

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université de Batna 2
Faculté des Sciences
Département d'Informatique



Notes de Cours et Exercices

Sur

*La Logique Mathématiques
Pour L'INFORMATIQUE*

Par

Khamsa DJAROU DIB

Février 2017

Sommaire

Introduction Générale

Chapitre I. Le Calcul Propositionnel.....	1
<i>I.1. Le langage des propositions et sa syntaxe.....</i>	<i>1</i>
<i>I.1.1. Les symboles</i>	<i>1</i>
<i>I.1.2. Les formules bien formées.....</i>	<i>1</i>
<i>I.1.3. Calcul propositionnel.....</i>	<i>2</i>
<i>I.1.4. Dédution.....</i>	<i>3</i>
<i>I.2. Le langage des propositions et sa sémantique.....</i>	<i>3</i>
<i>I.2.1. Notion d'Interprétation.....</i>	<i>4</i>
<i>I.2.2. Les Tables de Vérité.....</i>	<i>4</i>
<i>I.2.3. Les Théorèmes d'équivalence (lois).....</i>	<i>6</i>
<i>I.3. Notions de validité, inconsistance, conséquence logique, complétude et correction</i>	<i>8</i>
<i>I.3.1. Formule valide.....</i>	<i>8</i>
<i>I.3.2. Formule inconsistante.....</i>	<i>8</i>
<i>I.3.3. Conséquence logique.....</i>	<i>9</i>
<i>I.3.4. Complétude et correction.....</i>	<i>9</i>
<i>I.3.5. Conclusion.....</i>	<i>9</i>
<i>I.4. Dédution Naturelle.....</i>	<i>10</i>
<i>I.4.1. Axiomes de la logique booléenne (axiomes de Hilbert).....</i>	<i>10</i>
<i>I.4.2. Exemples de déductions.....</i>	<i>11</i>
<i>I.5. Formalisation ou Représentation des connaissances.....</i>	<i>11</i>
<i>I.5.1. La conjonction.....</i>	<i>12</i>
<i>I.5.2. La disjonction.....</i>	<i>12</i>
<i>I.5.3. Le conditionnel.....</i>	<i>13</i>
<i>I.5.4. L'équivalence.....</i>	<i>13</i>
<i>I.5.5. Conclusion.....</i>	<i>13</i>

Chapitre II. Les Preuves en logique propositionnelle **16**

<i>II.1. Introduction.....</i>	<i>16</i>
--------------------------------	-----------

<i>II.2. Preuve par les tables de vérité, ou la méthode des tableaux matriciels</i>	16
<i>II.3. Preuve par les lois d'équivalence</i>	19
<i>II.4. Formes normales pour la preuve par Résolution</i>	20
<i>II.4.1. Quelques définitions</i>	20
<i>II.4.2. Exemples de formes normales</i>	20
<i>II.5. Preuve par le principe de Résolution</i>	22
<i>II.5.1. Système de preuves par résolution</i>	22
<i>II.5.2. Notion de clause</i>	22
<i>II.5.3. Clause résolvente</i>	22
<i>II.5.4. Algorithme de résolution</i>	23
<i>II.5.5. Exemples</i>	25
Chapitre III. Introduction Générale à la logique des Prédicats	28
<i>III.1. Vers la logique des Prédicats: Les limites des propositions</i>	28
<i>III.2. Introduction de la logique des Prédicats</i>	29
<i>III.3. Description de la Logique des Prédicats</i>	31
Chapitre IV. Aspect Syntaxique de la logique des Prédicats	34
<i>IV.1. Le langage des Prédicats et sa syntaxe</i>	34
<i>IV.2. Vocabulaire</i>	34
<i>IV.2.1. Les termes</i>	34
<i>IV.2.2. Les atomes</i>	35
<i>IV.2.3. Les formules bien formées</i>	35
<i>IV.3. Traduction, Modélisation, Formalisation, ou Représentation des Connaissances</i>	35
<i>IV.3.1. Remarques sur les connecteurs</i>	36
<i>IV.3.2. Méthode pour la traduction d'énoncés en formules</i>	36
<i>IV.3.3. Exemples de traduction ou de modélisation</i>	36
<i>IV.3.4. Expressions courantes</i>	37
<i>IV.4. Caractéristiques des variables</i>	37
<i>IV.4.1. Définition « occurrence »</i>	37
<i>IV.4.2. Définition « portée d'un quantificateur »</i>	38
<i>IV.4.3. Définition « variable liée »</i>	38

