Chapitre III. Introduction Générale à la logique des Prédicats

III.1. Vers la logique des Prédicats: Les limites des propositions

La logique des propositions est limitée ; en effet dès que l'on veut manipuler des propriétés générales un peu complexes, des relations entre des objets, on peut aussi avoir besoin de quantifier en exprimant "Tous les hommes sont mortels". Rien ne nous permet de faire cela dans la logique des propositions.

Exemple :

Si l'on souhaite exprimer que **"Socrate est un homme"**, on a la possibilité de donner la proposition suivante : **SOCRATE_HOMME**.
Si maintenant on souhaite exprimer que **"Platon est un homme"**, on a la proposition **PLATON_HOMME**.
On se trouve avec deux assertions distinctes et aucune similitude entre Socrate et Platon.
On souhaiterait une meilleure représentation qui nous permettrait de dire que Socrate et Platon sont tous les deux des hommes dans le genre :

HOMME(Socrate), HOMME(Platon)

Le prédicat est le concept qui résout ce problème. Il exprime une relation dans un contexte.

Exemples :

1/ "Quelqu'un a chanté quelque chose "
On peut définir le prédicat : **CHANTE** avec deux arguments ou termes : celui qui chante et ce qu'il chante

CHANTE (AbdelkrimDali,aid)

Qui veut dire en langage naturel :

AbdelkrimDali a chanté l'Aid.

Le Prédicat CHANTE possède 2 arguments.

Aussi, **le calcul des prédicats possède la notion de fonction** qu'on peut déjà illustrer par cet exemple :

2/ "Le frère de Youcef travaille avec le frère de Djamel" peut se traduire par le prédicat **TRAVAILLER** avec deux arguments et par le symbole de fonction **frère :**

TRAVAILLER (frère(Youcef),frère(Djamel))

III.2.Introduction de la logique des Prédicats

Nous allons voir de plus prés comment introduire les Prédicats, à partir du raisonnement classique suivant :

Tout homme est mortel;
Socrate est un homme;
Donc Socrate est mortel.

Dans la logique des propositions (une proposition est une phrase, un énoncé), la formulation est:

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

Où p, q, r sont les propositions telles que:

p : tout homme est mortel

q : Socrate est un homme

r : Socrate est mortel

Ce raisonnement est valide mais il échappe à la logique des propositions, cette dernière ne permet pas de déclarer correct ce raisonnement car elle modélise comme un tout les propositions et les connecteurs. Ainsi, il n'y a pas de notions d'énoncé singulier, ex: Socrate est mortel et d'énoncé générique, ex: Tout être humain est mortel. Par contre, en logique de prédicats, nous avons cette notion d'énoncé singulier et d'énoncé générique qui se base sur d'autres notions, à savoir, les **objets** ou les **individus** et leurs désignateurs : les **constantes** et les **variables**, les **propriétés** d'objets (ex: ***mortalité***), les **relations** entre les objets (ex: Ahmed ***est le père*** d'Ali) appelées **prédicats** et les **quantificateurs.**

La logique des prédicats est plus riche, elle introduit :

- La notion d'objets ou d'individus comme des constantes ou des variables:
  ex: une variable x: homme et une constante a:Socrate.
- La notion de propriété d'objet et relation entre objets qui sont les prédicats:
  ex: Homme(x) ou autrement H(x) tel que H(x): x est un homme
  Mortel(x) ou M(x): x est mortel
  Où Homme, H, Mortel et M sont les prédicats.
- La notion de Quantificateurs
  ex: tout homme, donc quelque soit x, x.

Ainsi, en logique des prédicats, le raisonnement précédant devient:

Tout homme est mortel;	$\forall$ **x ((Homme(x) → Mortel(x))**
Socrate est un homme;	**Homme(Socrate)**
Donc Socrate est mortel.	**Mortel(Socrate)**

Et la formulation avec les connecteurs devient :

$$\forall x\ ((\text{Homme}(x) \rightarrow \text{Mortel}(x)) \wedge \text{Homme (Socrate)}) \longrightarrow \text{Mortel(Socrate)}$$

Ou encore

$$\forall\ x\ ((H(x) \rightarrow M(x)) \wedge H(a)) \longrightarrow M(a)$$

Où

H(x): x est un homme

M(x): x est mortel

x: variable et a:constante a: Socrate

Nous verrons par la suite les définitions en détail.

