Exercice 1: (08 pts)

1. Calcul de la distance r

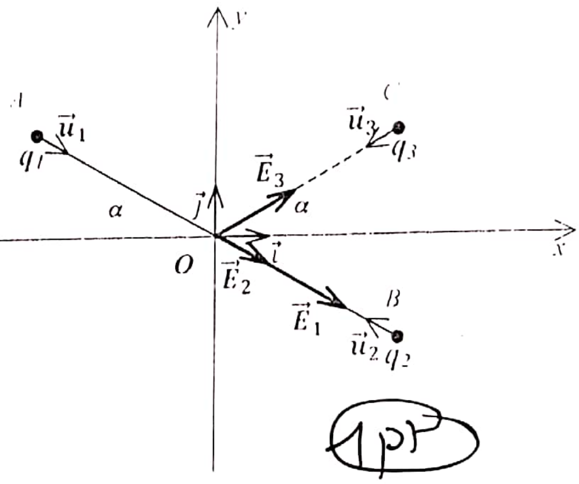
$$F_{1/2} = K.\frac{|q_1||q_2|}{r^2} \Rightarrow r^2 = K.\frac{|q_1||q_2|}{F_{1/2}} \Rightarrow r = \sqrt{K.\frac{|q_1||q_2|}{F_{1/2}}} \Rightarrow r = 0.3\ m$$

1pt 1pt

2. Représentation et calcul de $\vec{E}_0$

Première méthode

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$ 0,25pt



Avec: $\vec{E}_i = K.\frac{q_i}{r_i^2}.\vec{u}_i$ tel que $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\vec{u}_1 = \cos\alpha\ \vec{i} - \sin\alpha\ \vec{j} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$$ 0,25pt

$$\vec{u}_2 = -\cos\alpha\ \vec{i} + \sin\alpha\ \vec{j} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$ 0,25pt

$$\vec{u}_3 = -\cos\alpha\ \vec{i} - \sin\alpha\ \vec{j} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$$ 0,25pt

$$r_i = r_1 = r_2 = r_3 = \frac{r}{2}$$ 0,25pt

$$\vec{E}_0 = K\frac{q_1}{r^2}2^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right) + K\frac{q_2}{r}2^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) + K\frac{q_3}{r}2^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right)$$

0,25pt

$$\vec{E}_0 = \frac{2Kq_1}{r^2}\left[q_1(\sqrt{3}\,\vec{i} - \vec{j}) + q_2(-\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}) + q_3(-\sqrt{3}\,\vec{i} - \vec{j})\right]$$

$$\vec{E}_0 = 2.10^5\left(10\sqrt{3}\,\vec{i} - 4\,\vec{j}\right)$$ 0,25pt $\quad E_0 = 35,55.10^5\ V/m$ ou N/C 0,25pt

Deuxième méthode:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$ 0,25pt

Projection sur Ox

$$E_{0/ox} = E_1\cos\alpha + E_2\cos\alpha + E_3\cos\alpha$$ 0,25pt avec $E_i = K\frac{|q_i|}{r_i^2}$ tel que $i \in \{1, 2, 3\}$

$$E_{0/ox} = K\frac{|q_1|}{r_1^2}\cos\alpha + K\frac{|q_2|}{r_2^2}\cos\alpha + K\frac{|q_3|}{r_3^2}\cos\alpha$$ 0,25pt

$$E_{0/ox} = K\frac{\cos\alpha}{r^2}.4.(|q_1| + |q_2| + |q_3|) \Rightarrow E_{0/ox} = 34,6\ 10^5\ V/m \text{ ou } N/C$$

. *Projection sur Oy*

$E_{0/oy} = -E_1 \sin\alpha - E_2 \sin\alpha + E_3 \sin\alpha$ avec $E_i = K\dfrac{|q_i|}{r_i^2}$ tel que $i \in \{1, 2, 3\}$

