# CHAPITRE V. (SUITE) ASPECT SEMANTIQUE DES PREDICAT

SUITE DETAILLEE
(des pages 46 et 47 du CHAPITRE V.)

## I- INTRODUCTION :

La sémantique attribue une "signification" ou une "interprétation" aux formules d'un langage donné, dans "les structures" correspondantes. Les structures peuvent être d'ordre mathématiques ou représenter des données en informatique, ou encore l'univers de discours linguistique.

## II.- DEFINITION INTERPRETATION :

Une interprétation I du langage L du calcul des Prédicats est la donnée de :

1- Un domaine d'interprétation D : ensemble de valeurs que peuvent prendre les variables.

2. Une interprétation des constantes : une application $I_c$ de l'ensemble des constantes dans D qui, á toute constante c, associe une valeur dans D, on notera $I(c)$.

3. Une interprétation des fonctions : une application $I_f$ qui, á toute fonction f d'arité n (strictement positive) et á tout n-uplets de valeurs de D, associe une valeur de D, on notera $I(f)$.

4. Une interprétation des Prédicats : une application $I_p$ qui, à tout prédicat p d'arité n et á tout n-uplet de valeurs de D, associe une valeur $\{V, F\}$ (Vrai, Faux), on notera $I(P)$.

**Remarque :** On dit alors qu'on a une interprétation d'une formule F du langage L sur D ou encore une structure $S = (D, I)$.

**Exemple 1 :** Soit les formules :

$G_1 : \forall x \, P(x)$

$G_2 : \forall x \exists y \, Q(x, y)$

$G_3 : \forall x \, ( R(x) \wedge T( f(x), a))$

Soit une interprétation $I_1$ de $G_1$ :

$I_1 : D_1 = \{1, 2\}$ où $I_1(P(1)) = F$
$I_1(P(2)) = V$

Soit une interprétation $I_2$ de $G_2$ :

$I_2 : D_2 = \{1, 3\}$ où $I_2(Q(1,1)) = F$
$I_2(Q(1,3)) = V$
$I_2(Q(3,1)) = F$
$I_2(Q(3,3)) = F$

Soit une interprétation $I_3$ de $G_3$ :

$I_3 : D_3 = \{4, 5\}$ ; $a = 4$ ; $f(4) = 5$; $f(5) = 4$

$I_3(R(4)) = V$
$I_3(R(5)) = F$
$I_3(T(4,4)) = V$
$I_3(T(5,4)) = V$.

~~Dans~~ **Remarque :** Dans cet exemple on n'a pas encore donné de signification de P, Q et R et T. On verra qu'ils peuvent être interprétés de n'importe quelle manière.

**exemple :** $G_2 : \forall x \exists y \, Q(x, y)$.
une interprétation $I_1$ telle que : $Q(x, y) : x \leq y$
Une autre interprétation $I_2$ : $Q(x, y) : x > y$.
et $D = \mathbb{N}$ : entiers

ET selon l'interprétation, on donne la valeur de vérité :

exemple : Si $Q(x,y)$ : $x \leq y$ => $G_2$ vraie dans $I_1$

Si $Q(x,y)$ : $x > y$ => $G_2$ fausse dans $I_2$.

-> à détailler par la suite (voir p. 8).

Exemple 2 :

Soit le domaine d'individus :

D = {Amina, Bilal, Chahin}.

ET soit l'interprétation des variables telle que :

I(x) = Amina.

I(y) = Bilal

I(z) = Chahin.

ET soit le Prédicat A(x, y) : x aide y.

ET soit l'interprétation du Prédicat A :

I(A) = {(Amina, Bilal), (Bilal, Amina), (Chahin, Amina)}.

C'est à dire I(A) = Vrai pour ces couples.

C'est à dire Amina aide Bilal.

Bilal aide Amina

Chahin aide Amina.

Mais par exemple I(A) = Faux pour le couple (Chahin, Bilal)

c'est, Chahin n'aide pas Bilal

ou encore le couple (Chahin, Bilal) $\notin$ I(A).

-> (à détailler par la suite).

