Chapitre I. Le Calcul Propositionnel

I.1.Le langage des propositions et sa syntaxe

La syntaxe du langage des propositions consiste à donner un alphabet (un ensemble de symboles), et des règles de constructions syntaxiques d'expressions à partir de ces symboles.

I.1.1. Les symboles

L'alphabet est constitué:

- **des connecteurs** : $\rceil$, $\wedge$, $\vee$,$\rightarrow$,$\leftrightarrow$ qui se lisent respectivement non, et, ou, implique et équivalent.
- **des parenthèses** ( ), qui sont importantes car elles délimitent la fin des sous formules et parfois la priorité des connecteurs.
- **des atomes** appelés aussi propositions ou variables propositionnelles (ensemble infini dénombrable).
- **deux constantes** propositionnelles **V** (vrai) et **F** (faux).

I.1.2. Les formules bien formées

Les Formules Bien Formées (fbfs) sont des expressions bien formées définies comme suit:

- tout atome est une fbf, de même les constantes propositionnelles sont des fbf.
- si F et G sont des fbfs alors ($\rceil$G), (F $\wedge$ G), (F $\vee$ G), (F $\rightarrow$ G) et (F $\leftrightarrow$ G) sont des fbfs.
- toutes les fbfs sont obtenues par application des 2 règles ci-dessus.

Remarques importantes :

Remarque1 : Ordre de priorité des connecteurs :

- Dans certains ouvrages l'ordre de priorité des connecteurs est :

$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

La formule : $A \wedge \neg B \vee C \rightarrow D \wedge E$ doit se lire : $((A \wedge (\neg B)) \vee C) \rightarrow (D \wedge E)$

- Et dans certains ouvrages l'ordre de priorité des connecteurs est :

$\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$.

- Pour enlever cette ambiguïté : Les parenthèses sont toujours prioritaires, donc une formule sans parenthèses n'est pas une formules bien formée (sauf dans les remarques 2. et 3. ci-dessous).

Remarque2 : On omet par abus les parenthèses les plus externes $(A \wedge B)$ devient $A \wedge B$

Remarque3 : Quand il y a un seul connecteur, l'association se fait de gauche à droite. $A \rightarrow B \rightarrow C$ correspond à $((A \rightarrow B) \rightarrow C)$

Exemple :

Déterminer si les formules suivantes sont des fbfs, où A, B, C, D sont des sous formules qui sont déjà des fbfs :

a) $((A \vee (\neg B)) \wedge (C \vee D))$: est une fbf.
b) $(A \vee B) (\wedge \vee C)$: n'est pas une fbf.

I.1.3. Calcul propositionnel

Le calcul propositionnel est défini par le système formel suivant :

- Les symboles définis au paragraphe § I.1.1.
- Les formules bien formées définies au paragraphe § I.1.2.
- Et les axiomes suivants :

1) $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$

2) $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$

3) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

- La règle d'inférence : le Modus Ponens : A, A→B ├ B

Tout système repose sur des axiomes pouvant s'interpréter comme corrects, et on obtient différentes théories en changeant les axiomes.

I.1.4.Déduction:

On appelle **déduction à partir de H1, H2...Hn,** toute suite finie de formules F1, F2,...Fp telles que pour tout i élément de {1,2 ..,p} :

a) Fi est un axiome
b) Ou bien, Fi est l'une des formules H1, H2, ..., Hn
c) Ou bien, Fi est obtenue par application d'une règle rk élément de RS à partir des Formules Fi0, Fi1, ..., Fil placées avant Fi (dans la démonstration)

S étant le système formel, on appelle **théorème**, toute formule t pour laquelle il existe une déduction à partir de l'ensemble vide. **Noté :** $\vdash \mathbf{S}^{\mathbf{t}}$

Une déduction à partir de l'ensemble vide est appelée **déduction ou démonstration** ; il s'agit d'une suite de formules F1 ... Fp telles que pour tout i élément de {1,2,...p} :

a) Fi est un axiome ou
b) Fi0, Fi1,...Fip ├ Modus Ponens Fi

Cette formule se lit Fi se déduit à partir des fbfs Fi0, Fi1,...Fip grâce à la règle d'inférence du modus ponens.