III.3.Description de la Logique des Prédicats

L'étude de la logique des prédicats comme un formalisme de représentation des connaissances et comprends 3 aspects:

1- L'aspect **syntaxique**: formules du langage

Comment écrire une formule? (on parlera de formules bien formées)

2- L'aspect **sémantique**: **Interprétation** & Théorie des modèles

Comment déterminer la valeur de vérité d'une formule? (on donnera une valeur « vrai ou faux » à une formule)

3- L'aspect raisonnement ou **déductifs**: **Déduction** et Théorie de preuves.

Comment démontrer de nouveaux résultats?

1. Le premier aspect concerne la définition de la syntaxe correcte des formules (dites formules bien formées) qui vont nous permettre d'écrire les phrases ou énoncés concernant les faits du monde réel.

2. Le deuxième aspect concerne le calcul des valeurs de vérité des formules qui représentent ces faits, en se basent sur l'interprétation des différents éléments constituant ces formules. On parlera de validité (formule vraie pour toutes les interprétations) et de consistance (formule vraie pour une interprétation) des formules.

Exemples:

Soit $x \in X$, X est l'univers des hommes et P le prédicat dont l'interprétation est "être mortel"

$\forall x\ P(x)$ est une formule vraie.

Soit $x \in X$, X est l'univers des hommes et P le prédicat dont l'interprétation est "être grec"

$\forall x\ P(x)$ est une formule fausse.

Soit $x \in X$, X est l'univers des entiers et P le prédicat dont l'interprétation est "$x < 0$ "

$\forall x\ P(x)$ est une formule fausse.

3. Enfin, l'objectif de la théorie de la preuve est de donner une caractérisation finie des formules valides, en se basant sur un (petit) ensemble de `vérités premières' : les axiomes, et un (petit) ensemble de règles permettant de produire toutes les vérités : les règles d'inférence.

Exemple:

Pour donner la preuve de la formule $(\forall x\ P(x)) \rightarrow (\exists x\ P(x))$, c'est dire prouver qu'elle est valide, on peut utiliser entre autre:

a-Un axiome: $\forall x\ A\ \ (A)t/x$

Qui se lit si A est vrai pour tout x, donc elle vraie pour un **t** qui remplace x.

b- Et une règle d'inférence très utilisée, c'est la règle du Modus Ponens:

$$\frac{A\ ,\ A\rightarrow B}{B}\ ,$$

Qui se lit: Si A est vrai et A B est vrai, donc B est vrai.

Concernant l'aspect raisonnement, pour la logique des prédicats, comme pour la logique des propositions, il existe au niveau de la théorie de preuve, différentes méthodes qui permettent de prouver la validité- ou seulement la satisfiabilité- d'une formule ou de déduire une formule à partir d'un certain nombre de formules (hypothèses). Parmi les plus efficaces, on trouve **la résolution** par **réfutation**. Et en parlant de résolution, on trouve la résolution utilisant **le théorème de Herbrand** et la résolution utilisant l'**unification**.

Malheureusement, dans un premier temps nous dirons que la logique des prédicats est **indécidable**, c'est-à-dire qu'il est impossible de proposer un algorithme général capable de décider en un nombre fini d'opération de la validité ou non de n'importe qu'elle formule de la logique des prédicats du 1erordre (voir **Remarque -1-,** ci-dessous) (théorème d'indécidabilité de Church). Cependant, on peut proposer des algorithmes généraux pour décider de la validité de certaines famille de formules: si la formule est valide, ils s'arrêteront, si la formule est non valide, ils risquent de ne pas s'arrêter, on dira alors que la logique des prédicats est **semi-décidable**. Parmi les principales techniques proposées sont **le théorème de Herbrand** et **le principe de résolution**.