<i>IV.4.4 .Définition « variable libre »</i>	39
<i>IV.4.5.Définition « formule close ou fermée »</i>	40
<i>IV.4.6.Exemples de formules bien formées</i>	40
<i>IV.5.Définition de substitution de variables</i>	40
<i>IV.6. Dédution naturelle</i>	41
<i>IV.6.1. Rappels</i>	41
<i>IV.6.2. Définition déduction</i>	42
<i>IV.6.3. Définition déduction pour les Prédicats</i>	42
<i>IV.6.4. Définition (axiomatique à la Hilbert), Rappels vus</i>	43
<i>IV.6.5. Exemple de déduction sans hypothèses (Preuve)</i>	44
<i>Chapitre V. Aspect Sémantique de la logique des Prédicats</i>	46
<i>V.1.Introduction à l'interprétation</i>	46
<i>V.1.1.Remarque sur la validité et la satisfiabilité</i>	46
<i>V.2.Théorie des modèles de la logique des prédicats</i>	46
<i>V.2.1.Exemple d'interprétation</i>	47
<i>V.2.2.Un autre exemple d'interprétation</i>	47
<i>V.2.3.Exemples de formules valides et satisfiables</i>	48
<i>V.2.4.Exemples de conséquences logiques</i>	48
<i>V.3.Les formes normales pour les Prédicats</i>	48
<i>V.3.1.Objectif</i>	48
<i>V.3.2.Mise sous Forme Normale Prénexe (FNP)</i>	48
<i>V.3.2.1.La Forme Prénexe)</i>	48
<i>V.3.2.2.Méthode de transformation d'une fbf en FNP</i>	49
<i>V.3.2.3. Transport des Quantificateurs</i>	50
<i>V.3.2.4. Exemples</i>	50
<i>V.3.2.5. Exercice1</i>	51
<i>V.3.3.Mise sous Forme Standard de Skolem (FSS)</i>	51
<i>V.3.3.1.Méthode de mise en forme FSS</i>	51
<i>V.3.3.2.Exemple</i>	52
<i>V.3.3.3.Théorème</i>	52
<i>V.3.3.4.Exercice 2</i>	52

<i>V.3.4.Mise sous Forme Clausale (FC).....</i>	<i>52</i>
<i>V.3.4.1.Obtention d'un ensemble de clauses.....</i>	<i>52</i>
<i>V.3.4.2.Exemple.....</i>	<i>53</i>
<i>V.3.4.3.Exercice 3.....</i>	<i>53</i>
<i>V.3.5.Conclusion.....</i>	<i>53</i>

Introduction Générale

Objectifs du cours

Ce cours a pour objectif de donner aux étudiants des notions de base de la logique formelle à partir de l'étude de la logique propositionnelle et de la logique des Prédicats.

Les chapitres développés sont inspirés du programme donné par le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique au cours de l'année universitaire de 2015/2016, pour les étudiants de la deuxième année licence académique du département d'informatique de l'université Batna2. Il s'agit d'étudier les principes fondamentaux de la validité des démonstrations dans le calcul propositionnel, et dans la logique des prédicats. Pour les propositions, on partira des tables de vérité, jusqu'à l'algorithme de Résolution. Pour les prédicats, il s'agira de préparer tous les éléments pour appliquer l'algorithme de résolution, sans pour autant l'appliquer.

Connaissances préalables recommandées

- *Notions de mathématiques*
- *Notions de l'algorithmique*

La Logique formelle a pour but : "L'Etude des raisonnements valides"

- Philosophie :

Raisonnement humain

- Mathématiques :

Validité des démonstrations

- Informatique :

Traitement automatique de l'information