Démontrer un théorème consiste à utiliser une procédure de démonstration qui elle-même utilise des règles d'inférences. **C'est une activité syntaxique indépendante du sens des expressions**.

I.2.Le langage des propositions et sa sémantique

La sémantique attribue une signification aux expressions. La signification d'une formule est fonction de celle de ses constituants.

I.2.1. Notion d'Interprétation

Une **interprétation** du calcul propositionnel consiste à donner :

1. Un domaine sémantique non vide D
2. Une valuation des atomes dans D
3. Une définition des connecteurs par des applications de D dans D pour $\rceil$ et de D*D dans D pour : $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

L'Interprétation classique de la logique des propositions pour lequel D = {V, F} Tout atome est vrai ou faux mais pas les deux à la fois.

I.2.2. Les Tables de Vérité:

On définit les tables de vérité des connecteurs. Soient A et B des propositions ou des fbfs, les tables sont définies comme suit :

A	**B**	**¬A**	**¬B**	**A∧B**	**A∨B**	**A→B**	**A↔B**
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V	F
F	F	V	V	F	F	V	V

Pour une fbf G composée de différents atomes : A1...An, une interprétation de G est une assignation des valeurs de vérité à A1...An**.**

G comporte n atomes ► 2^n interprétations possibles

Exemple :

Soit La formule $G = (A \vee B) \wedge C$

► 8 interprétations possibles

A	**B**	**C**	**G**
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

Une fbf G est vraie (respectivement fausse) dans une interprétation i si la valeur de G est vraie (respectivement fausse)
On écrit $i[G] = V$ (respectivement $i[G]= F$)

Une interprétation qui rend vraie une formule est un **modèle** de cette formule. On dit qu'une interprétation i est un modèle d'une formule F si la valeur de F selon l'interprétation i est vraie : $i[F] = V$ dans ce cas on note $i \models F$.

On dit que i est un modèle d'un ensemble de formules E si i est modèle de tout élément de E

Exemple :

Soit la formule G : $(P \rightarrow (Q \vee (\neg R)))$

Notation i1([P]) peut s'écrire i1[P] et se lit valeur de P selon l'interprétation i1. Soit i1 telle que:

i1[P] = i1[R] = V

i1[Q] = F

► La formule G est fausse dans i1.

Soit I2 telle que:

i2[P] = i2[R] = F i2[Q] = V

► La formule G est vraie dans i2

I.2.3.Les Théorèmes d'équivalence (lois)

Définition :

Deux fbfs F et G sont **équivalentes** si et seulement si les valeurs de vérité de F et de G sont les mêmes dans toute interprétation.

Si F $\models$ G et G $\models$ F, on écrit alors F ≡ G, le symbole "≡" se lit "est équivalent à".

Soient A, B et C des formules bien formées :

1. Implication matérielle
   $A \rightarrow B \cong \neg A \vee B$
2. Equivalence matérielle
   $A \leftrightarrow B \cong (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
3. Commutativité
   a) $A \vee B \cong B \vee A$
   b) $A \wedge B \cong B \wedge A$
4. Associativité
   a) $(A \vee B) \vee C \cong A \vee (B \vee C)$
   b) $(A \wedge B) \wedge C \cong A \wedge (B \wedge C)$
5. Distributivité
   a) $A \vee (B \wedge C) \cong (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
   b) $A \wedge (B \vee C) \cong (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

