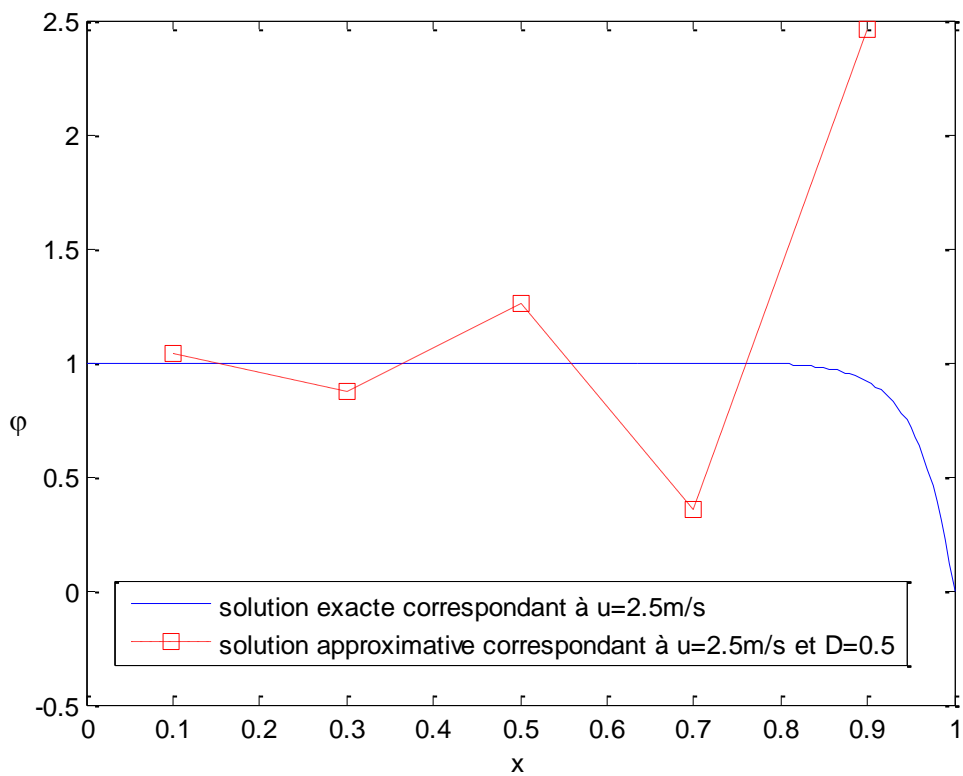
Solution

```
r=input('ro=');
k=input('cond=');
u=input('u=');
fia=input('tpa=');
fib=input('tpb=');
l=input('long=');
n=input('nbvol=');
dx=l/n ;
De=k/dx ;
Fe=r*u ;
ae=De-Fe/2;
aw=De+Fe/2;
ap=2*De;
A=ap*ones(1,n);
A(1)=3*De+Fe/2 ;
A(n)=3*De-Fe/2 ;
B=ae*ones(1,n);
B(n)=0;
C=aw*ones(1,n);
C(1)=0;
D=zeros(1,n);
D(1)=(2*De+Fe)*fia ;
D(n)=(2*De-Fe)*fib ;
P(1)=(B(1))/(A(1)) ;
Q(1)=(D(1))/(A(1)) ;
for I=2:n
P(I)=(B(I))/(A(I)-C(I)*P(I-1)) ;
Q(I)=(D(I)+C(I)*Q(I-1))/(A(I)-C(I)*P(I-1)) ;
end
tp(n)=Q(n) ;
for i=n-1:-1 :1
tp(i)=P(i)*tp(i+1)+Q(i) ;
end
x=dx/2:dx:l
plot(x,tp,'r--s')
```

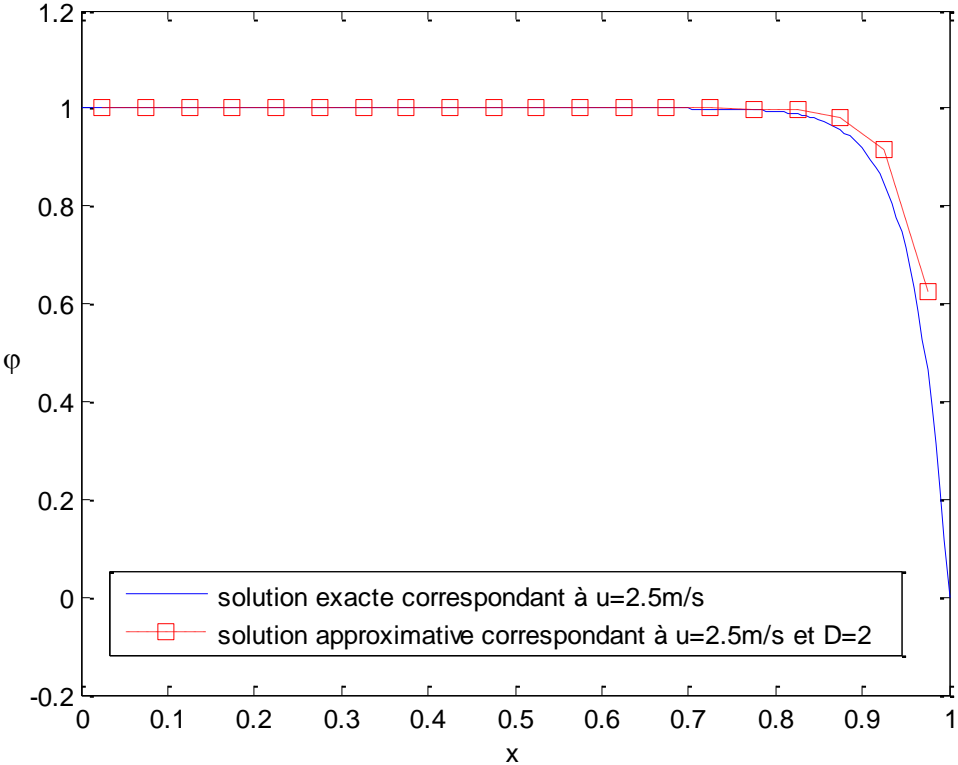
Cas 1 : $u = 0.1\text{m/s}$ et $n = 5$ ($D = 0.5$)



Cas2 : $u = 2.5\text{m/s}$ et $n = 5$ ($D = 0.5$)



Cas3 : $u = 2.5m/s$ et $n = 20$ ($D = 2$)



BIBLIOGRAPHIE

[1] H.K.Versteeg and W.Malalasekera, An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method, Longman Scientific & Technical, Malaysia, 1995.

[2] S.V.Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, New York, 1980.