Dans un même ordre d'idée, on peut parler du problème de **calculabilité** : les cours d'informatique que vous avez vus, peuvent donner une impression que pour chaque problème on peut trouver un algorithme de solution. Dans la partie de la calculabilité, le but est de montrer que ce n'est pas le cas et que pour des nombreux problèmes naturels et intéressants il n'existe pas d'algorithme.

Remarque -1-:

L'expression du 1^{er} ordre indique que les quantificateurs portent uniquement sur les variables, c'est le calcul des prédicats du 1^{er} ordre. Dans le calcul des prédicats du second ordre, on peut quantifier les fonctions :

Exemple de raisonnement valide mais que l'on ne peut exprimer dans le calcul des prédicats du 1^{er} ordre:

Malika a toutes les qualités d'une bonne étudiante.
L'intelligence est une qualité d'une bonne étudiante.
Donc Malika est intelligente.

Dans cet exemple, on quantifie « les qualités », et la qualité est un symbole de fonction.

Chapitre IV. Aspect Syntaxique de la logique des Prédicats

IV.1. Le langage des Prédicats et sa syntaxe

Le langage des prédicats est défini par:

1) un ensemble de symboles de prédicats ou de relations notés : P, Q, R, S,…, Homme, Mortel, Père,…
2) Les prédicats sont à 0, 1 ou plusieurs arguments (P(x), P(x,y), P(x,y,z),…).
3) Remarque: Les prédicats à 0 arguments sont des variables propositionnelles.
4) un ensemble de symboles de fonctions notés: f, g, h,…, père-de, somme, carré,…
   Les fonctions sont à 0, 1 ou plusieurs arguments (f(x), f(x,y), f(x,y,z),...).
5) Remarque: Les fonctions à 0 arguments sont des constantes.
6) un ensemble de variables d'objets ou d'individus notés: x,y,z,…, x1,x2,…
7) un ensemble de constantes notées: a,b,…, Socrate,Mohamed,…
8) des quantificateurs $\forall$ et $\exists$
9) des connecteurs : $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ et les parenthèses ( )

Remarque:
Notion d'arité: A chaque symbole de prédicat P, on associe un entier n, on dit que P est un symbole d'arité n, on note P/n. C'est simplement le nombre d'arguments.

IV.2.Vocabulaire

IV.2.1.Les termes

- Les variables et les constantes sont des termes.
- $f(t_1,t_2,\dots t_n)$ est un termes si:
  - les t_i sont des termes.
  - f est un symbole de fonction d'arité n.

- Tout terme est obtenu par l'application des règles précédentes un nombre fini de fois.

Exemples :

père(x), somme(x,y), poids(b), carré(x), somme(x,carré(y)) sont des termes, mais poids(P(x)) ,(où P est un prédicat) n'est pas un terme.

IV.2.2.Les atomes

- Les propositions sont des atomes.
- $P(t_1,\ldots,t_n)$ est un atome si:
  - les t_i sont des termes.
  - P est un symbole de relation ou prédicat d'arité n. Exrmple: P(x,a) est un atome et somme(x,y) n'est pas un atome.

IV.2.3.Les formules bien formées

1- Un atome est une formule.

Exemple: si P est un prédicat d'arité n et $t_1,t_2,\ldots,t_n$ des termes, alors $P(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ est une formule atomique.

2- Si F et G sont des formules et x une variable alors les expressions suivantes sont des formules:

- F
- $F\wedge G$, $F \vee G$, $F \rightarrow G$, $F \leftrightarrow G$
- $\forall x F$, $\exists x F$

- Toute formule est générée par un nombre fini d'application des règles précédentes 1- et 2-

Exemple: $\forall x\ \exists y\ (P(x,f(a,b),z) \rightarrow T(g(b),z))$ est une formule bien formée, mais $\forall x$ somme (P(x)) n'est pas une formule bien formée.

IV.3.Traduction, Modélisation, Formalisation, ou Représentation des Connaissances

IV.3.1.Remarques sur les connecteurs

La présentation avec les connecteurs peut être remplacée par une présentation avec seulement l'un des deux connecteurs, car :

$\forall x A$ est équivalent à $\neg \exists x \neg A$.

