Nom : *Corrigé Type après rectifications* **Prénom :** *Corrigé Type après rectifications* **Groupe :**

L2 Informatique- Logique Mathématiques –

Conseils **:** *Lisez les questions (recto/verso), commencez par celle que vous trouvez la plus facile.*

Calcul de la note :	Question 1 :	Question 2 :	Question 3 :	*Total : /20pts*

Question 1: Les Propositions : Validité de formule (7pts)

$$F= [((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))]$$

A/ Utiliser les lois d'équivalences pour démontrer que F est valide ***(3pts):***

$\equiv \neg(\neg(p \wedge q) \vee r) \vee ((\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r))$ **pour chaque transformation des 4 '→' *(4x0.25* *(1)***

$\equiv ((p \wedge q) \wedge \neg r) \vee ((\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r))$ **pour loi de De Morgan des 2 parties (2x0.25)** ***(0,5pts)***

$\equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee \neg q \vee r)$ **on peut ouvrir les ( ) à l'intérieur de la 2ème partie !** ***(0,5pts)***

$\equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee \neg(p \wedge q \wedge \neg r)$ **pour transformer en X et ⌉X** ***(0,5pts)***

$\equiv X \vee \neg X$ ***(0,25pts)***

≡ VRAI Donc F est valide ***(0,25pts)***

B/ Utiliser l'algorithme de Résolution pour démontrer que F est valide ***(4pts):***

$\neg F \equiv \neg([(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)])$ **pour juste avoir écrit ⌉F** ***(0,5)***

$\equiv \neg(\neg[\neg(p \wedge q) \vee r] \vee [(\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r)])$ **pour chaque transformation des 4 '→' (4x0.25)**

(0,25) (0,25) (0,25) (0,25)

$\equiv ([\neg(p \wedge q) \vee r] \wedge \neg[(\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r)])$ **étape <u>intermédiaire</u> rien**

$\equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge p \wedge \neg r \wedge q \wedge \neg r$ **pour ouverture des parenthèses des 2 parties**

(0,25 1ère partie) (0,25 2ème partie)

$S_{\rceil F} = \{\rceil p \vee \rceil q \vee r, p, \rceil r, q, \rceil r\}$ **pour déterminer les 5 clauses ainsi** *(5 x 0,25)*   **C1=** $\rceil p \vee \rceil q \vee r$ **C2=p** **C3=** $\rceil r$ **C4=q** **C5=** $\rceil r$ **ou ainsi !**   **R (C1, C2) =** $\rceil p \vee \rceil q \vee r \vee p = \rceil q \vee r$ **=C6** **pour la résolution tout ou rien !** *(0,5)*   **R (C6, C3) =** $\rceil q \vee r \vee \rceil r = \rceil q$ **=C7**   **R (C7, C4) =** $\rceil q \vee q = \phi$ **Donc F est valide** **pour valide** *(0,25)*

Question 2: Les propositions et Les Prédicats: Traduction (3pts)

Soit l'énoncé suivant :

« Tous les étudiants travaillent et tous les étudiants réussiront aux examens. »

*A/Traduire l'énoncé au langage des propositions en utilisant des propositions de **votre choix (1,5pts):***

Donner vos propositions :	*Traduction :*
P : Tous les étudiants travaillent *(0,5)* **Q: Tous les étudiants réussiront aux** *(0,5)* **examens**	$P \wedge Q$ *(0,5)*

*B/Traduire l'énoncé au langage des prédicats en utilisant des prédicats de **votre choix (1,5pts):***

Donner vos prédicats :	*Traduction :*
E(x) : x est un étudiant *(0,25)* **T(x) : x travaille** *(0,25)* **R(x) : x réussira aux examens** *(0,25)*	$\forall x\, (E(x) \rightarrow T(x)) \wedge \forall x\, (E(x) \rightarrow R(x))$ *(0,25) (0,25) (0,25)*

Question 3: ***Les Prédicats : syntaxe, interprétation selon un domaine, formes standards*** ***(10pts)***
(Les questions A/, B/ et C/ sont indépendantes !)