0,25pt

$E_{0/oy} = -K\dfrac{|q_1|}{r_1^2}\sin\alpha - K\dfrac{|q_2|}{r_2^2}\sin\alpha + K\dfrac{|q_3|}{r_3^2}\sin\alpha$

0,25

$E_{0/oy} = -K\dfrac{\sin\alpha}{r^2}.4.(|q_1| + |q_2| - |q_3|) \Rightarrow E_{0/oy} = -8\,10^5$ V/m ou N/C

$\vec{E}_0 = 2.10^5\,(10\sqrt{3}\,\vec{\imath} - 4\,\vec{\jmath})$ 0,25pt

$E_0 = 35{,}55.10^5$ V/m ou N/C 0,25pt

3. *Valeur du potentiel V_0*

1pt $V_0 = V_1 + V_2 + V_3$ avec $V_i = K\dfrac{q_i}{r_i}$ tel que $i \in \{1, 2, 3\}$

$V_0 = K\dfrac{q_1}{r_1} + K\dfrac{q_2}{r_2} + K\dfrac{q_3}{r_3} = K\dfrac{q_1}{r}2 + K\dfrac{q_2}{r}2 + K\dfrac{q_3}{r}2 = \dfrac{2K}{R}(q_1 + q_2 + q_3) = \dfrac{2K}{R}(5 - 2 - 3) = 0$

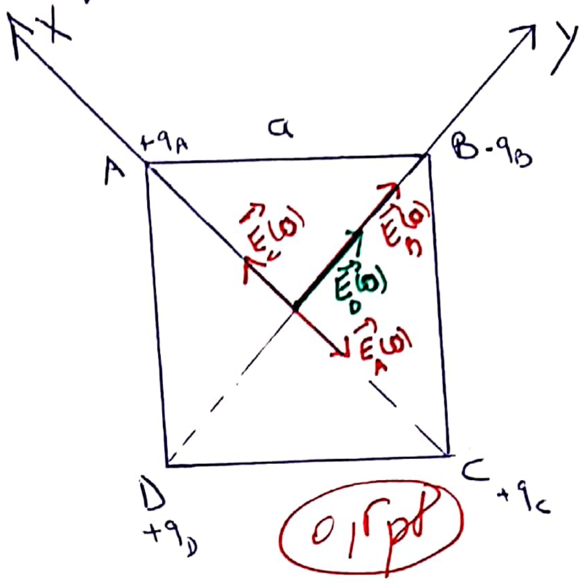
0,5pt

$V_0 = 0\,V$

0,5pt

Corrigé Type de l'examen final P2 (2016 - 2017)

8/8



0,5pt

exo 1 1) calcul du champ $\vec{E}(0)$

$$\vec{E}(0) = \sum_{i=1}^{4} \vec{E}_i = \vec{E}_1(0) + \vec{E}_2(0) + \vec{E}_3(0) + \vec{E}(0)$$ 0,5pt

Sur ox

$$E_{/ox}(0) = E_C(0) - E_A(0) = 0$$ 1pt

Vu que $q_A = q_C$ et $r_{AO} = r_{CO}$

Sur oy

$$E_{/oy}(0) = E_B + E_D = \frac{K|q_B|}{r_{BO}^2} + \frac{K|q_D|}{r_{DO}^2}$$ 1pt

avec $r_{BO} = r_{DO} = r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

AN : $E_{/oy}(0) = 540 \ V/m$

$$\vec{E}(0) = 540 \vec{j} \ V/m$$ 0,5pt

2) calcul du potentiel au point o $V(0) = ?$

$$V(0) = \sum_{i=1}^{4} V_i = V_A(0) + V_B(0) + V_C(0) + V_D(0)$$ 0,5pt

$$V(0) = \frac{Kq_A}{r} + \frac{Kq_B}{r} + \frac{Kq_C}{r} + \frac{Kq_D}{r} = \frac{K}{r}\left[q_A + q_B + q_C + q_D\right]$$ 0,5pt

