Chapitre V. Aspect Sémantique de la logique des Prédicats

V.1.Introduction à l'interprétation

Comme en logique propositionnelle, on fixe d'abord un ensemble de modèles (aussi appelés 'valuations' ou interprétations). Ensuite, pour un modèle donné, on stipule des conditions de vérité permettant d'établir pour n'importe quelle formule A du langage si A est vraie ou fausse dans ce modèle.

Pour donner un 'sens' aux variables, constantes et fonctions du langage, il faut un domaine d'objets (ou domaine d'individus, ou univers de discours). À chaque variable et constante, sera associé un élément du domaine. À chaque fonction sera associée une application dans le domaine.

Ensuite, pour pouvoir donner un 'sens' aux formules, il faut une fonction associant à chaque symbole de prédicat à n places l'ensemble des n-uplets d'éléments du domaine qui le rendent vrai.

Finalement, l'interprétation d'une formule A se fait comme en logique propositionnelle : I(A) prend une valeur dans l'ensemble {Vrai, Faux}, où la quantification universelle ∀xA est interprétée comme `pour toute interprétation de x, A est vrai', et la quantification existentielle ∃xA est interprétée comme `il existe une interprétation de x telle que A est vrai'.

V.1.1.Remarque sur la validité et la satisfiabilité

A est insatisfiable si I(A) = Faux pour toute interprétation I, et A est invalide si il existe une interprétation I telle que I(A) = Faux.

Les formules valides sont forcément satisfiables, et les formules insatisfiables sont forcément falsifiables.

V.2.Théorie des modèles de la logique des prédicats

V.2.1.Exemple d'interprétation

Soit le domaine d'individus D = {Amina, Baya, Chaima}. Soit l'interprétation de variables telle que IV(x) = Amina, IV(y) = Baya, IV(z) = Chaima. Soit l'interprétation des prédicats telle que IP(aime) (Amina,Baya) = IP(aime) (Baya,Amina) = IP(aime) (Chaima,Amina) = Vrai, et Faux sinon.

Le même domaine D avec l'interprétation de variables IV' telle que IV'(x) = Amina, IV'(y) = Baya = IV(z) et la même interprétation des prédicats est une variante de I en z.

I est un modèle des formules 1à6:	I n'est pas un modèle des formules 7à12 :
1. aime(z,x)	7. aime(x,z)
2.$\exists$z aime(x,z)	8.$\forall$z aime(z,x)
3.$\forall$x $\neg$aime(x,x)	9.$\exists$x aime(x,x)
4.$\exists$x $\exists$y aime(x,y)	10.$\forall$y $\exists$x aime(x,y)
5.$\forall$x $\exists$y aime(x,y)	11.$\exists$x $\forall$y aime(x,y)
6.$\exists$u $\exists$v (aime(u,v) $\wedge$ aime(v,u))	12.$\exists$y $\forall$x aime(x,y)

V.2.2.Un autre exemple d'interprétation

Soit la formule :

$A = (\forall x\ \exists y\ R(x,y)) \wedge (\forall x\ \neg R(x,x)) \wedge (\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)))$

Un modèle pour A est l'interprétation I suivante :

Soit D l'ensemble des entiers naturels. Soit l'interprétation telle que le prédicat R est interprété par la relation `strictement plus petit que' sur les entiers naturels, alors I est un modèle de A, pour n'importe quelle interprétation des variables.

Remarque: Nous aurions également pu choisir comme domaine les nombres entiers, réels ou rationnels.

V.2.3.Exemples de formules valides et satisfiables

formules valides	formules satisfiables et invalides	formules insatisfiables
$(\forall x\ p(x)) \rightarrow p(y)$	$p(x)$	$\forall x\ (p(x) \wedge \neg p(x))$
$(\forall x\ p(x)) \rightarrow (\exists x\ p(x))$	$\forall x\ p(x)$	$(\forall x\ p(x)) \wedge (\forall z\ \neg p(z))$
$p(x) \rightarrow (\exists x\ p(x))$	$(\exists x\ p(x)) \wedge (\exists x\ \neg p(y))$	$(\forall x\ p(x)) \wedge (\exists x\ \neg p(x))$
$\exists x\ (p(x) \rightarrow (\forall x\ p(x)))$	$\forall x\ (p(x) \rightarrow (\forall x\ p(x))$	$\forall x\ (p(x) \wedge (\exists x\ \neg p(x)))$
$(\exists x\ \forall y\ p(x,y)) \rightarrow (\forall y\ \exists x\ p(x,y)))$	$(\forall x\ \exists y\ p(x,y)) \wedge (\forall x\ \exists y\ \neg p(x,y)))$	$(\forall x\ \exists y\ p(x,y)) \wedge (\exists x\ \forall y\ \neg p(x,y)))$

V.2.4.Exemples de conséquences logiques

- $\{\forall x\ p(x)\} \vDash p(y)$
- $\{\forall x\ p(x)\} \vDash \exists x\ p(x)$
- $\{\forall x\ (p(x) \rightarrow q(x)), \exists y\ p(y)\} \vDash \exists y\ q(y)$

Remarque : ni p(y), ni $\forall x\ p(x)$, sont des conséquences logiques de $\{p(x)\}$.