# III- Valeur de vérité d'1 formule selon une interprétation :

## III-1- Interprétation des termes :

Soit G une formule et I une interprétation de cette formule. On peut étendre l'interprétation I aux termes de G par ~~Induct~~ induction (l'interprétation elle-même) :

* A chaque symbole de constante, on associe sa valeur selon I.

  ex: Dans l'exemple 1, $a = 4 \Rightarrow I(a) = 4$ dans $I_3$ de $G_3$.

* A chaque variable, on associe la variable elle-même, on parle d'assignation.

  ex: Dans l'exemple 1, dans $I_1$ de $G_1$,

  On a 2 assignations :

  1ère assignation $A_1$ : $x = 1$ notée $x \leftarrow 1$

  2ème " $A_2$ : $x = 2$ notée $x \leftarrow 2$

  Dans $A_1$ : $I(x) = 1$

  Dans $A_2$ : $I(x) = 2$.

* ~~A chaque~~

* A chaque symbole de fonction $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$, on associe le terme $f'(t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$ où $t'_1, \dots, t'_n$ soit les interprétations des $t_1, \dots t_n$ et $f'$ l'interprétation de f.

  ex: Dans l'exemple 1, dans $I_3$ de $G_3$ :

  $I(f) = \{4, 5\}$.

  ou $I(f(4)) = 5$ et $I(f(5)) = 4$.

  car $f(4) = 5$ et $f(5) = 4$ selon $I_3$.

## III-2 - L'interprétation des formules :

Soit une interprétation I de domaine D d'une formule G :

A/ Si G est un atome : alors la valeur de vérité de G est l'interprétation du prédicat G, càd pour chaque choix de valeurs dans D pour les variables on obtiendra une valeur V ou F de G, en suivant la définition de I.

ex : ① Pour l'exemple 1 :

→ Pour G3 : $T(f(x), a)$ = Vrai si $x = 4$ et $a = 4$

Car $I_3(T(f(5), 4)) = I_3(T(5,4)) = V$.

T Elle est vrai pour $x = 5$ et $a = 4$.

$I_3(T(f(5), 4)) = I_3(T(4,4)) = V$.

② Pour l'exemple 2 : On donnera une autre formulation de l'interprétation d'1 atome :

Si G est un atome $G(t_1, t_2, \dots t_n)$ alors $I(G(t_1, \dots, t_n)) = V$ ssi $\underline{I(t_1), I(t_2), \dots I(t_n)} \in I(G)$.

Ainsi, pour l'exemple 2 :

$I(A(z, x)) =$ Vrai car $(I(z), I(x)) \in I(A)$
(Chaîne, Amino) $\in I(A)$

Mais $I(A(x, z)) =$ Faux car $(I(x), I(z)) \notin I(A)$
(Amino, Chaîne) $\notin I(A)$

6

B/ Si G est quantifiée (avec quantificateurs) :

alors :

B-1/ Si G est de la forme $\forall x\, G'$, la valeur de G sera Vrai si la valeur de G' selon I pour toutes les valeurs de la variable x dans D est vraie, sinon la valeur de G est fausse.

ex : Dans l'exemple 1 : G1 est fausse selon $I_1$

car pour $x = 1$ et pour $x = 2$ $\left.\begin{array}{l} I_1(P(1)) = F \\ I_1(P(2)) = V \end{array}\right\} \Rightarrow F$.

$\Rightarrow$ il faut Vrai pour tout $x \in D$.

Donc G1 est fausse selon $I_1$.

B-2/ Si G est de la forme $\exists x\, G'$, la valeur de G sera Vrai si la valeur de G' selon I pour au moins une valeur de x dans D, est Vrai, sinon la valeur de G sera fausse.

ex : Dans l'exemple 1 :

On prendra par exemple la formule $\exists y\, Q(x,y)$ et considérons que x est fixe $x = 1$.