A/Soit une formule F où P, Q sont des prédicats respectivement binaire et unaire, f, g des fonctions unaires, x,y des variables et a, b des constantes.

$$\mathbf{F = \forall x Q(x) \rightarrow \forall y(P(f(x),a) \rightarrow P(g(y),b))}$$

1/ Donner les termes de cette fonction (ne pas compter les doubles) ***(3pts)*** *:*

x , f(x) , a ,y , g(y) , b **6 termes chacun** ***(0,5)*** ***(Ici, si l'étudiant cite des faux termes (-0,5)!! Car il ne suffit pas de citer tous et l'enseignant compte les termes justes… trop facile !)***

2/ Donner les variables libres et les variables liées en ***justifiants*** *votre réponse* ***(2pts)*** *!*

x libre car 1 occurrence libre : 1[er] occurrence de x : liée
(0,5) ***(0,5)*** 2[ème] occurrence de x : libre **(OU:on peut diviser** ***(0,5)/2: (0,25) : x liée, (0,25) :x libre)***

y liée car 1 seule occurrence liée
(0,5) ***(0,5)***

*B/**Interprétation :** Soit P un prédicat binaire, on considère la formule F:*

$$\mathbf{F = \forall x \exists y\ P(x,y)}$$

1/ Déterminer la valeur de vérité de F dans les structures S_1 et S_2 suivantes ***(3pts)*** *:*

$S_1 = (D_1, I_1) : D_1 = N$ (N: ensemble des entiers naturels)
et $I_1(P(x,y))$ = Vrai ssi $x < y$

F vraie ou fausse dans S_1 ? Pourquoi :

F est VRAI ***car :***
(1) ***il suffit de prendre toujours $y = x+1$!***
(0.5)
(Bien sûr pour toute autre explication aussi)

S_2= (D_2, I_2) : D_2=N (N: ensemble des entiers naturels)
et I_2(P(x,y))= Vrai ssi $x \geq y$.

F vraie ou fausse dans S_2 ? Pourquoi :

F est VRAI *(1)* ***car :***
il suffit de prendre toujours y = x ! *(0.5)*
(Bien sûr pour toute autre explication aussi)

2/ F est-elle valide?Pourquoi ? ***La question est subsidiaire (en plus) !***

On ne peut rien dire sur la validité de F, car il faudrait voir toutes les structures (impossible). Il faudrait d'autres méthodes (exemple l'algorithme de Résolution) *(+1)*

C/ Donner la Forme Normale Prénexe (FNP) de la formule F suivante ***(2pts)*** *:*

$$F = (\exists y Q(x,y) \rightarrow \forall x P(x,a)) \lor \forall y \forall x\, (Q(x,y) \rightarrow P(x,b))$$

$F = (\urcorner(\exists y Q(x,y)) \lor \forall x P(x,a)) \lor \forall y \forall x\, (\urcorner Q(x,y) \lor P(x,b))$ **éliminer 1er '$\rightarrow$'** *(0,25)* **, 2ème '$\rightarrow$'** *(0,25)*

$F = (\forall y \urcorner Q(x,y) \lor \forall x P(x,a)) \lor \forall y \forall x\, (\urcorner Q(x,y) \lor P(x,b))$ **$\urcorner(\exists x A(x)) = \forall x \urcorner A(x)$** *(0,25)*

$F = \forall y \forall x\, (\urcorner Q(x,y) \lor P(x,a)) \lor \forall y \forall x\, (\urcorner Q(x,y) \lor P(x,b))$ **1er transport quantificateurs** *(0,25)*

$F = \forall y \forall x\, (\urcorner Q(x,y) \lor P(x,a)) \lor \forall w \forall z\, (\urcorner Q(z,w) \lor P(z,b))$ **renommage 2ème partie (ou 1ère partie) car($\forall x \lor \forall x$) et ($\forall y \lor \forall y$)** *(0,5)*

$F = \forall y \forall x \forall w\, \forall z\, [(\urcorner Q(x,y) \lor P(x,a)) \lor (\urcorner Q(z,w) \lor P(z,b))]$ **2ème transport quantificateurs: FNP***(0,5)*

Ce barème détaillé est juste indicatif, on peut modifier, exemple :

(0,5) éliminer les $\rightarrow$
(0,5) 1er transport des quantificateurs
(0,5) les 2 renommages de x et de y dans la 1ère ou la 2ème partie.
(0,5) 2ème transport des quantificateurs=FNP