V.3.Les formes normales pour les Prédicats

V.3.1.Objectif

Transformer une fbf sous la forme d'"ensemble de clauses" pour appliquer le principe de résolution

V.3.2.Mise sous Forme Normale Prénexe (FNP)

V.3.2.1.La Forme Prénexe

Une fbf en logique des prédicats est dite **en Forme Normale Prénexe** (FNP) ssi elle est de la forme :

$$(Q1\ X1)\ (Q2\ X2)\ ...\ (Qn\ Xn)\ M(X1,X2,...,Xn)$$

Où :

$(Q1\ X1)\ (Q2\ X2)\ ...\ (Qn\ Xn)$: est dit Préfixe, chaque $(Qi\ Xi)$ est soit $\forall Xi$, soit $\exists Xi$.

$M(X1,X2,...,Xn)$: est dit Matrice qui est une fbf ne contenant aucun quantificateur.

Exemples :

$\forall X\ \exists Y\ (P(X,Y) \vee P(Y,X))$ est en FNP

$\forall X\ \exists Y \forall Z\ (P(X) \wedge \rceil Q(Y,Z) \wedge P(f(Y)))$ est en FNP

$\exists X\ P(X) \wedge \forall Y\ Q(Y,X))$ n'est pas en FNP

Par application successives des théorèmes sur les paires (fbfs) équivalentes (lois d'équivalence) on peut trouver une fbf G' en FNP équivalente à une fbf G donnée.

V.3.2.2.Méthode de transformation d'une fbf en FNP

1. **Eliminer les connecteurs $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$:**

$(G\leftrightarrow F) \equiv (G\rightarrow F) \wedge (F\rightarrow G)$

$(G\rightarrow F) \equiv (\rceil G \vee F)$

2. **Accoler les connecteurs $\rceil$ aux atomes concernés:**

$\rceil(\rceil G) \equiv G$

$\rceil(F \vee G) \equiv \rceil F \wedge \rceil G$

$\rceil(F \wedge G) \equiv \rceil F \vee \rceil G$

$\rceil((\forall X)\ P(X)) \equiv (\exists X) \rceil P(X)$

$\rceil((\exists X)\ P(X)) \equiv (\forall X) \rceil P(X)$

3. **Rebaptiser (renommer) les variables liées <u>si nécessaire,</u> de sorte que chaque quantificateur gouverne une variable originale :**

$(\forall X)\ P(X) \equiv (\forall Y)\ P(Y)$

$(\exists X)\ P(X) \equiv (\exists Y)\ P(Y)$

4. **Déplacer tous les quantificateurs à gauche de la formule (sans changer l'ordre relatif de ces quantificateurs).**

$((Q1X)\ F(X)) \vee ((Q2Y)\ H(Y)) \equiv (Q1X)\ (Q2Y)\ (F(X) \vee (H(Y))$

$((Q1X)\ F(X)) \wedge ((Q2Y)\ H(Y)) \equiv (Q1X)\ (Q2Y)\ (F(X) \wedge (H(Y))$

Seulement le déplacement ou le transport des quantificateurs est fait sous certaines conditions citées dans le paragraphe qui suit (§*V.3.2.3. Transport des Quantificateurs).*

Au terme de ces 4 étapes on obtient une FNP de la fbf initiale qui lui est équivalente. On peut avoir diverses FNP pour une même fbf.

V.3.2.3. Transport des Quantificateurs.

A/ Soit F et H des formules quelconques :

$\exists xF \equiv \neg\forall x \neg F$	$\forall xF \equiv \neg\exists x \neg F$
$\neg(\exists xF) \equiv \forall x \neg F$	$\neg(\forall xF) \equiv \exists x \neg F$
$\forall x\forall yF \equiv \forall y\forall xF$	$\exists x\exists yF \equiv \exists y\exists xF$
$\forall xF(x) \wedge \forall xH(x) \equiv \forall x\ (F(x) \wedge H(x))$ ($\forall$ et $\wedge$ pas de renommage)	$\exists xF(x) \vee \exists xH(x) \equiv \exists x\ (F(x) \vee H(x))$ ($\exists$ et $\vee$ pas de renommage)
$\forall xF(x) \vee \forall xH(x) \equiv \forall xF(x) \vee \forall yH(y)$ $\equiv \forall x\forall y\ (F(x) \vee H(y))$ ($\forall$ et $\vee$ renommage obligatoire)	$\exists xF(x) \wedge \exists xH(x) \equiv \exists xF(x) \wedge \exists yH(y)$ $\equiv \exists x\exists y\ (F(x) \wedge H(y))$ ($\exists$ et $\wedge$ renommage obligatoire)