$\exists x A$ est équivalent à $\neg \forall x \neg A$.

IV.3.2.Méthode pour la traduction d'énoncés en formules

Cette méthode est une intervention de notre part, elle n'existe dans aucun ouvrage, ni aucune bibliographie. L'application des étapes de cette méthode a donné de très bons résultats pour nos étudiants, qui ont un langage «français » un peu « limité », vu que toutes leurs études primaires, moyennes et secondaires, ont été en langue arabe.

Nous avons résumé les étapes de la méthode comme suit :

1ère étape: rechercher les constantes et les variables, à chaque variable on associe son prédicat.

2ème étape: rechercher les prédicats, les verbes de l'énoncé constituent des prédicats.

3ème étape: déterminer les quantificateurs appropriés.

4ème étape: écrire une formule bien formée.

IV.3.3.Exemples de traduction ou de modélisation:

1. **Tous les lions sont féroces.**
   - La variable est 'lion' qu'on nommera x, son prédicat est I(x): x est un lion.
   - Le verbe est 'sont féroces', le prédicat est: F(x): x est féroce.
   - Le quantificateur correspond à 'Tous', c'est $\forall x$.
   - Donc, la formule bien formée est: $\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{I(x)} \rightarrow \mathbf{F(x)})$

2. **Quelques lions ne boivent pas de café.**
   - $\exists \mathbf{x}\ (\mathbf{I(x)} \wedge \mathbf{C(x)})$

- Où I(x): x est un lion
- C(x): x boit du café
- Remarque: dans cet exemple 'café' n'est pas considéré comme une constante.

3. Aucun singe n'est soldat.

- **$\neg\exists$x (S(x) $\wedge$ $\neg$ST(x))**
- Où S(x): x est un singe
- ST(x): x est un soldat

4. Tous les singes sont malicieux.

- **$\forall$x (S(x) $\rightarrow$ M(x))**
- Où S(x): x est un singe
- M(x): x est malicieux

IV.3.4. Expressions courantes

- Tous les A sont B, $\forall$x (A(x) $\rightarrow$ B(x))
- Seules les A sont B, $\forall$x (B(x) $\rightarrow$ A(x))
- Aucun A n'est B, $\neg\exists$x (A(x) $\wedge$ B(x)) ou bien $\forall$x (A(x) $\rightarrow$ $\neg$B(x)) (Remarque : la démonstration en TD).
- Quelques A sont B, $\exists$x (A(x) $\wedge$ B(x))

IV.4. Caractéristiques des variables

IV.4.1. Définition « occurrence »

On appelle **occurrence** de x dans F, chaque endroit où la variable x apparaît dans la formule F, non immédiatement précédée d'un symbole de quantificateur. C'est-à-dire dans $\forall$x, x n'est pas une occurrence!

Exemple:

Quel est le nombre d'occurrences des variables x,y,z dans la formule suivante:

$\forall x\, R(x,z) \rightarrow \exists z\, (R(y,z) \wedge Q(y,z))$

Réponse: x:1 occurrence, y:2occurences, z:3occurences

IV.4.2. Définition « portée d'un quantificateur »

La portée d'un quantificateur est la formule à laquelle cette quantification s'applique.

Exemple:

Soit A une formule quelconque, dans $\forall xA$ et $\exists xA$, la portée de x est A.

Quel la portée des Quantificateurs dans la formule suivante:

$\forall xR(x,z) \rightarrow \exists z\, (R(y,z) \wedge Q(y,z))$

Réponse:

.La portée de $\forall x$ est: R(x,z)

.La portée de $\exists z$ est: $(R(y,z) \wedge Q(y,z))$

Remarque: Lorsqu'une occurrence d'une variable se trouve plusieurs fois dans la portée de quantificateurs qui porte cette variable, on dira qu'elle est liée par le premier, c'est-à-dire le plus proche.

