III-3- Quelques Notions Classiques : Validité, Consistance, Conséquence logique.

III-3-1- Validité :

a/ Notion de Modèle : Une interprétation I est un modèle pour F ou I satisfait F ssi

$I(F) = 1$ ou vrai.

$I(F) = 1$ est notée $\models_I F$ ou $I \models F$

($\models$ est appelé sabot).

ex : Dans l'exemple 2 (cours précédent page 3), on dira que :

I est un modèle pour les formules :	I n'est pas un modèle pour les formules :
aide(z,x)	aide(x,z)
$\exists z$ aide(x,z)	$\forall z$ aide(z,x)
$\forall x \; \neg$ aide(x,x)	$\exists x$ aide(x,x)
$\exists x \exists y$ aide(x,y)	$\forall y \exists x$ aide(x,y)

b/ Notion de Validité : Soit F une formule, on dit que F est valide ou une Tautologie si et seulement si elle est vraie ($I(F)=1$, vrai) pour toute interprétation I, on écrira $\models F$.

c/ Théorème de Löwenheim - Skolem - non démontré :

* Toute formule close valide sur un domaine infini dénombrable est universellement valide.

<u>Remarque</u> : Dans ce théorème, on ne considère que les formules closes.

* Soit $F(x_1, x_2, \dots x_n)$ une formule quelconque dans un langage L.
F est dite universellement valide ssi
$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n\, F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est satisfaite dans toutes les interprétations de L.

<u>Exemple de formule valide</u> :

$\neg F \vee F$ est une formule valide.

Une formule est invalide ou falsifiable ssi elle est n'est pas valide.

<u>ex</u> : $F \wedge G$ et $F \vee G$ sont 2 formules invalides car il suffit que F et G soit Fausse.

III - 3-2 - <u>Notion de Consistance</u> :

a/ F est dite <u>consistante</u> ou satisfiable ssi il existe une interprétation I telle que $I(F) = \text{Vrai}$, càd si elle admet un modèle.
Sinon elle est insatisfiable ou <u>inconsistante</u>.

ex: La formule ~~$\neg F \wedge G$~~ $F \wedge G$ et la formule $F \vee G$ sont 2 formules consistantes, car il suffit que F et G soient vraie.

b/ F est dite inconsistante ssi elle est fausse dans toutes les interprétations.

ex: La formule $\neg F \wedge F$ est une formule inconsistante ($\forall$ la valeur de vérité de F).

III-3-3- Notion de Conséquence Logique :

Une formule F est une conséquence logique de $F_1, F_2, \ldots F_n$ ($F_1 \ldots F_n$ des formules) :

a/ ssi tout modèle de $F_1, F_2, \ldots F_n$ est un modèle de F.
On note dans ce cas : $F_1, F_2, \ldots F_n \models F$

b/ ssi $(F_1 \wedge F_2 \ldots \wedge F_n) \to F$ est valide
càd $\models ((F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \to F)$

Remarque : En général, soit A et B deux formules, les écritures suivantes sont équivalentes :

$$\models (A \to B) \iff A \models B.$$

Exemples de Conséquences Logiques :

① $p \models p$ ou $p \to p$ est valide.
② $(p, q) \models p$ ou $p \wedge q \to p$ est valide.
③ $(p, q) \models q$ ou $p \wedge q \to q$ est valide.

III-3-4- Indécidabilité, semi-décidabilité de la logique des Prédicats :

a/ Lorsqu'une formule ne contient pas de variable, on peut, comme en calcul propositionnel, en utilisant les tables de vérité, déterminer en un nombre fini d'opération si cette formule est valide ou non.

b/ La situation est plus complexe en présence de variables et de Quantificateurs car il y a une infinité d'interprétations.

c/ On montre qu'il est impossible de proposer un algorithme général capable de décider en un nombre fini d'opérations, de la validité ou non de n'importe quelle formule de la logique des Prédicats du 1er ordre.

d/ On dit que la logique des P. est indécidable (Théorème d'indécidabilité de Church).

e/ Cependant, on peut proposer des algorithme généraux pour décider de la validité de certaines familles de fbf :

* Si la formule est valide, ils s'arrêteront
* Si la formule est non valide, ils risquent de ne pas s'arrêter.

On dit donc que la ~~log~~ logique des P. est semi-décidable.

Mais Comment démontrer qu'une formule est universellement valide ?

-> Passer en revue toutes les interprétations ?
-> impossible (il y a une infinité d'interprétations)

-> Solution, les techniques utilisées sont :

① Une représentation utile des formules :
La forme clausale. (les formes standard)

② Un théorème qui simplifie le problème :
Le théorème de HERBRAND.

③ Le principe de résolution pour le calcul des prédicats :
Le principe de Résolution de Robinson
ou Résolution par coupure.

-> On dit qu'on va vers une automatisation des démonstrations.