B/ Si H ne contient aucune occurrence de x, alors:

$(\forall xF) \vee H \equiv \forall x\ (F \vee H)$	$\forall x\ H \equiv H$
$(\exists xF) \wedge H \equiv \exists x\ (F \wedge H)$	$\exists x\ H \equiv H$

V.3.2.4. Exemples

1/ $(\forall X)\ P(X) \rightarrow (\exists X)\ Q(X)$

$$\cong (\neg((\forall X)\ P(X))) \vee (\exists X)\ Q(X)$$
$$\cong (\exists X)\ \neg P(X)) \vee (\exists X)\ Q(X)$$
$$\cong (\exists X)\ (\neg P(X) \vee Q(X))$$

2/ $(\exists X\ (P(X) \rightarrow Q(X))) \rightarrow (\forall X\ P(X) \rightarrow \exists X\ Q(X))$

$$\cong (\neg(\exists X\ (P(X) \rightarrow Q(X))) \vee ((\forall X)\ P(X) \rightarrow \exists X\ Q(X))$$
$$\cong (\neg(\exists X\ (\neg P(X) \vee Q(X))) \vee ((\neg(\forall X\ P(X))) \vee \exists X\ Q(X))$$
$$\cong (\forall X\ (P(X) \wedge \neg Q(X))) \vee (\exists X\ (\neg P(X)) \vee \exists X\ Q(X))$$
$$\cong (\forall X\ (P(X) \wedge \neg Q(X))) \vee (\exists X\ (\neg P(X) \vee Q(X)))$$
$$\cong (\forall X\ (P(X) \wedge \neg Q(X))) \vee (\exists Y\ (\neg P(Y) \vee Q(Y)))$$
$$\cong \forall X\ \exists Y\ ((P(X) \wedge \neg Q(X)) \vee (\neg P(Y) \vee Q(Y)))$$

V.3.2.5. Exercice1

Mettre sous Forme Normale Prénexe les fbf suivantes :

a) $\forall X\ P(X) \rightarrow (\exists T\ Q(T) \vee \exists T\ C(T))$
b) $\forall X\ (\forall Y\ P(X,Y) \rightarrow \exists Z\ R(X,Z))$
c) $\forall X\ \forall Y\ \exists Z\ (P(X,Y,Z) \wedge (\exists U\ Q(X,U) \rightarrow \exists V\ Q(Y,V)))$
d) $((\exists X\ P(X) \rightarrow \exists X\ R(X) \vee \forall Y\ P(Y)) \wedge \forall X\ \exists Y\ (R(Y) \rightarrow P(X)))$

V.3.3.Mise sous Forme Standard de Skolem (FSS)

V.3.3.1.Méthode de mise en forme FSS

A partir d'une FNP G' d'une fbf G on peut produire une forme standard de Skolem FSS, par les transformations ci-après soit :

G' = (Q1 X1) (Q2 X2)... (Qn Xn) M(X1, X2,... Xn) FNP de G

1. **Eliminer les quantificateurs existentiels**

Soit Qr un existentiels dans le préfixe de G'

(On opère habituellement de la gauche vers la droite, mais l'ordre importe peu)

(a) Si aucun quantificateur universel n'apparaît avant Qr, c'est-à-dire dans (Q1X1)...(Qr-1 Xr-1) :

. On choisi un symbole de constante c différent de toute constante apparaissant dans la matrice M.

. On supprime QrXr du préfixe.

. On remplace Xr par c dans la matrice M.

Ex: $(\exists X)(\forall Y)(P(X) \vee Q(Y))$

Choix de la constante a, donc je remplace X par a (a/X), ce qui donne :

$(\forall Y)(P(a) \vee Q(Y))$ est une FSS

(b) Si Qs1 Qs2…Qsm sont m quantificateurs universels apparaissant avant Qr dans le préfixe :

. On choisit un symbole de fonction f d'arité m différent de toute fonction apparaissant dans la matrice M

. On supprime QrXr du préfixe

. On remplace tout Xr dans M par f(Xs1, Xs2,... Xsm)

2. **On itère le processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de quantificateur existentiel dans le préfixe**

Les fonctions et constantes introduites sont appelées : **constantes et fonctions de Skolem.** Nous obtenons une fbf dite : Forme Standard de Skolem.