6. a) $A \vee V \cong V$
   b) $A \wedge V \cong A$

7. a) $A \vee F \cong A$
   b) $A \wedge F \cong F$

8. Complémentarité
   a) $A \vee \neg A \cong V$
   b) $A \wedge \neg A \cong F$

9. Involution
   $(\neg(\neg A)) \cong A$

10. Lois de de Morgan
    a) $\neg(A \vee B) \cong (\neg A) \wedge (\neg B)$
    b) $\neg(A \wedge B) \cong (\neg A) \vee (\neg B)$

11. a) $A \vee ((\neg A) \wedge B) \cong A \vee B$
    b) $A \wedge ((\neg A) \vee B) \cong A \wedge B$

12. Identité
    a) $A \wedge A \cong A$
    b) $A \vee A \cong A$

On peut démontrer que ces formules sont équivalentes en montrant qu'elles ont les mêmes valeurs dans toutes les interprétations. Un moyen est donc de construire leur table de vérité.

On peut utiliser ces théorèmes d'équivalence pour transformer une formule bien formée en une autre formule bien formée qui lui est équivalente.

Cela va permettre de simplifier l'écriture de formules bien formées.

Exemple :

Développer la négation en appliquant les lois de De Morgan (à faire en séances de TD).

a) $(\neg(A \wedge (B \vee C)))$

b) $(\neg[(\neg(A \wedge B) \vee (\neg D)) \wedge E \vee F]$

c) $(\rceil((\rceil A) \wedge B \wedge ((\rceil C) \vee D) \vee (\rceil E) \wedge F \wedge (\rceil G)))$

d) $(\rceil(A \vee (\rceil B) \vee C) \wedge ([\rceil(\rceil D)] \vee (\rceil E)) \vee (\rceil F) \wedge G)$

I.3.Notions de validité, inconsistance, conséquence logique, complétude et correction

I.3.1.Formule valide

Une fbf A est une **tautologie** (valide) si et seulement si elle est vraie dans toute interprétation.

On écrit alors : $\models A$

Ex : $\rceil A \vee A$ est une formule valide

Une fbf est **invalide** si et seulement si elle n'est pas valide.

Ex : $A \wedge B$ et $A \vee B$ sont deux formules invalides il suffit que A et B soient fausses

I.3.2.Formule inconsistante

Une fbf est **inconsistante** ou in-satisfiable si et seulement si elle est fausse dans toute interprétation.

Ex : $\rceil A \wedge A$ est une formule inconsistante

Une fbf A est **consistante** ou satisfiable :

- si et seulement si elle n'est pas inconsistante
- si il existe une interprétation i telle que $i[A] = V$
- si elle admet un modèle

Ex : $A \wedge B$ et $A \vee B$ sont deux formules consistantes il suffit que A et B soient vraies.

I.3.3.Conséquence logique

A est une **conséquence logique** de E si et seulement si toutes les interprétations qui rendent vraies toutes les formules de E rendent vraie la formule A.

On écrit alors $E \models A$

On dit qu'une formule C est une conséquence logique de H1.. Hn :

- Si et seulement si tout modèle de H1... Hn est un modèle de C.
- Si et seulement si $H1 \wedge H2 \wedge ... \wedge Hn \rightarrow C$ est valide.

Dans ce contexte les formules H_i sont les hypothèses et C est la conclusion.

I.3.4. Complétude et correction

a/ Théorème de complétude du calcul propositionnel :

Pour toute formule A si $\models A$ alors $\vdash A$

Autrement dit : Toutes les tautologies sont des théorèmes.

b/ Théorème de correction du calcul propositionnel :

Pour toute formule A si $\vdash A$ alors $\models A$

Autrement dit : Tous les théorèmes sont des tautologies

I.3.5. Conclusion

En conclusion, on peut dire qu'il existe deux façons de valider une formule P du calcul des propositions :

- ou bien on montre que cette formule est vraie dans tout modèle (aspect sémantique, voir ci-dessus). On dit alors que P est une **tautologie**, et on note $\models$ P.

- ou bien on montre que cette formule est **prouvable** ou **dérivable** en utilisant un système de déduction, et on note $\vdash$P.