Exemple:

Quelle est la portée des quantificateurs dans la formule suivante:

$\forall x(\, (Q(y) \rightarrow F(x)) \wedge (H(y,x) \rightarrow \exists x\, K(x))\,) \rightarrow \forall\, y(G(x) \vee F(y))$

Réponse:

.La portée de $\forall x$ est: F(x) et H(y,x)

.La portée de $\exists x$ est: K(x)

.La portée de $\forall y$ est: F(y)

IV.4.3. Définition « variable liée »

Dans $\forall x$ et $\exists x$, la variable x est « **quantifiée** ».

Toute occurrence de x dans la portée de cette quantification est liée, donc une variable est liée si elle est quantifiée et liée à ce quantificateur.

Exemple:

Dans $\forall x(H(x) \rightarrow M(x))$, la variable x est liée

IV.4.4 .Définition « variable libre »

Une variable x est libre si elle n'est ni quantifiée, ni liée, et si elle a au moins une occurrence libre dans une formule.

Exemples:

.Dans $\forall x\ P(x) \rightarrow Q(y)$, la variable y est libre.

.Dans $\forall y\ ((p(x) \rightarrow \exists x\ p(x)) \rightarrow q(y))$ la première occurrence de x est libre, tandis que la deuxième occurrence est liée. L'occurrence de y est liée. La variable x est donc libre, et y liée.

Remarque importante:

Il est recommandé lorsque une même variable « occurre » dans une formule, tantôt libre, tantôt liée, de changer le nom soit de la variable libre, soit de la variable liée. C'est une propriété importante, comme nous le comprendrons plus loin avec la manière d'assigner une valeur de vérité à une formule, que la vérité d'une formule ne dépende pas du nom qu'on donne aux variables.

Exemple :

Dans la formule $F = (P(e,x) \rightarrow \exists x(Q(e,x,y) \rightarrow (R(e,x) \vee \forall z\ D(e,y,z))))$,

La première occurrence de x est libre, par contre les deux suivantes sont liées. Toutes les occurrences de z et de y sont liées.

Ainsi la formule précédente pourra s'écrire aussi bien :

$F = (P(e,u) \rightarrow \exists x(Q(e,x,y) \rightarrow (R(e,x) \vee \forall z\ D(e,y,z))))$,

Ou encore:

$F = (P(e,x) \rightarrow \exists u(Q(e,u,y) \rightarrow (R(e,u) \vee \forall z\ D(e,y,z))))$,

Un tel changement de nom de variable a l'avantage de nous faire éviter toute confusion, et de définir pour toute formule F deux ensembles disjoints:

Libre (F) = ensemble des variables libres dans F.

Liée (F) = ensemble des variables liées dans F.

IV.4.5.Définition « formule close ou fermée »

Une formule F est dite « close » ou « fermée », si elle ne contient aucune occurrence de variable libre. Dans le cas contraire, on dit qu'elle n'est pas close, ou qu'elle est ouverte.

Exemples:

La formule F est ouverte car z et y sont des variables libres:

$F = \forall x\, R(x,z) \rightarrow \forall z\, (R(y,z) \rightarrow Q(y,z))$

La formule G est close car toutes les variables sont liées:

$G = \forall x \exists z\, R(x,z) \rightarrow \forall z \forall y\, (R(y,z) \rightarrow Q(y,z))$

IV.4.6.Exemples de formules bien formées

.La formule $A = \forall y\, ((p(x) \rightarrow \exists x\, p(x)) \vee q(y))$ est ouverte, car il y a une occurrence de variable libre.

.La formule $\exists x\, \forall y\, ((p(x) \rightarrow \forall x\, p(x)) \rightarrow q(y))$ est fermée (c'est la fermeture universelle de A).

.La formule $\forall x\, \forall y\, ((p(x) \rightarrow \forall x\, p(x)) \rightarrow q(y))$ est également fermée (c'est la fermeture existentielle de A).

IV.5.Définition de substitution de variables

Soient F une formule bien formée, x une variable et t un terme. La substitution de **t** à x, F[t/x] est la formule obtenue en remplaçant toutes les occurrences **libres** de x dans F par **t**.