V.3.3.2.Exemple

$\exists X\ \exists Y\ \forall Z\ \forall T\ \exists V\ P(X,Y,Z,T,V)$

1. étape a/X
   $\exists Y\ \forall Z\ \forall T\ \exists V\ P(a,Y,Z,T,V)$
2. étape b/Y
   $\forall Z\ \forall T\ \exists V\ P(a,b,Z,T,V)$
3. étape f(Z,T)/V
   $\forall Z\ \forall T\ P(a,b,Z,T,f(Z,T))$

V.3.3.3.Théorème

Soit Gs la forme standard de Skolem d'une fbf G, G inconsistant ssi Gs inconsistant

V.3.3.4.Exercice 2

Mettre sous forme standard de Skolem les fbfs de l'exercice1 (ci-dessus).

V.3.4.Mise sous Forme Clausale (FC)

V.3.4.1.Obtention d'un ensemble de clauses

Soit Gs une Forme Standard de Skolem d'une fbf G :

1. **Eliminer tous les quantificateurs**

Il ne reste que les quantificateurs universels. On allège la notation en les supprimant. On suppose donc désormais que toutes les variables sont quantifiées universellement.

2. **Passer sous Forme Normale Conjonctive FNC**
3. **Eliminer les connecteurs ∧**

La conjonction de clauses obtenues au 2. est considérée comme un ensemble de clauses S. S est dite insatisfiable ou insatisfaisable pour dire S inconsistante .

4. **Distinguer les variables des clauses distinctes <u>si nécessaire</u>.**

V.3.4.2.Exemple

Soit une FSS telle que : $\forall X\ ((P(X) \wedge Q(X)) \vee H(X))$

1. Eliminer $\forall X$: $((P(X) \wedge Q(X)) \vee H(X))$
2. FNC : $((P(X) \vee H(X)) \wedge (Q(X)) \vee H(X))$
3. Ensemble de Clause S= { $P(X) \vee H(X)$, $Q(X)) \vee H(X)$ }

   Deux Clause C1 et C2 :

   $C1= P(X) \vee H(X)$

   $C2=Q(X)) \vee H(X)$

V.3.4.3.Exercice 3

Donner l'ensemble des clauses des fbfs de l'exercice 1.

V.3.5.Conclusion

1. Il existe en général, plusieurs formes standards d'une même formule. On a intérêt à introduire des fonctions de Skolem aussi simples que possible. Donc, il faut essayer de repousser le plus à gauche le quantificateur existentiel.
2. Si F peut s'écrire F1 ∧ F2 ∧ ... ∧ Fn, un ensemble de clauses pour F peut être obtenu comme union des ensembles de clauses Si de chaque Fi :

F = F1 ∧ F2 ∧ ... ∧ Fn

Fs = fs1 ∧ ... ∧ fsn SKOLEM

S = S1 $\wedge \ldots \wedge$ Sn CLAUSES

C'est-à-dire on fait clauses puis Skolem

Exemple

$\forall X\ P(X) \wedge \exists Y\ Q(Y)$

Skolem	$\rightarrow \forall X\ (P(X) \wedge Q(f(X)))$
Clauses	$\rightarrow \forall X\ (P(X) \wedge Q(f(X)))$
Ens. Clauses	$\rightarrow$ $S = \{P(X), Q(f(X))\}$
Clauses	$\rightarrow \forall X\ P(X), \exists Y\ Q(Y)$
Skolem	$\rightarrow$ $\forall X\ P(X), Q(a)$
Ens. Clauses	$\rightarrow$ $S = \{P(X), Q(a)\}$

-Une fbf G est équivalente à G' qui est FNP de G.

-Une fbf G est non équivalente (si G est consistante) à G'' (FSS) ou Forme Clausale.

-On a uniquement si G est inconsistante alors G'' est forme clausale inconsistante.

-Donc, pour étudier la validité d'une fbf G, on étudie l'inconsistance de $\urcorner$G et donc de la FSS de $\urcorner$G.

On dit que l'on procède par **Réfutation**

G valide	$\Leftrightarrow \neg G$ inconsistant
	$\Leftrightarrow$ FNP $(\neg G)$ inconsistante
	$\Leftrightarrow$ FSS $(\neg G)$ inconsistante
	$\Leftrightarrow$ S de $(\neg G)$ insatisfiable

Dans les applications de la logique des prédicats, en général on veut montrer qu'une fbf H est conséquence logique de fbf G1 ... Gn c'est-à-dire :

$$G1 \wedge \ldots \wedge Gn \rightarrow H \text{ valide}$$
$$\Leftrightarrow \urcorner(G1 \wedge \ldots \wedge Gn \rightarrow H) \text{ inconsistant}$$
$$\Leftrightarrow G1 \wedge \ldots \wedge Gn \wedge \urcorner H \text{ inconsistant}$$