AN : $$V(0) = \frac{9.10^9}{\frac{2}{\sqrt{2}}}\left[2.10^{-8} - 8.10^{-8} + 2\,10^{-8} + 4.10^{-8}\right] = 0$$

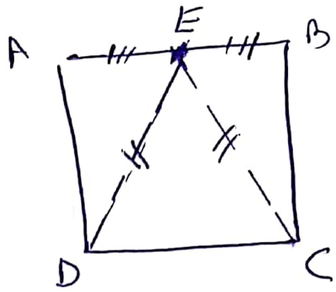
$$\{V(0) = 0$$ 0,5pt

3) calcul du potentiel au point E (milieu de AB)

$$V(E) = \sum_{i=1}^{4} V_i = V_A(E) + V_B(E) + V_C(E) + V_D(E)$$ 0,5pt

$V(E) = \frac{Kq_A}{r_{AE}} + \frac{Kq_B}{r_{BE}} + \frac{Kq_C}{r_{CE}} + \frac{Kq_D}{r_{CE}}$

0,5pt



avec $r_{AE} = r_{BE} = a/2 = 1\,m$ 0,5pt

$r_{CE} = r_{DE} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}\,m$

$V(E) = 9.10^{+9}.10^{-8}\left[2 - 8 + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}}\right]$

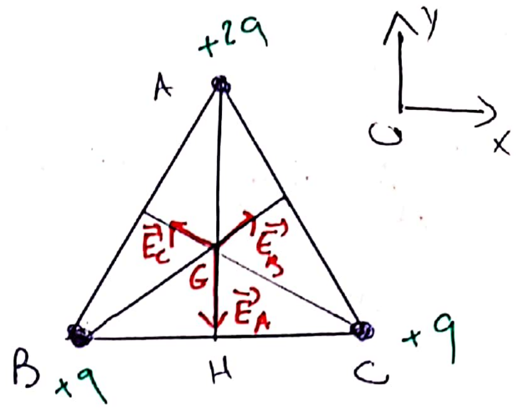
$V(E) = -298,5\,V$

0,5pt

4) Calcul de $\vec{F}(O)$

$\vec{F}(O) = q \cdot \vec{E}(O) = 2.10^{-8}(540\vec{j}) = 1080\vec{j}\,.10^{-8}\ (N)$ 0,5pt exo 2 1) calcul du champ électrostatique au pt G

Sur Ox $E_{tot} = 0$



Sur Oy $E_{tot} = -E_A + 2E_B \sin 30$

avec $E_B(G) = E_C(G)$

$E_{tot} = -\dfrac{K 2|q|}{AG^2} + \dfrac{\cancel{2}K|q|}{BG^2} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}}$