Exemple :

Soit $F = \forall y (P(z) \rightarrow R(y))$. La substitution de f (x) à z dans F donne :

$F[f(x)/z] = y(P(f(x))\ R(y))$

Une substitution de variables est un ensemble fini de couples associant à une variable un terme, notée:

$S=\{t_1/x_1, t_2/x_2, \ldots.., t_n/x_n\}$, tel que $x_i=x_j$ $i=j$

L'application de S à une formule A, notée $(A)_s$, est le résultat du remplacement **simultané** dans A, de toutes les occurrences libres de chaque x_i par t_i.
Si A est une expression alors $(A)_s$ est appelée une instance de A.

Exemples de substitutions :
. $(p(x) \vee q(x,y))\{z/x\} = p(z) \vee q(z,y)$
. $(p(x) \vee q(x,y))\{y/x\} = p(y) \vee q(y,y)$
. $(\forall x\ q(x,y))\{z/x\} = \forall x\ q(x,y)$ car x est liée !
. $(p(x) \vee q(x,y))\{z/x, z/y\} = p(z) \vee q(z,z)$

<u>Remarque importante:</u>
Si l'application de la substitution crée **<u>un lien supplémentaire</u>**, on ne peut pas appliquer la substitution:
Exemple:
Soit la formule $F = (P(e,u) \rightarrow \exists x(Q(e,x,y) \rightarrow (R(e,x) \wedge \forall z\ D(e,y,z))))$
. $(F)\{v/y\}$ est possible:
$(F)\ \{v/y\}= (P(e,u) \rightarrow \exists x(Q(e,x,v) \rightarrow (R(e,x) \wedge \forall z\ D(e,v,z))))$
. Mais $(F)\{x/y\}$ est impossible car création d'un nouveau lien supplémentaire avec x:
$(F)\{x/y\} = (P(e,u) \rightarrow \exists \mathbf{x}(Q(e,x,\mathbf{x}) \rightarrow (R(e,x) \wedge \forall z\ D(e,\mathbf{x},z))))$

IV.6. Déduction naturelle

IV.6.1. Rappels

Dans le Chapitre des propositions, nous avions cité que :
1/ Il existe deux façons de valider une formule P du calcul des propositions :

- ou bien on montre que cette formule est vraie dans tout modèle (aspect sémantique. On dit alors que P est une **tautologie**, et on note $\models P$.

- ou bien on montre que cette formule est **prouvable** ou **dérivable** en utilisant un système de déduction, et on note $\vdash P$.

2/ Un système de déduction correct doit être construit de façon que, à partir de formules vraies (tautologies), on puisse déduire d'autres formules vraies. Dans ce cas, si $\vdash P$ est vérifié, alors $\vDash P$ l'est également.

Dans cette partie de notre cours, nous donnons une définition plus formelle d'une déduction, avant de passer à la déduction pour les Prédicats.

IV.6.2. Définition déduction

Une déduction d'une formule A à partir d'hypothèses B1,..., Bm (noté $B1,...,Bm \vdash A$) est une liste finie de formules (A1, ... ,An) tel que:

1. An = A
2. Pour i = 1, ...,n, la formule Ai est :
   a. soit un axiome,
   b. soit égal à une des hypothèses Bj,
   c. soit obtenue par application de la règle de Modus Ponens à partir de deux prémisses Aj, Ak précédant Ai dans la liste.

Exemples de déductions:

- $p \vdash p$
- $p, q \vdash p$
- $p, q \vdash q$
- $p, q \vdash q \land p$
- $p, p \to q \vdash q$

IV.6.3. Définition déduction pour les Prédicats

Les schémas d'axiomes de la logique des prédicats sont ceux de la logique propositionnelle, c'est-à-dire le schéma axiomatique à la Hilbert (voir le paragraphe §Définition axiomatique à la Hilbert, ci-dessous), plus les axiomes suivants :

