Chapitre II. Les Preuves en logique propositionnelle

II.1.Introduction

Comme nous l'avons dit au chapitre I, la logique consiste à étudier la validité des raisonnements. Un **raisonnement** (ou inférence) est le passage de l'assertion d'une proposition ou d'un groupe de propositions (**prémisses**) à l'assertion d'une autre proposition (**conclusion**). On va s'intéresser à montrer que les raisonnements sont valides.

II.2.Preuve par les tables de vérité, ou la méthode des tableaux matriciels

La preuve par la méthode des tableaux matriciels permet de manière mécanique de dire si une formule est valide, consistante, inconsistante ou invalide.

- Une fbf peut être à la fois invalide et consistante.
- G est valide si et seulement si ($\neg$G) est inconsistante.
- G est valide implique que G est consistante.
- G est inconsistante implique que G est invalide.
- Il existe une procédure effective pour déterminer si une fbf est valide: la table de vérité.

Pour construire la table de vérité :

- on peut décomposer la formule en sous-formules en procédant de l'intérieur vers l'extérieur.
- on fait une colonne par atomes présents dans la formule, une colonne par sous-formule et une

pour la formule.

- pour N atomes dans la formule on a 2^n interprétations possibles et donc 2^n lignes.

On applique sur chaque sous-formule les tables de vérité des connecteurs.

Exemples :

1-Montrer que : $(P \rightarrow (Q \rightarrow P))$ est valide

P	**Q**	**$Q \rightarrow P$**	**$P \rightarrow (Q \rightarrow P)$**
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

La fbf est vraie selon toutes les interprétations donc elle est **valide**

2-Montrer que : $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$ n'est pas valide

P	**Q**	**$P \vee \neg Q$**	**$\neg P \vee Q$**	**$(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$**
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V

Il existe **une interprétation** dans laquelle la formule est vraie elle est donc **consistante.**

Il existe **une interprétation** dans laquelle la formule est fausse elle est donc **invalide.**

Remarquez qu'il n'est pas nécessaire de calculer la valeur de vérité pour toutes les interprétations (de remplir toutes les lignes de la table de vérité). Tant qu'on obtient que des vrais (respectivement que des faux), il faut calculer l'interprétation suivante, mais dès qu'on obtient un faux (respectivement un vrai) on s'arrête. En effet un vrai suffit pour prouver qu'une formule est consistante et un faux suffit pour prouver qu'elle est invalide.

Exercice :

Que pouvez-vous conclure sur les formules bien formées suivantes en utilisant les tables de vérité ? (à faire en séances de TD).

a) $(P \to Q) \to ((P \to \urcorner Q) \to \urcorner P)$
b) $P \to (Q \to (P \wedge Q))$
c) $(((P \wedge Q) \to R) \wedge (P \to Q)) \to (P \to R)$
d) $\urcorner P \vee (\urcorner(P \to Q))$
e) $(P \to Q) \to (\urcorner Q \to \urcorner P)$
f) $P \wedge \urcorner(P \wedge \urcorner Q) \wedge (Q \vee R)$

MAIS cette méthode a un gros inconvénient : elle demande d'examiner exhaustivement toutes les évaluations booléennes possibles et ce nombre d'évaluations croît très rapidement. En effet, pour une formule bien formée de 5 variables propositionnelles on aura 32 interprétations et donc 32 lignes à remplir. Son encombrement croît exponentiellement avec le nombre d'atomes. De plus, elle est à peu près limitée au calcul des propositions, il est difficile de l'étendre aux autres logiques.

II.3.Preuve par les lois d'équivalence

Chacun des théorèmes d'équivalence (ou loi d'équivalence) permet un acte d'inférence. Une autre manière de prouver qu'une formule bien formée est valide (respectivement inconsistante) consiste à raisonner en utilisant les lois d'équivalence. Un objectif est alors de montrer par équivalence que la formule bien formée de départ est équivalente à V (respectivement à F).

Exemple :

$(P \rightarrow (Q \rightarrow P)) \equiv (P \rightarrow (\neg Q \vee P))$	loi 1
$\equiv (\neg P \vee (\neg Q \vee P))$	loi 1
$\equiv (\neg P \vee (P \vee \neg Q))$	loi 3
$\equiv (\neg P \vee P) \vee \neg Q$	loi 4
$\equiv V \vee \neg Q$	loi 8
$\equiv V$	loi 6

La fbf est toujours vraie donc elle est **valide**

Exercice :

Que pouvez-vous conclure sur la formule bien formée en utilisant les théorèmes d'équivalence vus au chapitre I ? (à faire en séances de TDs).

a) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg P)$

b) $P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q))$

c) $(((P \wedge Q) \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

d) $\neg P \wedge (\neg(P \rightarrow Q))$

e) $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$

f) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

g) $P \wedge \neg(P \wedge \neg Q) \wedge (Q \vee R)$

II.4.Formes normales pour la preuve par Résolution

Les formes normales d'une formule bien formée permettent d'écrire la formule de départ sous une forme donnée.

