Exercice

Soit un mouvement défini par son vecteur accélération :

$$\vec{a} = \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right]\vec{\imath} + \left[\sqrt{3}\sin\left(\frac{t}{3}\right)\right]\vec{\jmath}$$

Trouver le vecteur vitesse.

Calculer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

Trouver la relation entre $\vec{a}$ et $\overrightarrow{OM}$.

Sachant qu'à l'état initial ($t = 0s$), le mobile se trouvait au point $A\left(3\sqrt{3}, 0\right)$ (m) avec le vecteur vitesse initiale est $\vec{v}_0 = -3\sqrt{3}\vec{\jmath}$.

Solution

$$\vec{a} = \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right]\vec{\imath} + \left[\sqrt{3}\sin\left(\frac{t}{3}\right)\right]\vec{\jmath}$$

Vecteur vitesse $\vec{v}$

$$\begin{aligned}
\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} &\Rightarrow d\vec{v} = \vec{a}dt \\
&\Rightarrow dv_x\vec{\imath} + dv_y\vec{\jmath} \ = a_x dt\vec{\imath} + a_y dt\vec{\jmath} \\
&\Rightarrow \begin{cases} dv_x = a_x dt \\ dv_y = a_y dt \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \int dv_x = \int \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right] dt \\ \int dv_y = \int \left[\sqrt{3}\sin\left(\frac{t}{3}\right)\right] dt \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} v_x = -\sqrt{3}\sin\left(\frac{t}{3}\right) + c_1 \\ v_y = -3\sqrt{3}\cos\left(\frac{t}{3}\right) + c_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

A $t = 0s$: $\vec{v}_0 = -3\sqrt{3}\vec{\jmath} \ \Rightarrow \begin{cases} 0 = -\sqrt{3}\sin(0) + c_1 \\ -3\sqrt{3} = -3\sqrt{3}\cos(0) + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$

Alors:

$$\vec{v} = \left[-\sqrt{3}\sin\left(\frac{t}{3}\right)\right]\vec{\imath} + \left[-3\sqrt{3}\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right]\vec{\jmath}$$

Vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

$$\begin{aligned}
\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \ &\Rightarrow d\overrightarrow{OM} = \vec{v}dt \\
&\Rightarrow dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} \ = v_x dt\vec{\imath} + v_y dt\vec{\jmath}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int dx\,\vec{\imath} + \int dy\,\vec{\jmath} = \int \left[-\sqrt{3}\sin\left(\frac{t}{3}\right)\right] dt\,\vec{\imath} + \int \left[-3\sqrt{3}\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right] dt\,\vec{\jmath}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = \left[3\sqrt{3}\cos\left(\frac{t}{3}\right) + c_3\right]\vec{\imath} + \left[-9\sqrt{3}\sin\left(\frac{t}{3}\right) + c_4\right]\vec{\jmath}$$

A $t = 0s$: $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{OA} = 3\sqrt{3}\vec{\imath} \Rightarrow 3\sqrt{3}\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} = [3\sqrt{3}\cos(0) + c_3]\vec{\imath} + [-9\sqrt{3}\sin(0) + c_4]\vec{\jmath} \Rightarrow \begin{cases} c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \end{cases}$

Alors:

$$\overrightarrow{OM} = \left[3\sqrt{3}\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right]\vec{\imath} + \left[-9\sqrt{3}\sin\left(\frac{t}{3}\right)\right]\vec{\jmath}$$

Relation entre $\vec{a}$ et $\overrightarrow{OM}$.

On a :

$$\overrightarrow{OM} = \left[3\sqrt{3}\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right]\vec{\imath} + \left[-9\sqrt{3}\sin\left(\frac{t}{3}\right)\right]\vec{\jmath}$$
$$= -9\left\{\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right]\vec{\imath} + \left[\sqrt{3}\sin\left(\frac{t}{3}\right)\right]\vec{\jmath}\right\}$$

Comme $\vec{a} = \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right]\vec{\imath} + \left[\sqrt{3}\sin\left(\frac{t}{3}\right)\right]\vec{\jmath}$, alors :

$\overrightarrow{OM} = -9\vec{a}$ ou $\vec{a} = -\frac{\overrightarrow{OM}}{9}$