$E_{tot} = -\dfrac{K|q|}{AG^2}$

$E_{tot} = -6{,}79 \cdot 10^4 (V/m)(N/C)$

$\vec{E}_{tot} = -6{,}79 \cdot 10^4 \, \vec{j}$

$AG = BG = \dfrac{2}{3} AH$

$AH = \sqrt{L^2 - \dfrac{L^2}{4}}$

$AG = BG = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{3L^2}{4}}$

$AG = BG = \dfrac{\sqrt{3L^2}}{3}$

$AG = BG = 0{,}23\,m$

$AG^2 = 0{,}053$

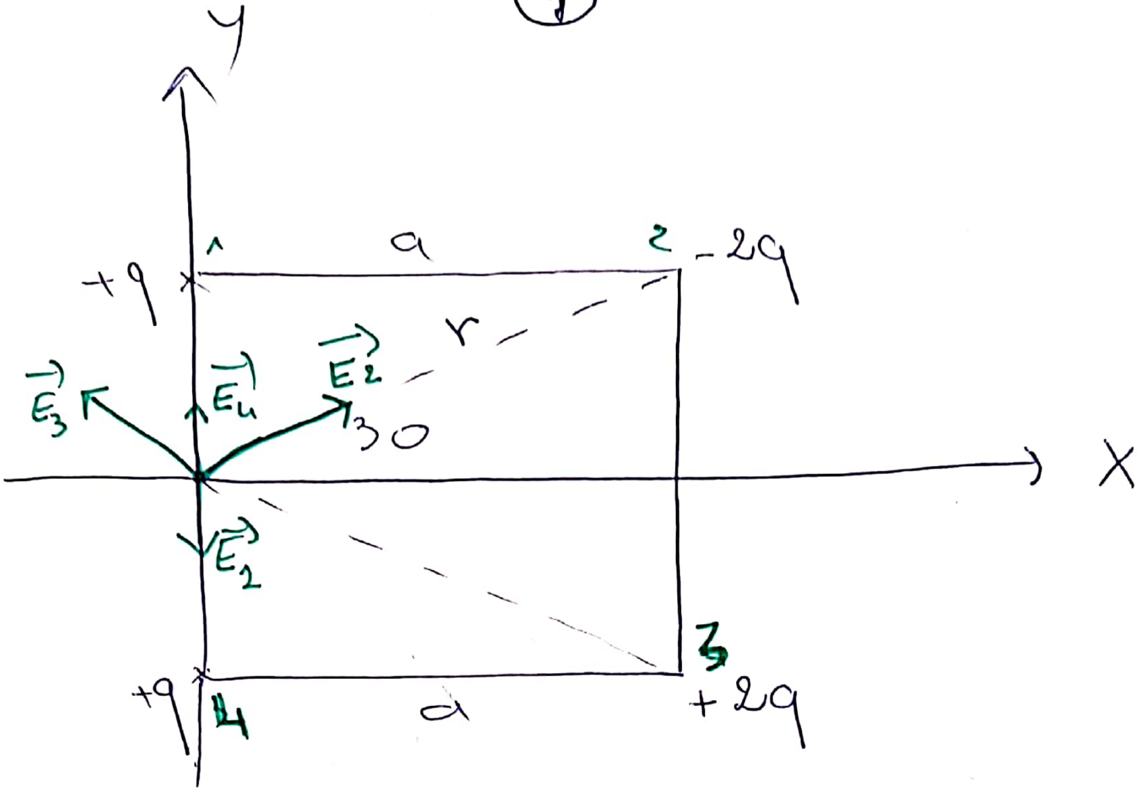
---

2) calcul du potentiel.

$V = V_A + V_B + V_C = \dfrac{2Kq}{r} + \dfrac{Kq}{r} + \dfrac{Kq}{r} = \dfrac{4Kq}{r}$

$V = \dfrac{4 \cdot 9 \cdot 10^{+9} \cdot 4 \cdot 10^{-7}}{2/3 \sqrt{\frac{3L^2}{4}}} = 6{,}26 \, 10^{+4} \, (V)$

exo2



1) calcul du champ électrique au point O

$$\vec E(O) = \vec E_1(O) + \vec E_2(O) + \vec E_3(O) + \vec E_4(O)$$

c'est une somme vectorielle, projetons sur les axes (OX, OY).

sur OX : $\vec E_{2x}(O) + \vec E_{3x}(O) = 0$

$(\vec E_1 + \vec E_4 = 0)$

sur OY : $\vec E_y(O) = \vec E_{2y} + \vec E_{3y}$

$$E_y(O) = \frac{K|-2q|}{r^2}\sin 30 + \frac{K\cdot 2q}{r^2}\sin 30 = \frac{4Kq}{r^2}\sin 30$$

$$E(O) = \frac{4\cdot 9\cdot 10^{9}\cdot 10^{-9}}{\left(\frac{a}{\cos 30}\right)^2}\cdot 0,5 = \frac{36}{0,0033}\cdot 0,5 = \boxed{6\cdot 10^{+3} \text{ V/m ou N/C}}$$