Un système de déduction correct doit être construit de façon que, à partir de formules vraies (tautologies), on puisse déduire d'autres formules vraies. Dans ce cas, si $\vdash$ P est vérifié, alors $\models$P l'est également.

Le système de déduction sera complet, si inversement, il permet de déduire toute formule vraie. Autrement dit, si $\models$ P est vérifié, le système de déduction doit permettre de démontrer qu'on a également $\vdash$P.

Le théorème de complétude du calcul des propositions énonce que les systèmes de déduction, décrits dans les articles calcul des propositions ou déduction naturelle (ou calcul des séquents), sont complets. Il y a équivalence entre être une tautologie et être prouvable.

I.4.Déduction Naturelle

I.4.1. Axiomes de la logique booléenne (axiomes de Hilbert)

Un axiome de la logique booléenne est n'importe quelle instance d'une des formules suivantes :

1. $(X1 \rightarrow (X2 \rightarrow X1))$ (axiome 1 pour l'implication) ;
2. $((X1 \rightarrow (X2 \rightarrow X3)) \rightarrow ((X1 \rightarrow X2) \rightarrow (X1 \rightarrow X3)))$ (axiome 2 pour l'implication) ;
3. $(X1 \rightarrow \neg\neg X1)$ (axiome 1 pour la négation) ;
4. $(\neg\neg X1 \rightarrow X1)$ (axiome 2 pour la négation) ;
5. $((X1 \rightarrow X2) \rightarrow (\neg X2 \rightarrow \neg X1))$ (axiome 3 pour la négation) ;
6. $(X1 \rightarrow (X2 \rightarrow (X1 \wedge X2)))$ (axiome 1 pour la conjonction) ;
7. $((X1 \wedge X2) \rightarrow X1)$ (axiome 2 pour la conjonction) ;
8. $((X1 \wedge X2) \rightarrow X2)$ (axiome 3 pour la conjonction) ;

9. $(X1 \rightarrow (X1 \vee X2))$ (axiome 1 pour la disjonction) ;
10. $(X2 \rightarrow (X1 \vee X2))$ (axiome 2 pour la disjonction) ;
11. $((((X1 \vee X2) \wedge (X1 \rightarrow C)) \wedge (X2 \rightarrow C)) \rightarrow C)$ (axiome 3 pour la disjonction);

I.4.2. Exemples de déductions

Exemple1 :

Soit F, G, H trois formules propositionnelles.

Voici une preuve de $(F \rightarrow H)$ à partir de $\{(F \rightarrow G); (G \rightarrow H)\}$, ou Autrement dit, on veut prouver que :

$$(F \rightarrow G), (G \rightarrow H) \vdash (F \rightarrow H)$$

– F1 : $(G \rightarrow H)$ (hypothèse) ;

– F2 : $((G \rightarrow H) \rightarrow (F \rightarrow (G \rightarrow H)))$ (instance de l'axiome 1.;

– F3 : $(F \rightarrow (G \rightarrow H))$ (Modus Ponens à partir de F1 et F2) ;

– F4 : $((F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H)))$ (instance de l'axiome 2.;

– F5 : $((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H))$ (Modus Ponens à partir de F3 et F4) ;

– F6 : $(F \rightarrow G)$ (hypothèse) ;

– F7 : $(F \rightarrow H)$ (Modus Ponens à partir de F6 et F5).

Exemple 2 :(à faire en séance de TDs)

En utilisant les axiomes de la déduction d'Hilbert et le Modus, prouver les assertions suivantes (A et B des propositions quelconques):

(a) $(A \rightarrow B), A \vdash A$
(b) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)), A, \urcorner C \vdash \urcorner B$
(c) $\neg B \vdash B \rightarrow A$
(d) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)), A \wedge B \vdash C$
(e) $A, A \rightarrow B, A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash C.$
(f) $\vdash A \rightarrow A.$

I.5.Formalisation ou Représentation des connaissances

La représentation des connaissances consiste à faire une correspondance entre le monde extérieur et un système symbolique manipulable par un ordinateur. En d'autres termes, il s'agit de représenter les énoncés (assertions) par des formules.

