

TD N° 4 avec Solution

Logique des Prédicats Aspect Syntaxique

Exercice 1: Un peu de syntaxe.

On posera que x, y, z sont des variables, a, b, c des constantes, f, g, h des fonctions et P, Q, R des prédicats pouvant prendre une arité quelconque.

A/ Dites si les écritures suivantes correspondent à des termes:

y : **y est une variable par définition donc c'est 1 terme**

c : **constante donc terme,**

$x \vee a$: **Non rien, même pas formule**

$f(x)$: **x est 1 terme (car obligatoirement terme à l'intérieur d'1 fonction!), f fonction, donc $f(x)$ est bien 1 terme.**

$f(x, a)$: **x terme, a terme, f fonction, donc $f(x, a)$ est 1 terme**

$f(a \wedge b)$: **Non, $a \wedge b$ n'est pas un terme**

$g(h(x), f(x, y), c)$: **x terme, h terme, y terme, f terme, c terme, g terme, donc $g(h(x), f(x, y), c)$ est 1 terme.**

$f(f(f(x)))$: **x terme, f terme, donc $f(x)$ terme, $f(f(x))$ terme, donc $f(f(f(x)))$ est 1 terme.**

$R(x, y)$: **Non, R est un prédicat !**

B/ Dites si les écritures suivantes correspondent à des formules bien formées:

P : **oui Prédicats sans argument qui devient proposition**

$P(a)$: **oui**

$P(x)$: **oui**

$P(a \vee b)$: **non $a \vee b$ n'est pas 1 terme**

$Q(x, y, b)$: **oui**

$R(f(x))$: **oui**

$Q(g(f(a)), b)$: **oui**

$P(a) \vee Q(a)$: **oui**

C/ Même question que B/:

$a \vee b$: **non, a et b ne sont pas des prédicats donc pas formules**

$g(x, y)$: **non g n'est pas un prédicat, donc pas formule**

P : **oui**

$P \vee R$: **oui**

$\forall x P(x)$: **oui**

$\forall x \forall y Q(y)$: **non, $\forall x$ n'est pas une formule**

$\exists x P(x) \vee Q(y)$: **oui**

$Q(x, y, b) \rightarrow P(x) \vee P(a) \wedge R$: **non, manquent les parenthèse ! Comme les propositions !**

$\forall b Q(x, y, b) \rightarrow P(x) \vee P(a)$: **non $\forall b$, b constante ! et manque les ()**

$\exists y Q(x, y, b) \rightarrow P(x) \vee P(a)$: **non, manque les ()**

D/ Maintenant si on donne que : P, Q : Prédicats binaires, R : Prédicats unaire, f : fonction unaire, g : fonction ternaire, a : fonction 0-aire ou constante, x, y, z : variables.

Donner le nombre de termes existant dans chacune de ces formules :

$$F = (\exists x P(x, f(y))) \vee \neg \forall y Q(y, g(a, z, h(z)))$$

Dans $\exists x$, x n'est pas compté comme un terme ! Car il n'est compté comme une occurrence.

A/ En comptant les doubles et les triples, on aura 9 termes, qui sont :

1^{ère} occurrence de x : terme : 1

1^{ère} occurrence de y : terme : 2

Occurrence de f : $f(y)$ terme : 3

2^{ème} occurrence de y : terme (Pas dans $\forall y$!!!) : 4

Occurrence de a : terme : 5

1^{ère} Occurrence de z : terme : 6

2^{ème} occurrence de z : terme : 7

Occurrence de h : $h(z)$ terme : 8

Occurrence de g : $g(a, z, h(z))$ terme : 9

B/ En ne comptant pas les doubles et les triples, on aura 7 termes.

$$G = R(x) \vee ((\exists x \forall y P(f(x), z)) \wedge R(a)) \wedge \forall x Q(y, g(x, z, x))$$

A/ En comptant les doubles et les triples, on aura 10 termes, qui sont :

$x, x, f(x), z, a, y, x, z, x, g(x, z, x)$

B/ En ne comptant pas les doubles et les triples, on aura 6 termes.

Exercice 2: Les constantes : Sujet ou Complément d'Objet ?

A/ Pourquoi faut il savoir si les constantes des assertions sont en position de sujet ou de complément d'objet.

Car, en général, les constantes qui ne sont pas en position de sujets, ne seront pas défini, à part, comme constante, elles seront incluses dans la définition du prédicat lui-même.

