TD N°2 Avec Solution
Logique des Propositions
Déduction Naturelle (Preuve Syntaxique)

Rappels :

Pour démontrer qu'une formule F est valide syntaxiquement en calcul des propositions, on montre que cette formule est **prouvable** ou **dérivable** en utilisant un système de déduction, et on note : $\vdash F$

On utilisera les axiomes d'**Hilbert,** de la logique booléenne suivants (il existe d'autres axiomes non cités), un axiome de la logique booléenne est n'importe quelle **instance** d'une des formules suivantes :

$(X1 \rightarrow (X2 \rightarrow X1))$	(axiome 1 pour l'implication)
$((X1 \rightarrow (X2 \rightarrow X3)) \rightarrow ((X1 \rightarrow X2) \rightarrow (X1 \rightarrow X3)))$	(axiome 2 pour l'implication)
$(X1 \rightarrow \neg\neg X1)$	(axiome 1 pour la négation)
$(\neg\neg X1 \rightarrow X1)$	(axiome 2 pour la négation)
$((X1 \rightarrow X2) \rightarrow (\neg X2 \rightarrow \neg X1))$	(axiome 3 pour la négation)
$(X1 \rightarrow (X2 \rightarrow (X1 \wedge X2)))$	(axiome 1 pour la conjonction)
$((X1 \wedge X2) \rightarrow X1)$	(axiome 2 pour la conjonction)
$((X1 \wedge X2) \rightarrow X2)$	(axiome 3 pour la conjonction)
$(X1 \rightarrow (X1 \vee X2))$	(axiome 1 pour la disjonction)
$(X2 \rightarrow (X1 \vee X2))$	(axiome 2 pour la disjonction)
$((((X1 \vee X2) \wedge (X1 \rightarrow C)) \wedge (X2 \rightarrow C)) \rightarrow C)$	(axiome 3 pour la disjonction)

Et ajouter le Modus Ponens (MP) , défini par :

Si A
Et $A \rightarrow B$
Donc B

Exercice1 :

P, Q, R, S sont des propositions. En utilisant les axiomes cités, prouvez que R est dérivable à partir de a) et b).

a) $P \rightarrow (\neg Q \rightarrow (R \wedge S))$
b) $P \wedge \neg Q$

C'est-à-dire Prouver: $P \rightarrow (\neg Q \rightarrow (R \wedge S)), P \wedge \neg Q \vdash R$ **?**

1 : $P \wedge \neg Q$	**Hypothèse2**
2 : $(P \wedge \neg Q) \rightarrow P$	**Axiome de '∧'**
3 : P	**MP de la ligne 1 avec la ligne 2**
4: $P \rightarrow (\neg Q \rightarrow (R \wedge S))$	**Hypothèse 1**
5: $(\neg Q \rightarrow (R \wedge S))$	**MP de 3 et 4**
6: $\neg Q$	**Axiome de '∧' à partir de la ligne 1**
7: $(R \wedge S)$	**MP de 6 et 5**
8: R	**Axiome de '∧' à partir de la ligne 7**

Remarque importante : Toutes les hypothèses doivent être utilisées dans la démonstration !

Exercice2 :

En utilisant les axiomes de la déduction d'Hilbert et le Modus Prouver encore l'assertion suivante avec A et B des propositions quelconques :

(a) $(A \to B), A \vdash A$?

1: A	**Hypothèse 2**
2 : $A \to ((A \to B) \to A)$	**Axiome1 de l'implication (X1:A, X2:(A→B))**
3 : $(A \to B) \to A$	**MP de 1 et 2**
4 : $A \to B$	**Hypothèse 1**
5 : A	**MP de 4 et 3**

(b) $(A \to (B \to C)), A, \neg C \vdash \neg B$?

1: $(A \to (B \to C))$	**Hypothèse1**
2 : A	**Hypothèse 2**
3 : $B \to C$	**MP de 2 et 1**
4 : $(B \to C) \to (\neg C \to \neg B)$	**Axiome de la négation**
5 : $(\neg C \to \neg B)$	**MP de 3 et 4**
6 : $\neg C$	**Hypothèse 3**
7: $\neg B$	**MP de 6 et 5**

(c) $\neg B \vdash B \to A$?

1: $\neg B$	**Hypothèse**
2 : $\neg B \to (\neg A \to \neg B)$	**Axiome1 de l'implication**
3 : $\neg A \to \neg B$	**MP de 1 et 2**
4 : $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$	**Axiome4 de la négation**
5 : $B \to A$	**MP de 3 et 4**

(d) $(A \to (B \to C)), A \wedge B \vdash C$?

1 : $A \to (B \to C)$	**Hypothèse1**
2 : $A \wedge B$	**Hypothèse2**
3 : $A \wedge B \to A$	**Axiome de '∧'**
4 : $A \wedge B \to B$	**Axiome de '∧'**
5 : A	**MP (2 et 3)**
6 : B	**MP (2 et 4)**
7 : $B \to C$	**MP (5 et 1)**
8 : C	**MP (6 et 7)**

<u>**Exercice3**</u> : **Changement de l'exercice !**

$(A \to B), \neg B \vdash \neg A$?

1. **$A \to B$** **hypothèse 1**

2. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow (A \rightarrow B))$ — **Axiome1 de l'implication ($X1 = (A \rightarrow B)$, $X2 = \neg B$)**
3. $\neg B \rightarrow (A \rightarrow B)$ — **MP 1. et 2.**
4. $\neg B$ — **Hypothèse 2**
5. $A \rightarrow B$ — **MP 4.et3.**
6. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ — **Axiome 1 de la négation**
7. $\neg B \rightarrow \neg A$ — **MP 5.et6.**
8. $\neg A$ — **MP 4.et7.**