La formule $\exists y\, Q(1,y)$ est vrai ssi

$\exists y \,/\, I_2(Q(1,y)) = \text{Vrai}$

Oui, $\exists y = 3 \,/\, I_2(Q(1,3)) = \text{Vrai}$

Donc la formule $\exists y\, Q(x,y)$ est vraie selon $I_2$.

c/ Si G est complexe de la forme $\neg G'$, $G' \wedge G''$, $G' \vee G''$, $G' \rightarrow G''$ ou $G' \leftrightarrow G''$, (c'est à dire avec les connecteurs)

les connecteurs gardent la même sémantique qu'en calcul propositionnel, c'est à dire, au moyen des Tables de vérité :

| $G'$ | $G''$ | $G' \wedge G''$ | $G' \vee G''$ | $G' \rightarrow G''$ | $G' \leftrightarrow G''$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F | F |
| F | V | F | V | V | F |
| F | F | F | F | V | V |

ex: Dans l'exemple 1 :

$G_3 = \forall x \, (R(x) \wedge T(f(x), a))$.

$I_3(G_3)$ ? $D_3 = \{4, 5\}$. $I(a) = 4$, $I(f(4)) = 5$
$I(f(5)) = 4$.

Pour $x = 4$. $I_3(G_3) = (I_3(R(4)) \wedge I_3(T(f(4), 4)))$
$= (\text{ vrai } \wedge \text{ vrai })$
$= \text{vrai}$

et

Pour $x = 5$ $I_3(G_3) = (I_3(R(5)) \wedge I_3(T(f(5), 4)))$
$= (\text{ Faux } \wedge \text{ vrai })$
$= \text{Faux}$.

$\Rightarrow I_3(G_3) = \text{Faux}$.

## Remarques importantes :

1ère remarque : Il peut y avoir une infinité d'interprétations pour $G$ :

Exemple : si $G_1 = \forall x \exists y\ P(x, y)$. et $D = \mathbb{N}$
entiers naturels

* Si l'interprétation de $P$ est $I_1$ / $P(x, y) : x \geq y$.

$\Rightarrow G_1$ est vraie dans $I_1$.
car $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}$ / ~~P(x,y)~~ $x \geq y$

* Si l'interprétation de $P$ est $I_2$ / $P(x, y) : x > y$

$\Rightarrow G_1$ est fausse dans $I_2$
car si $x = 0 \Rightarrow \nexists y \in \mathbb{N} / x > y$.
il faut que $y < 0 \notin \mathbb{N}$.

* Si l'interprétation de $P$ est $I_3$ / $P(x, y) : x \leq y$

$\Rightarrow G_1$ est vraie dans $I_3$.
car $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} / x \leq y$.

2ème remarque : L'ordre des quantificateurs est important.

Exemple : Dans l'exemple 2 : on considère la formule $G = \forall x \exists y\ A(x, y)$.

* Si on considère $I(G)$ ? Pour $x$ = Amina $\exists y$ ? / $(x, y) \in I(A)$.
$\rightarrow y$ = Bilal $\Rightarrow I(G) = V$
et Pour $x$ = Bilal $\exists y$ ? / $(x, y) \in I(A)$.
$\rightarrow y$ = Amina $\Rightarrow I(G) = V$
et ~~Pour x = Chahin~~ Pour $x$ = Chahin $\exists y$ ? / $(x, y) \in I(A)$.
$\rightarrow y$ = Amina $\Rightarrow I(G) = V$

$\Rightarrow I(G)$ = Vrai

* Si on considère la formule

$G = \exists y\ \forall x\ A(x, y)$.

$I(G)$ ? $\exists y$ ? / $\forall x\ A(x, y)$ ?

Si $y$ = Amina $\Rightarrow$ { pour $x$ = Amina $\to (x, y) \notin I(A)$ $\Rightarrow$ Faux
pour $x$ = Bilal
pour $x$ = Chahin.

Si $y$ = Bilal $\Rightarrow$ { pour $x$ = Amina $\to$ vrai
pour $x$ = Bilal $\to$ Faux.
pour $x$ = Chahin.

Si $y$ = Chahin. $\Rightarrow$ { pour $x$ = Amina $\to$ vrai
pour $x$ = Bilal $\to$ Faux.
pour $x$ = Chahin.

$\Rightarrow$ $I(G)$ = Faux.