B/ Souligner alors les termes singuliers ou les constantes en position de sujet s'il y en a :

1/ L'inspecteur Tahar a mené l'enquête.

2/ Mohamed n'a pas préparé ses cours.

3/ Cette injustice a découragé Mohamed. Mohamed n'est pas en position de sujet.

4/ Une personne s'occupe de Mohamed. Mohamed n'est pas en position de sujet.

Exercice 3: Modélisation ou traduction ou formalisation, les constantes.

Formaliser en langage des prédicats les énoncés de l'Exercice2 où une constante existe.

1/ L'inspecteur Tahar a mené l'enquête.

a : L'inspecteur Tahar

$M(x)$: x a mené l'enquête

Donc : $M(a)$

2/ Mohamed n'a pas préparé ses cours.

b : Mohamed

$P(x)$: x a préparé ses cours

Donc : $\neg P(a)$

Ou

$P(x)$: x n'a pas préparé ses cours

Donc : $P(a)$

3/ Cette injustice a découragé Mohamed. Mohamed n'est pas en position de sujet.

Pas de constante.

4/ Une personne s'occupe de Mohamed. Mohamed n'est pas en position de sujet.
Pas de constante.

Exercice 4: Modélisation ou traduction ou formalisation.

Formalisez les assertions suivantes dans le langage des prédicats :

Appliquer les 4 étapes vues au cours :

1. Quelques champignons sont comestibles.

1/ Pas de constante, et une seule variable : champignon → La définir par un Prédicat :

$A(x)$: x est un champignon.

2/ Les verbes de l'assertion sont définis aussi par des Prédicats, ici, un seule verbe :

$E(x)$: x est comestible.

3/ Définir le ou les quantificateurs : \forall ou \exists ? Ici, Quelques : \exists

4/ Ecrire une formule bine formée qui formalise l'assertion :

$\exists x(A(x) \wedge E(x))$

2. Tous les enfants aiment les bonbons.

1/ $E(x)$: x est un enfant.

2/ $A(x)$: x aime les bonbons.

3/ \forall

4/ $\forall x(E(x) \rightarrow A(x))$

3. Aucun enfant ne déteste les bonbons.

« Détester » est le contraire « d'aimer »

$\exists x (E(x) \wedge A(x))$ Faux

$\forall x (E(x) \rightarrow \neg A(x))$ Faux

$\neg \exists x (E(x) \wedge \neg A(x))$ BON

$\forall x (E(x) \rightarrow A(x))$ BON

4. Il y a des peines et il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir.

1/ 2 variables : une peine, un plaisir, donc 2 prédicats :

$V1(x)$: x est une peine

$V2(y)$: y est un plaisir

2/ Le verbe : être

3/ il y a : \exists

4/ « mais » c'est \wedge :

$(\exists x V1(x) \wedge \exists y V2(y)) \wedge \neg \exists x (V1(x) \wedge V2(x))$

5. Si les enfants sont plus intelligents que les hommes alors il y a un enfant qui est plus intelligent que son père.

1/ 2 variables et 1 constante, a : père

$E(x)$: x est un enfant

$H(y)$: y est un homme

2/ $I(x,y)$: x est plus intelligent que y.

3/ « Les » c'est \forall , voir le cours....

4/ « Si »... « alors » : \rightarrow

$((\forall x E(x) \wedge \forall y H(y)) \rightarrow I(x,y)) \rightarrow (\exists x E(x) \wedge I(x,a))$

6. Pour tout entier, il existe un entier plus grand.

1/ variable : entier

$Entier(x)$: x est un entier

2/ $Grand(x,y)$, x est plus grand que y

3/ « tout » est \forall

4/ $\forall x Entier(x) \rightarrow (\exists y (Entier(y) \wedge Grand(y,x)))$

Exercice 5: Modélisation ou traduction ou formalisation : Problème du Domaine.

1. Si On donne que le domaine $D = \{\text{ensemble de tous les champignons}\}$, que devient l'assertion :
Quelques champignons sont comestibles.

Pas la peine d définir la variables champignon car les x appartiennent à D , par définition !