Axiome1:

$$\forall x\ A \rightarrow ((A)\{t/x\})$$

(Où {t/x} est une substitution quelconque), et les *règles d'inférence* sont le Modus Ponens :

$$\frac{A \text{ et } A \rightarrow B}{B}$$

Axiome2:

$$(A)\{t/x\} \rightarrow \exists x\ A$$

(Où {t/x} est une substitution quelconque), et les *règles d'inférence* sont le Modus Ponens :

$$\frac{A \text{ et } A \rightarrow B}{B}$$

Plus les deux règles pour les quantificateurs Axiomes 3 et 4 :

Axiome3:

$$\frac{A \rightarrow B}{A \rightarrow (\forall x\ B)}$$

S'il n'y a pas d'occurrence libre de x dans A

Axiome4:

$$\frac{A \rightarrow B}{(\exists x\ A) \rightarrow B}$$

S'il n'y a pas d'occurrence libre de x dans B

IV.6.4. Définition (axiomatique à la Hilbert), Rappels vus :

Les schémas d'axiomes de la logique propositionnelle sont :

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$

4. $(A \wedge B) \rightarrow A$
5. $(A \wedge B) \rightarrow B$
6. $A \rightarrow A \vee B$
7. $B \rightarrow A \vee B$
8. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$
9. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$
10. $\neg\neg A \rightarrow A$

Et la règle d'inférence est le Modus Ponens (MP) :

$$\frac{A \text{ et } A \rightarrow B}{B}$$

A et $A \rightarrow B$ sont appelées prémisses, et B est appelée conclusion de la règle.

Remarque

Donc une preuve est une déduction à partir d'un ensemble vide d'hypothèses.

Parfois les axiomes sont appelés `axiomes logiques', et les hypothèses `axiomes non-logiques'

IV.6.5. Exemple de déduction sans hypothèses (Preuve):

Preuve de **:**

$(\forall x\ p(x)) \rightarrow (\exists x\ p(x))$

1. $(\forall x\ p(x)) \rightarrow p(x)$

instance de $(\forall x\ A) \rightarrow (A)\{t/x\}$

2. $((\forall x\ p(x)) \rightarrow p(x)) \rightarrow (((\forall x\ p(x)) \rightarrow (p(x) \rightarrow (\exists x\ p(x)))) \rightarrow ((\forall x\ p(x)) \rightarrow (\exists x p(x))))$

instance de $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$

3. $((\forall x\ p(x)) \rightarrow (p(x) \rightarrow (\exists x\ p(x)))) \rightarrow ((\forall x\ p(x)) \rightarrow (\exists x\ p(x)))$

obtenue par Modus Ponens à partir de 1. et 2.

4. $p(x) \rightarrow (\exists x\ p(x))$

instance de $(A)\{t/x\} \rightarrow (\exists x\ A)$

5. $(p(x) \rightarrow (\exists x\ p(x))) \rightarrow ((\forall x\ p(x)) \rightarrow (p(x) \rightarrow (\exists x\ p(x))))$

instance de $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

6. $(\forall x\ p(x)) \rightarrow (p(x) \rightarrow (\exists x\ p(x)))$
obtenue par Modus Ponens à partir de 4. et 5.
7. $(\forall x\ p(x)) \rightarrow (\exists x\ p(x))$
obtenue par Modus Ponens à partir de 3. et 6.

(Remarque : ici, on a omis les parenthèses selon les priorités suivantes : $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$.)

Chaque formule qui a la forme d'un schéma est appelée un axiome. Ainsi, un axiome est une instance d'un schéma. P. Exemple : $(p \wedge q) \rightarrow (r \rightarrow (p \wedge q))$ est un axiome, obtenu à partir du premier schéma $A \rightarrow (B \rightarrow A)$.

Même définition de preuve, de prouvabilité et de consistance qu'en logique propositionnelle.

Remarque

Il est possible de définir également la déduction. Nous l'omettons ici, car elle est plus complexe que celle de la logique propositionnelle (les deux règles d'inférence pour les quantificateurs peuvent seulement être appliquées à des axiomes logiques, et non à des axiomes non logiques et des formules déduites à partir de ceux-ci).

De plus, cette notion peut être réduite à la validité, par un théorème de la déduction similaire à celui de la logique propositionnelle.