TD N° 1 avec Solution
Logique des Propositions

Exercice1 : **Syntaxe : formules bien formées (fbf)**

Précisez pour chaque question si la formule est bien formée (fbf) et non ambigüe (répondre par fbf) ou au contraire mal formée ou ambigüe (répondre par fmf, c'est-à-dire formule mal formée).

1- $F = (P \to Q \to R) \to P \wedge Q \to R$ NON, manque les ( )

2- $\neg A \wedge B$ OUI et NON, les 2 réponses justes, OUI car on peut omettre les ( ), Non car manqueraient les ( ) : $\neg (A) \wedge B$ ou $\neg (A) \wedge B$

3- $A \wedge B \vee C$ NON, manque les ( )

4- $\neg (A \vee (B \wedge C))$ OUI c'est une fbf

5- $A \vee (\neg B) \vee (\neg C)$ OUI c'est une fbf

6- $A \wedge B \wedge (\neg C)$ OUI c'est une fbf

7- $\vee (A \wedge B)$ NON, manque une formule ou une proposition à la gauche du $\vee$

8- $\neg \neg A \vee B$ OUI et NON, les 2 réponses justes, comme la 2-

9- $A \to B \wedge B \to A$ NON, manque les ( )

10- $A \leftrightarrow B \leftrightarrow C$ OUI c'est une fbf

Exercice2 : **Sémantique : Interprétation : Tables de Vérité : Preuve par les TV**

Que pouvez-vous conclure sur les formules bien formées suivantes en utilisant les tables de vérité ? Sont-elles valides, consistantes, invalides, inconsistantes ?

a) $(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$

b) $P \to (Q \to (P \wedge Q))$

c) $(((P \wedge Q) \to R) \wedge (P \to Q)) \to (P \to R)$

d) $\neg P \vee (\neg(P \to Q))$

e) $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$

f) $P \wedge \neg(P \wedge \neg Q) \wedge (Q \vee R)$

1/ Facile, voir le cours comment faire une table de vérité.
Chaque ligne de la table de vérité représente une interprétation de la formule.
Une **interprétation** c'est la valeur de vérité de la formule, c'est-à-dire soit Vrai, soit Faux

2/ Rappels :

.Une formule valide : toujours Vraie.

.Une formule consistante : au moins une interprétation Vrai, cette interprétation est appelée **Modèle** de cette formule.

.Une formule invalide : au moins une interprétation Faux.

.Une formule inconsistante : toujours Fausse.

3/ Voir le cours aussi pour **la relation** entre valide, consistante, invalide, consistante.

Exercice3 : **Sémantique : loi de « De Morgan » (à faire chez soi)**

Entrainez-vous à développer la négation en appliquant les lois de De Morgan :

a) $(\neg(A \wedge (B \vee C)))$

b) $(\neg[(\neg(A \wedge B) \vee (\neg D)) \wedge E \vee F]$
c) $(\neg((\neg A) \wedge B \wedge ((\neg C) \vee D) \vee (\neg E) \wedge F \wedge (\neg G)))$
d) $(\neg(A \vee (\neg B) \vee C) \wedge ([\neg(\neg D)] \vee (\neg E)) \vee (\neg F) \wedge G)$

A faire chez soi, pour apprendre à faire la distributivité de la négation, c'est-à-dire **<u>faire entrer la négation à l'intérieur des parenthèses</u>**, c'est les 2 lois d'équivalence de « De Morgan »vues dans le cours !!!

<u>Exercice4</u> : **Sémantique : Interprétation : Théorèmes (lois) d'équivalences : Preuve par les lois d'équivalence.**
Que pouvez-vous conclure sur la formule bien formée en utilisant les théorèmes d'équivalence vus au cours ?

a) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg P)$
b) $P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q))$
c) $(((P \wedge Q) \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow R)$
d) $\neg P \wedge (\neg(P \rightarrow Q))$
e) $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$
f) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
g) $P \wedge \neg(P \wedge \neg Q) \wedge (Q \vee R)$

1/ **Méthode** en bref :
Etape 1- Eliminer les $\rightarrow$ et les $\leftrightarrow$ par les lois d'équivalences vues au cours.
Etape 2- Essayer de transformer algébriquement la formule pour avoir ces formes des lois d'équivalences vues au cours :

1) $A \vee \text{Vrai} \cong \text{Vrai}$
$A \wedge \text{Vrai} \cong A$

2) $A \vee \text{Faux} \cong A$
$A \wedge \text{Faux} \cong \text{Faux}$

3) Complémentarité
$A \vee \neg A \cong \text{Vrai}$
$A \wedge \neg A \cong \text{Faux}$

Où A est une proposition ou une formule.

2/**Conclusion** :
Si on trouve que la formule $\cong$ Vrai : formule valide.
Si on trouve que la formule $\cong$ Faux : formule inconsistante.
Si on ne peut avoir ni Vrai, ni Faux, **on dit qu'on ne peut rien dire sur la formule** en question.

a) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg P)$

$\cong \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg P)$ éliminer $\rightarrow$: $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
$\cong \neg(\neg P \vee Q) \vee ((P \wedge Q) \vee \neg P)$ Loi de De Morgan
$\cong \neg(\neg P \vee Q) \vee ((P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg P))$ Distributivité
$\cong \neg(\neg P \vee Q) \vee ((Vrai) \wedge (Q \vee \neg P))$ $P \vee \neg P \equiv$ Vrai toujours
$\cong \neg(\neg P \vee Q) \vee ((Vrai) \wedge (X))$ $X = Q \vee \neg P$
$\cong \neg(\neg P \vee Q) \vee (X)$ $Vrai \wedge X \cong X$
$\cong \neg(\neg P \vee Q) \vee (Q \vee \neg P)$ remettre le X
$\cong \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee Q)$ commutativité du X
$\cong \neg(X) \vee (X)$
$\cong$ Vrai toujours. Donc a) est une formule valide.

<u>Exercice5</u> : **Sémantique : Interprétation : Théorèmes d'équivalences**
Vérifier les équivalences classiques par les tables de vérité et par les théorèmes d'équivalence :

a) $\neg (P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$
b) $\neg (P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$
c) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
d) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Exemple pour a) :

Etape1- Considérer que:
a) $\neg (P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$ veut aussi dire : $\neg (P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$
Le $\equiv$ est remplacé par $\leftrightarrow$

Etape 2- On considère alors une nouvelle formule :
$F = (\neg (P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q))$
Et on applique la même méthode que l'exercice 4.