4

2) potentiel au pt O

$$V(O) = V_1(O) + V_2(O) + V_3(O) + V_4(O)$$

$$V(O) = \frac{Kq_1}{r\sin 30} + \frac{Kq_2}{r} + \frac{Kq_3}{r} + \frac{Kq_4}{r\sin 30}$$

$$V(O) = \frac{Kq}{r\sin 30} - \cancel{\frac{2Kq}{r}} + \cancel{\frac{2Kq}{r}} + \frac{Kq}{r\sin 30}$$

$$V(O) = \frac{2Kq}{r\sin 30} = \frac{2.9.10^{9}.10^{-9}}{\left(\frac{0{,}05}{0{,}86}\right).0{,}5} = 619{,}2\ V$$

Exercice 2: (06 pts)

1. ***Représentation et expression de $d\vec{E}_M(z)$:***

Par raison de symétrie du problème, il ne subsiste que la composante suivant Oz:

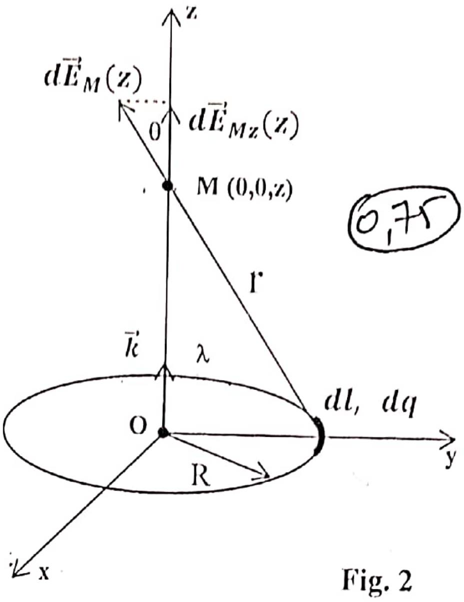
Projection sur Ox: $dE_{Mx}(z) = 0.$

Projection sur Oy: $dE_{My}(z) = 0.$

Projection sur Oz: $dE_{Mz}(z) \neq 0.$ 0,25

$d\vec{E}_M(z)$ s'écrit alors : $d\vec{E}_M(z) = dE_{Mz}(z)\,.\vec{k}$ 0,50

$dE_{Mz}(z) = dE_M(z)\,.\cos(\theta)$ 0,50



0,75

Fig. 2

Avec : $dq = \lambda.dl$ avec $dl = R.d\theta$ 0,25

Tel que: $$dE_M(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}$$ 0,50

$r^2 = z^2 + R^2$ 0,25

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$ 0,25

$$dE_M(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\, d\theta}{z^2 + R^2}\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$ 0,25 $$\Rightarrow \quad dE_M(z) = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}\,d\theta$$ 0,50

2 ***Expression de $\vec{E}_M(z)$:***

0,50

$$E_M(z) = \int dE_M(z) = \int_0^{2\pi}\frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}\,d\theta = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}_M(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}\,.\vec{k}$$ 0,50

3 ***Graphe de $E_M(z)$ pour $z \geq 0$***

$$E_M(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$E_M(0) = 0$

$\lim\limits_{z \to \infty} E_M(z) = 0$

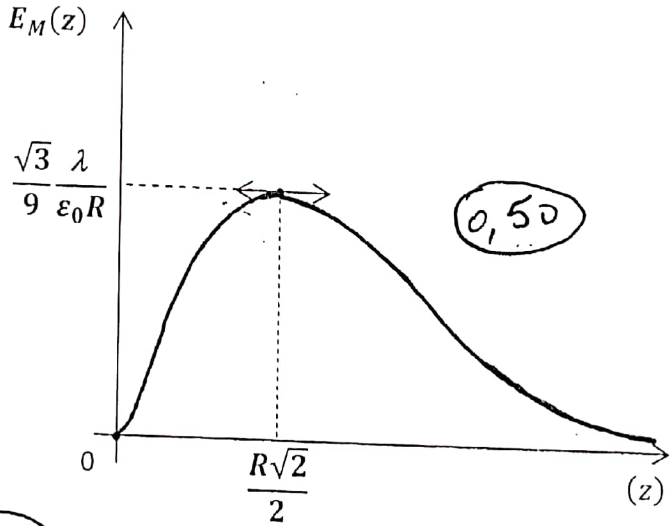
0,25

$$\frac{dE_M(z)}{dz} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{(-2z^2 + R^2)}{(z^2 + R^2)^{5/2}}$$

$$\frac{dE_M(z)}{dz} = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Donc $E_M(z)$ admet un maximum au point:

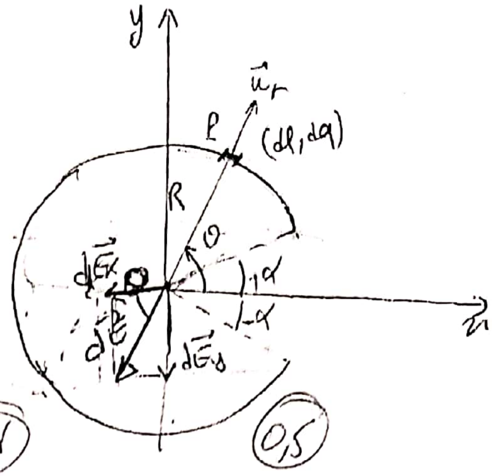
$$z_0 = \frac{R\sqrt{2}}{2} \Rightarrow E_M(z_0) = \frac{\sqrt{3}}{9}\frac{\lambda}{\varepsilon_0 R} = E_{Mmax}$$ 0,25



0,50

Exercice 2 : (07 pts)

Le champ élémentaire $d\vec{E}$ produit par la charge élémentaire dq de longueur dl du fil circulaire au point O est :



$$d\vec{E}(0) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{R^2} \vec{u}_r \quad (1)$$

avec : $dq = \lambda\, dl$ (0,25) et $dl = R.d\theta$ (0,25)

$$\Rightarrow d\vec{E}(0) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda.\, d\theta}{R} \vec{u}_r \quad (0,5)$$

et $d\vec{E}(0) = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$ (0,5) et par raison de symétrie de la répartition des charges, $E_y = \int dE_y = 0$. (1)

le champ total au point O est porté sur l'axe ox : D'où

$$dE_x = dE.\cos\theta \Rightarrow dE_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} .\cos\theta.\, d\theta \quad (0,5)$$

pour obtenir le champ total produit par toute la charge au point O. On intègre de $\theta = \alpha$ à $\theta = 2\pi - \alpha$: (0,5)

$$E = E_x = \int dE_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \int_\alpha^{2\pi-\alpha} \cos\theta .\, d\theta \quad (0,5)$$

$$E = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \left[\sin\theta\right]_\alpha^{2\pi-\alpha} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \left(\sin(2\pi-\alpha) - \sin\alpha\right)$$

$$E = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \cdot (-2\sin\alpha) \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R} \sin\alpha.} \quad (1)$$

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_x = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \sin\alpha\, \vec{i}} \quad (0,5)$$

Exo2 : (6 pts) A- Calcul du champ $\vec{E}$ crée par un disque creux

~~Une C~~ . Chargé en surface σ.

une Couronne circulaire élementaire

de rayon r et d'épaisseur dr ~~crée un~~ porte une charge élementaire dq

crée un champ élementaire $d\vec{E}$ au point M

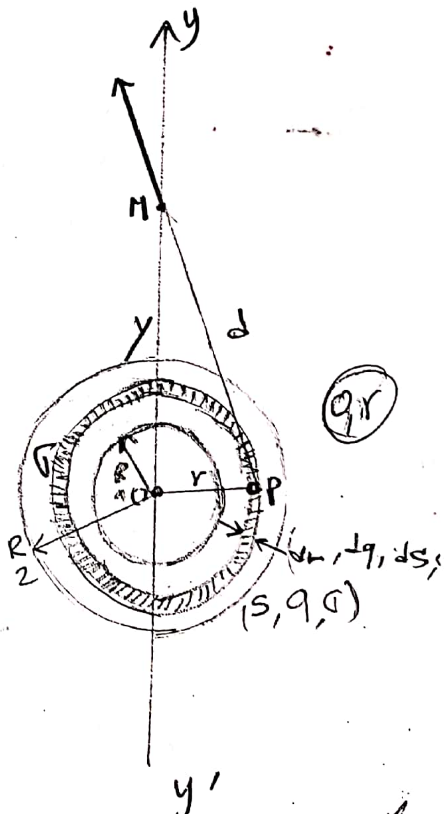
de l'axe yy' : $d\vec{E} = \frac{k\,dq}{d^2}\vec{u}$ (0,5)

