<u>TD N° 4</u>

<u>Logique des Prédicats</u>
<u>Aspect Syntaxique</u>

<u>Exercice 1</u>: Un peu de syntaxe.
On posera que x,y,z sont des variables, a,b,c des constantes, f,g,h des fonctions et P,Q,R des prédicats pouvant prendre une **<u>arité quelconque</u>**.

A/ Dites si les écritures suivantes correspondent à des termes:
y, c, $x \vee a$, $f(x)$, $f(x,a)$, $f(a \wedge b)$, $g(h(x),f(x,y),c)$, $f(f(f(x)))$, $R(x,y)$

B/ Dites si les écritures suivantes correspondent à des formules bien formées:
P, $P(a)$, $P(x)$, $P(a \vee b)$, $Q(x,y,b)$, $R(f(x))$, $Q(g(f(a)),b)$, $P(a) \vee Q(a)$

C/ Même question que B/:
$a \vee b$, $g(x,y)$, P, $P \vee R$, $\forall x P(x)$, $\forall x \vee Q(y)$, $\exists x P(x) \vee Q(y)$, $Q(x,y,b) \rightarrow P(x) \vee P(a) \wedge R$, $\forall b\ Q(x,y,b) \rightarrow P(x) \vee P(a)$, $\exists y Q(x,y,b) \rightarrow P(x) \vee P(a)$

D/ Maintenant si on donne que : P,Q : Prédicats binaires, R : Prédicats unaire, f : fonction unaire, g : fonction ternaire, a : fonction 0-aire ou constante, x,y,z : variables.
Donner le nombre de termes existant dans chacune de ces formules :

$$\mathbf{F = (\exists x\ P(x, f(y))) \vee \neg \forall y\ Q(y, g(a, z, h(z)))}$$
$$\mathbf{G = R(x) \vee ((\exists x \forall y\ P(f(x), z)) \wedge R(a)) \wedge \forall x Q(y, g(x, z, x))}$$

<u>Exercice 2</u>: Les constantes : Sujet ou Complément d'Objet ?
A/ Pourquoi faut il savoir si les constantes des assertions sont en position de sujet ou de complément d'objet.

B/ Souligner alors les termes singuliers ou les constantes en position de sujet s'il y en a:
1/ L'inspecteur Tahar a mené l'enquête.
2/ Mohamed n'a pas préparé ses cours.
3/ Cette injustice a découragé Mohamed.
4/ Une personne s'occupe de Mohamed.

<u>Exercice 3</u>: Modélisation ou traduction ou formalisation, les constantes.
Formaliser en langage des prédicats les énoncés de l'Exercice2 **<u>où une constante existe.</u>**

<u>Exercice 4</u>: Modélisation ou traduction ou formalisation.
Formalisez les assertions suivantes dans le langage des prédicats :
1. Quelques champignons sont comestibles.
2. Tous les enfants aiment les bonbons.
3. Aucun enfant ne déteste les bonbons.
6. Il y a des peines et il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir.
7. Si les enfants sont plus intelligents que les hommes alors il y a un enfant qui est plus intelligent que son père.
8. Pour tout entier, il existe un entier plus grand.

<u>Exercice 5</u>: Modélisation ou traduction ou formalisation : Problème du Domaine.
1. Si On donne que le domaine D ={ensemble de tous les champignons}, que devient l'assertion : Quelques champignons sont comestibles.

2. Si D={ensemble des personnes}, formulez :
    a. Quelqu'un arrive.
    b. Personne n'est venu.

Exercice 6: **Du Langage des prédicats au Français.**
Traduire les formules (1) à (8) en français. Utilisez les traductions des prédicats suivantes :

P(x) : x est plombier — R(x) : x est riche
Q(x): x habite à Batna. — a : Mohamed, b : Malika, c : Amina

1. $P(a)$ 2. $Q(c)$ 3. $R(b)$
4. $\exists x Q(x)$ 5. $\forall x P(x)$ 6. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
7. $\exists x(Q(x) \wedge \neg P(x))$ 8. $\neg \exists x R(x)$

Exercice 7: **Variables libres, variables liées.**
Dans les formules suivantes, déterminer les variables libres et les variables liées, indiquer par un trait quel connecteur les lie:
1. $P(x)$
2. $\forall x(Px \rightarrow \exists y(Qy \wedge Rx))$
3. $(P(f(x,y)) \vee \forall z\, R(a,z))$
4. $\forall x\, P(x,y,z) \vee \forall z\, (P(z) \rightarrow R(x))$
5. $\forall y(\,(P(x) \vee \exists x P(x)) \wedge Q(y))$
6. $\forall x \forall y(\,(P(x) \vee \exists x P(x)) \wedge Q(y))$

Exercice 8: **Formules ouvertes, formules fermées ou closes.**
Dites si les formules 1. à 5. de l'exercice précédent sont ouvertes ou fermées.

Exercice 9: **Renommage et Substitution.**
Quel est le résultat des substitutions suivantes:
1. $P(x) \vee Q(x,y)\{x/z\}$
2. $\forall x\, Q(x,y)\ \{x/z\}$
3. $(P(x) \vee Q(x,y))\ \{x/y,\ y/f(a)\}$

Peut-on substituer x par z dans les formules suivantes, expliquez:
4. $(P(f(x,y)) \vee \forall z\, R(a,z))$
5. $\forall x\, P(x,y,z) \vee \forall z\, (P(z) \rightarrow R(x))$

Peut-on renommer x,y,z dans les formules 4.et 5.?Pourquoi?