REPRESENTER = FORMALISER + RAISONNER

Le sens des connecteurs ne veulent pas dire exactement la même chose que ceux du langage naturel. La capacité d'expression dans la représentation de la connaissance en logique des propositions est beaucoup moins riche qu'en langage naturel. Mais toutefois les connecteurs logique ont des correspondances ou "équivalents" dans la langue naturelle.

I.5.1. La conjonction

$P \wedge Q$ peut se traduire :

- P et Q
- Q et P
- à la fois P et Q
- P, Q
- P bien que Q
- P quoique Q
- P mais Q (sous-entendu mais aussi)
- Non seulement P mais Q
- P et pourtant Q
- P tandis que Q

I.5.2.La disjonction

$P \vee Q$ peut se traduire :

- P ou Q
- ou P ou Q
- ou bien P ou bien Q
- soit P soit Q

- P à moins que Q
- P sauf si Q
- P ou Q ou les deux (OU inclusif)

I.5.3.Le conditionnel

$P \rightarrow Q$ peut traduire :

- si P alors Q
- P condition suffisante de Q
- Q condition nécessaire de P
- P alors Q
- Q si P
- Q lorsque P
- P seulement si Q
- Q pourvu que P
- ...

I.5.4.L'équivalence

$P \leftrightarrow Q$ peut se traduire :

- P si et seulement si Q
- P si Q et Q si P
- P condition nécessaire et suffisante de Q
- ...

I.5.5. Conclusion

Les ressemblances entre les connecteurs logiques et ceux de la langue naturelle sont limitées :

Ex : Il mange ou il dort et il dort ou il mange semblent synonymes.

Par contre :

Ex : Il a faim et il mange n'est pas semblable à il mange et il a faim car le "et" a une connotation de causalité et de temps.

Ex : La porte est ouverte ou la porte est fermée. Le "ou" du français est parfois exclusif.

On peut dire que la traduction est en général liée au contexte. Il peut aussi exister plusieurs traductions possibles.

Par exemple soit à traduire le groupes de phrases suivantes :

1. Djamel et Zino prennent le café et Youcef fait de même.
2. Djamel prends le café, et Zino ou Youcef aussi.
3. Djamel et Zino ont dîné tous les deux, ou bien Djamel et Youcef prennent le café
4. Djamel a dîné, ainsi que Youcef ou Zino.
5. Zino étudie bien si et seulement si, il n'est pas fatigué.

D'abord, il faut constituer l'univers du discours c'est-à-dire on va d'abord rechercher dans le texte toutes les propositions dont on a besoin. Ce qui donne pour l'exemple l'univers du discours suivant :

J : Djamel prend le café.
P : Zino prend le café.
G : Youcef prend le café.
D : Djamel a dîné.
E : Youcef a dîné.
F : Zino a dîné.
ETUDIE : Zino étudie bien.
FATIGUE : Zino est fatigué.

Ensuite, pour chacune des phrases je vais écrire une formule bien formée à l'aide des propositions définies ci-dessus, des connecteurs et des parenthèses.

1. Djamel et Zino prirent le café et Youcef fit de même.
   $\mathbf{J \wedge P \wedge G}$
2. Djamel prit le café, et Zino ou Youcef aussi.

$J \wedge (P \vee G)$

3. Djamel et Zino ont dîné tous les deux, ou bien Djamel et Youcef prirent le café
$(D \wedge F) \vee (J \wedge G)$

4. Djamel a dîné, ainsi que Youcef ou Zino
$D \wedge (E \vee F)$

5. Zino étudie bien si et seulement si il n'est pas fatigué
$ETUDIE \leftrightarrow \neg FATIGUE$

Des exercices de traduction plus détaillés doivent être donnés en séances de TDs.