II.4.1. Quelques définitions

- Un littéral est un atome ou la négation d'un atome.
- Une fbf est mise sous **forme normale conjonctive** (fnc) si et seulement si elle est de la forme :

  $$F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn$$

  Où chaque Fi est une disjonction de littéraux
- Une fbf est mise sous forme **normale disjonctive** (fnd) si et seulement si elle est de la forme :

  $$F1 \vee F2 \vee \ldots \vee Fn$$

  Où chaque Fi est une conjonction de littéraux

II.4.2. Exemples de formes normales

$(A \vee B) \wedge ((\neg C) \vee A)$, représente une forme normale conjonctive

$(A \wedge D) \vee (A \wedge B)$, représente une forme normale disjonctive

Il faut noter que si la formule est un littéral il est à la fois sous forme normale disjonctive et conjonctive

Pour toute formule F du calcul des propositions il existe une forme normale conjonctive FNC et une forme normale disjonctive FND telles que:

$\vdash F \leftrightarrow FNC$ et $\vdash F \leftrightarrow FND$

Comment faire pour transformer une fbf en forme normale conjonctive ou disjonctive ?

Pour mettre une fbf sous forme normale conjonctive (respectivement disjonctive) :

1. On élimine les connecteurs $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ en utilisant les théorèmes sur l'implication matérielle et l'équivalence matérielle.
2. On développe le $\rceil$ en utilisant les lois de De Morgan et on élimine les $\rceil\rceil$ par l'involution.
3. On regroupe les $\vee$ (respectivement les $\wedge$) par la distributivité.

Exemple :

$(A \wedge \rceil(B \vee \rceil C) \rightarrow (\rceil B \rightarrow (A \wedge B))$

On élimine les $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$

$\equiv \rceil(A \wedge \rceil(B \vee \rceil C) \vee (\rceil\rceil B \vee (A \wedge B))$

On développe le $\rceil$ et on élimine les $\rceil\rceil$

$\equiv \rceil A \vee \rceil\rceil(B \vee \rceil C) \vee (B \vee (A \wedge B))$

$\equiv \rceil A \vee (B \vee \rceil C) \vee (B \vee (A \wedge B))$

On regroupe les $\vee$

$\equiv \rceil A \vee B \vee \rceil C \vee B \vee (A \wedge B))$

$\equiv \rceil A \vee B \vee \rceil C \vee B \vee A) \wedge \rceil A \vee B \vee \rceil C \vee B \vee B)$

On obtient une forme normale conjonctive équivalente à la formule bien formée de départ.

Exercice :

. A faire en séances de TDs

1) Mettre sous forme normale disjonctive :

a) $P \rightarrow ((Q \wedge R) \rightarrow S)$

b) $(\rceil P \wedge Q) \rightarrow (R \vee S)$

2) Mettre sous forme normale conjonctive :

a) $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

b) $\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \wedge Q)$

II.5. Preuve par le principe de Résolution

II.5.1.Système de preuves par résolution

Le principe de résolution est une méthode automatique pour montrer la validité d'une formule. Nous allons voir les notions de clauses et de résolvant avant d'aborder le principe de résolution.

II.5.2.Notion de clause

Une **clause** est une fbf qui a la forme d'une disjonction de littéraux.
Cas particulier : un littéral isolé est une clause.

Exemple de clauses :

$A \vee B \vee C \vee D$	est une clause
$\neg D$	est une clause

Comment obtenir à partir d'une formule bien formée un ensemble de clauses?
Il faut d'abord transformer la formule en sa forme normale conjonctive et ensuite éliminer les connecteurs « $\wedge$ ». On obtient ainsi un ensemble S de clauses.

II.5.3.Clause résolvante

Si C1 et C2 sont 2 clauses et si $L1 = \neg L2$ et L1 est dans C1 et L2 est dans C2,

« C » est la disjonction des clauses restantes après suppression des littéraux L1 et L2.

Elle est appelée **clause résolvante**, ou résolvant de C1 et de C2.

On note **Résolvante (C1,C2) = C**, où L1 et L2 sont les **littéraux résolus**.

Exemples :

Soient C1 et C2 les deux clauses suivantes :
$C1 = E1 \vee E2$
$C2 = \neg E2 \vee E3$

Le résolvant de **C1** et de **C2** est **C : Résolvante (C1,C2)= $E1 \vee E3$ = C3**

Soient C1 et C2 les deux clauses suivantes :
$C1 = P$
$C2 = \neg P$

Le résolvant de **C1** et de **C2** est **C3** : $\varnothing$ **C'est la clause vide**

La clause Faux est notée $\varnothing$ c'est la **clause vide**

Le résolvant C de deux clauses C1 et C2 est une conséquence logique de C1 et de C2

