

TD N° 1 avec Solution Logique des Propositions

Exercice1 : **Syntaxe : formules bien formées (fbf)**

Précisez pour chaque question si la formule est bien formée (fbf) et non ambiguë (répondre par fbf) ou au contraire mal formée ou ambiguë (répondre par fmf, c'est-à-dire formule mal formée).

- 1- $F = (P \rightarrow Q \rightarrow R) \rightarrow P \wedge Q \rightarrow R$ **NON, manque les ()**
- 2- $\neg A \wedge B$ **OUI et NON, les 2 réponses justes, OUI car on peut omettre les (), Non car manqueraient les () : $\neg(A) \wedge B$ ou $\neg(A) \wedge B$**
- 3- $A \wedge B \vee C$ **NON, manque les ()**
- 4- $\neg(A \vee (B \wedge C))$ **OUI c'est une fbf**
- 5- $A \vee (\neg B) \vee (\neg C)$ **OUI c'est une fbf**
- 6- $A \wedge B \wedge (\neg C)$ **OUI c'est une fbf**
- 7- $\vee(A \wedge B)$ **NON, manque une formule ou une proposition à la gauche du \vee**
- 8- $\neg \neg A \vee B$ **OUI et NON, les 2 réponses justes, comme la 2-**
- 9- $A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A$ **NON, manque les ()**
- 10- $A \leftrightarrow B \leftrightarrow C$ **OUI c'est une fbf**

Exercice2 : **Sémantique : Interprétation : Tables de Vérité : Preuve par les TV**

Que pouvez-vous conclure sur les formules bien formées suivantes en utilisant les tables de vérité ? Sont-elles valides, consistantes, invalides, inconsistantes ?

- a) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg P)$
- b) $P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q))$
- c) $((P \wedge Q) \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$
- d) $\neg P \vee (\neg(P \rightarrow Q))$
- e) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
- f) $P \wedge \neg(P \wedge \neg Q) \wedge (Q \vee R)$

1/ Facile, voir le cours comment faire une table de vérité.

Chaque ligne de la table de vérité représente une interprétation de la formule.

Une **interprétation** c'est la valeur de vérité de la formule, c'est-à-dire soit Vrai, soit Faux

2/ Rappels :

- .Une formule valide : toujours Vraie.
- .Une formule consistante : au moins une interprétation Vrai, cette interprétation est appelée **Modèle** de cette formule.
- .Une formule invalide : au moins une interprétation Faux.
- .Une formule inconsistante : toujours Fausse.

3/ Voir le cours aussi pour **la relation** entre valide, consistante, invalide, consistante.

Exercice3 : **Sémantique : loi de « De Morgan » (à faire chez soi)**

Entraînez-vous à développer la négation en appliquant les lois de De Morgan :

- a) $(\neg(A \wedge (B \vee C)))$

- b) $(\neg[(\neg(A \wedge B) \vee (\neg D)) \wedge E \vee F])$
 c) $(\neg((\neg A) \wedge B \wedge ((\neg C) \vee D) \vee (\neg E) \wedge F \wedge (\neg G)))$
 d) $(\neg(A \vee (\neg B) \vee C) \wedge ([\neg(\neg D)] \vee (\neg E)) \vee (\neg F) \wedge G)$

A faire chez soi, pour apprendre à faire la distributivité de la négation, c'est-à-dire **faire entrer la négation à l'intérieur des parenthèses**, c'est les 2 lois d'équivalence de « De Morgan » vues dans le cours !!!

Exercice4 : Sémantique : Interprétation : Théorèmes (lois) d'équivalences : Preuve par les lois d'équivalence.

Que pouvez-vous conclure sur la formule bien formée en utilisant les théorèmes d'équivalence vus au cours ?

- a) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg P)$
 b) $P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q))$
 c) $((P \wedge Q) \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$
 d) $\neg P \wedge (\neg(P \rightarrow Q))$
 e) $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$
 f) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
 g) $P \wedge \neg(P \wedge \neg Q) \wedge (Q \vee R)$

1/ **Méthode** en bref :

Etape 1- Eliminer les \rightarrow et les \leftrightarrow par les lois d'équivalences vues au cours.

Etape 2- Essayer de transformer algébriquement la formule pour avoir ces formes des lois d'équivalences vues au cours :

$$\begin{aligned} 1) \quad & A \vee \text{Vrai} \cong \text{Vrai} \\ & A \wedge \text{Vrai} \cong A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & A \vee \text{Faux} \cong A \\ & A \wedge \text{Faux} \cong \text{Faux} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & \text{Complémentarité} \\ & A \vee \neg A \cong \text{Vrai} \\ & A \wedge \neg A \cong \text{Faux} \end{aligned}$$

Où **A** est une proposition ou une formule.

2/ **Conclusion** :

Si on trouve que la formule $\cong \text{Vrai}$: formule valide.

Si on trouve que la formule $\cong \text{Faux}$: formule inconsistante.

Si on ne peut avoir ni Vrai, ni Faux, **on dit qu'on ne peut rien dire sur la formule** en question.

- a) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg P)$

$\cong \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg P)$ éliminer $\rightarrow : A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
 $\cong \neg(\neg P \vee Q) \vee ((P \wedge Q) \vee \neg P)$ Loi de De Morgan
 $\cong \neg(\neg P \vee Q) \vee ((P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg P))$ Distributivité
 $\cong \neg(\neg P \vee Q) \vee ((\text{Vrai}) \wedge (Q \vee \neg P))$ $P \vee \neg P \equiv \text{Vrai toujours}$
 $\cong \neg(\neg P \vee Q) \vee ((\text{Vrai}) \wedge (X))$ $X = Q \vee \neg P$
 $\cong \neg(\neg P \vee Q) \vee (X)$ $\text{Vrai} \wedge X \cong X$
 $\cong \neg(\neg P \vee Q) \vee (Q \vee \neg P)$ remettre le X
 $\cong \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee Q)$ commutativité du X
 $\cong \neg(X) \vee (X)$
 $\cong \text{Vrai toujours. Donc a) est une formule valide.}$