$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$ (0,25)

par raison de symetrie ; le champ total est porte sur l'axe yy' ; donc,

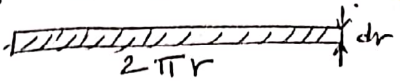
$E_x = \int dE_x = 0$. (0,5)

avec : $\begin{cases} dE_x = dE.\sin\theta & (0,25) \\ dE_y = dE.\cos\theta & (0,25) \end{cases}$



$$E_y = \int dE_y = \int dE.\cos\theta = \int \frac{k.dq}{d^2}.\cos\theta$$

$$\cancel{E_y = \int k.} \quad dq = \sigma.ds \quad \text{et} \quad ds = 2\pi r\,dr \;(0,2pt) \quad \text{car } S = \pi r^2$$



$ds = 2\pi r.dr$

$$d^2 = y^2 + r^2 \;(0,2pt); \quad \cos\theta = \frac{y}{d} \;(0,2pt)$$

r allant de R_1 à R_2.

$$\Rightarrow E_T = E_y = \int_{R_1}^{R_2} \frac{k.\sigma.2\pi r\,dr}{(y^2+r^2)} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2+r^2}}$$

$$E_T = k\sigma\pi y \int_{R_1}^{R_2} \frac{2r\,dr}{(y^2+r^2)^{3/2}} \;(0,1pt)$$

prendre : $u = y^2+r^2 \Rightarrow du = 2r.dr$ (0,1pt) $\Rightarrow \int u^n.du = \frac{u^{n+1}}{n+1} = \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{u}}$

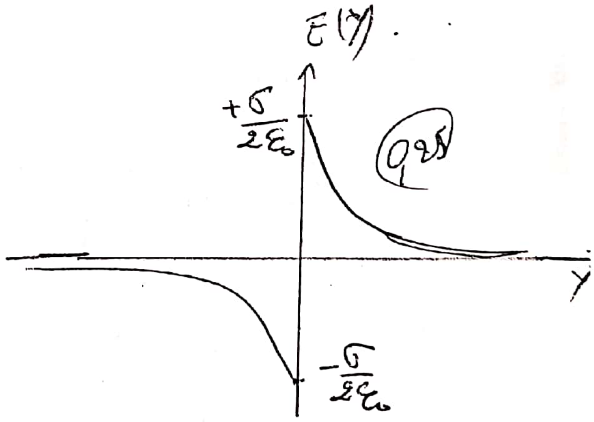
$$E_T = \pi k\sigma y \int_{R_1}^{R_2} (r^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}.2r.dr = \pi k\sigma y \left.\frac{(r^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right|_{R_1}^{R_2}$$

$$E_T(y) = -2\pi k\sigma y \left[\frac{1}{\sqrt{R_2^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2+y^2}}\right) \;(0,1pt); \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_T(y) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{y}{\sqrt{R_1^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{R_2^2+y^2}}\right]\vec{j}$$

2. Si $R_1 \longrightarrow 0$:

$$E_T(y) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{y}{|y|} - \frac{y}{\sqrt{R_2^2+y^2}}\right] \;(0,1pt)$$



3. Si $R_1 = 0$ et $R_2 \longrightarrow \infty$.

$$E_T(y) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{y}{|y|} = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \;(0,1pt)$$

(Cas d'un plan infini).