Exercice 1

Trouver la clause résolvante dans les cas suivants : (à faire en séances de TDs)

a) $C1 = \neg Q \vee P$ $\quad$ $C2 = R \vee \neg P \vee S$

b) $C1 = \neg Q \vee P$ $\quad$ $C2 = Q$

c) $C1 = \neg P \vee \neg Q$ $\quad$ $C2 = P \vee S \vee \neg R$

d) $C1 = P \vee Q$ $\quad$ $C2 = R \vee P$

II.5.4.Algorithme de résolution

On appelle **déduction** (ou résolution) d'une clause C à partir d'un ensemble de clauses S, où S est égale à une séquence finie R1, R2,... Rn = C de clauses telle que chaque Ri est:

soit une clause de S

soit un résolvant de clauses le précédant

$S = \{R \vee Q, \neg R, \neg Q \vee P, \neg P \vee R\}$
$R1 = R \vee Q$

S'il existe une déduction de la clause vide à partir de S alors S est in-satisfiable

On appelle **réfutation** la déduction de la clause vide Ø à partir de S.

Montrer qu'une formule bien formée **F est valide** consiste :

- à montrer que $\neg F$ est inconsistante.
- à montrer que $S_{\neg F}$ est in-satisfiable.
- Ou qu'il existe une déduction de la clause vide Ø

Algorithme de Résolution :

Début
Ecrire la négation de F ;
Mettre F sous forme d'un ensemble de clauses ;
Tant que la clause vide n'est pas rencontrée et qu'il existe des paires réductibles **faire**
Début
Chercher des clauses résolvantes ;
Ajouter ce résultat à la liste des clauses ;
Fintantque ;
Si on trouve la clause vide **alors** F est valide
sinon F est invalide
Finsi ;
Fin ;

II.5.5.Exemples

Exemple 1

Soit un ensemble S de clauses défini par:

$S_{\neg F} = \{\neg P \vee \neg Q \vee R, \neg R, P, \neg T \vee Q, T\}$

Les clauses seront :

$C1 = \neg P \vee \neg Q \vee R$ $C2 = \neg R$

$C3 = P$ $C4 = \neg T \vee Q$ $C5 = T$

$S_{\neg F}$ est l'ensemble des clauses d'une fbf $\neg F$.

Montrons que cet ensemble est in-satisfiable (inconsistant) :

Résolvante (C1,C2) = $\neg P \vee \neg Q$ = C6

Résolvante (C6,C3) = $\neg Q$ = C7

Résolvante (C7,C4) = $\neg T$ = C8

Résolvante (C8,C5) = Ø = C9

A partir de l'ensemble des clauses de la fbf $\neg F$ on a déduit la clause vide. Donc on peut conclure que **$\neg F$ est inconsistante,** et donc que **F est valide**.

Exemple 2

Soit $S_{\neg F} = \{P \vee Q, \neg Q \vee T, \neg T \vee R, \neg R, \neg P \vee R, Q \vee S, P \vee S\}$

$C1 = P \vee Q$

$C2 = \neg Q \vee T$

$C3 = \neg T \vee R$

$C4 = \neg R$

$C5 = \neg P \vee R$

$C6 = Q \vee S$

$C7 = P \vee S$

$S_{\neg F}$ est l'ensemble des clauses d'une fbf $\neg F$.

Montrons que cet ensemble est in-satisfiable

Résolvante (C1,C2) = $P \vee T$= C8

Résolvante (C8,C3) = $P \vee R$= C9

Résolvante (C9,C4) = P = C10

Résolvante (C10,C5) =R= C11

Résolvante (C11,C4) = Ø

A partir de l'ensemble des clauses de la fbf $\neg F$ on a déduit la clause vide, donc on peut conclure que **$\neg$F est in-satisfiable,** et donc que **F est valide**.

Mais on aurait pu aussi trouver la déduction suivante :

Résolvante (C5,C4) = $\neg P$ = C8

Résolvante (C8,C1) = Q = C9

Résolvante (C9,C2) = T = C10

Résolvante (C10,C3) =R= C11

Résolvante (C11,C4) = Ø

Remarques importantes:

1) Remarquons qu'une clause peut être utilisée plusieurs fois, et que des clauses peuvent ne pas être utilisées pour déduire la clause vide.
2) On effectue une seule résolution à la fois, c'est-à-dire si on a :

   C1= $P \vee Q$

   C2= $\neg P \vee \neg Q$

   Soit Résolvante (C1,C2) = $P \vee \neg P$, si on veut éliminer Q et $\neg Q$

   Soit Résolvante (C1,C2) = $Q \vee \neg Q$, si on veut éliminer P et $\neg P$

   Mais pas Résolvante (C1,C2) = Ø

Exercice 2

En utilisant le principe de Réfutation, montrer dans les cas suivants que F est valide :
(à faire en séances de TDs)

a) $((P \rightarrow Q) \wedge (P \vee R)) \rightarrow (Q \vee R)$

b) $((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \rightarrow (Q \wedge R)$

c) $((P \rightarrow Q) \rightarrow (R \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow P))$