Donc : $\exists x \text{ comestible}(x)$

2. Si $D = \{\text{ensemble des personnes}\}$, formulez :

Les x sont des personnes par définition donc pas la peine de définir personne comme variable par un prédicat !

a. Quelqu'un arrive. $\exists x \text{ arrive}(x)$

b. Personne n'est venu. $\neg \exists x \text{ venu}(x)$ **OU** $\forall x \neg \text{venu}(x)$

Exercice 6: Du Langage des prédicats au Français.

Traduire les formules (1) à (8) en français. Utilisez les traductions des prédicats suivantes :

$P(x)$: x est plombier

$R(x)$: x est riche

$Q(x)$: x habite à Batna.

a : Mohamed, b : Malika, c : Amina

- | | | |
|--|--------------------------|--|
| 1. $P(a)$ | 2. $Q(c)$ | 3. $R(b)$ |
| 4. $\exists x Q(x)$ | 5. $\forall x P(x)$ | 6. $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ |
| 7. $\exists x (Q(x) \wedge \neg P(x))$ | 8. $\neg \exists x R(x)$ | |

Facile, juste 2 exemples :

1. $P(a)$: Mohamed est un plombier

8. $\neg \exists x R(x)$: Aucun n'est riche

Exercice 7: Variables libres, variables liées.

Dans les formules suivantes, déterminer les variables libres et les variables liées, indiquer par un trait quel connecteur les lie:

1. $P(x)$ **x libre**

2. $\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (Q(y) \wedge R(x)))$

A/1^{ère} occurrence de x liée par $\forall x$

2^{ème} occurrence de x libre

Donc x est libre

B/ Une seule occurrence de y liée par $\forall y$, donc y est liée

3. $(P(f(x,y)) \vee \forall z R(a,z))$

x : libre, y : libre, z liée par $\forall z$

4. $\forall x P(x,y,z) \vee \forall z (P(z) \rightarrow R(x))$

A/ 1^{ère} occurrence de x liée par $\forall x$, 2^{ème} occurrence de x libre, donc x libre !

B/ Une occurrence de y : libre

C/ 1^{ère} occurrence de z libre, 2^{ème} occurrence de z liée par $\forall z$, donc z libre !

5. $\forall y ((P(x) \vee \exists x P(x)) \wedge Q(y))$

A/ 1^{ère} occurrence de x libre, 2^{ème} occurrence de x liée par $\exists x$, donc x libre

B/ Une occurrence de y : liée

6. $\forall x \forall y ((P(x) \vee \exists x P(x)) \wedge Q(y))$

A/ 1^{ère} occurrence de x liée par $\forall x$, 2^{ème} occurrence de x liée par $\exists x$

B/ une occurrence de y liée par $\forall y$

Exercice 8: Formules ouvertes, formules fermées ou closes.

Dites si les formules 1. à 5. de l'exercice précédent sont ouvertes ou fermées.

1. Ouverte, 2. Ouverte, 3. Ouverte, 4. Ouverte, 5. Ouverte, 6. Close

Exercice 9: Renommage et Substitution.

Quel est le résultat des substitutions suivantes:

1. $P(x) \vee Q(x,y) \{x/z\} = P(z) \vee Q(z,y)$
2. $\forall x Q(x,y) \{x/z\} = \forall x Q(x,y)$, car x n'est pas libre mais liée !
3. $(P(x) \vee Q(x,y)) \{y/x, f(a)/y\} = (P(y) \vee Q(y,f(a)))$

Peut-on substituer x par z dans les formules suivantes, expliquez:

4. $(P(f(x,y)) \vee \forall z R(a,z)) \{z/x\} = (P(f(z,y)) \vee \forall z R(a,z))$ NON car x était liée, et après substitution, z a une occurrence libre, donc z est devenu libre
5. $\forall x P(x,y,z) \vee \forall z (P(z) \rightarrow R(x)) \{z/x\} = \forall z P(z,y,z) \vee \forall z (P(z) \rightarrow R(z))$ NON, la 2^{ème} occurrence de x était libre, et après substitution, cette occurrence est devenue liée, donc création de lien supplémentaire !

Peut-on renommer x,y,z dans les formules 4. et 5. ? Pourquoi?

Oui, pour éviter le changement de statut des variables et pour séparer les variables liées des variables libres, on renomme les variables liées :

4. $(P(f(x,y)) \vee \forall w R(a,w))$ renommage de z liée par w
 $(P(f(x,y)) \vee \forall w R(a,w)) \{z/x\} = (P(f(z,y)) \vee \forall w R(a,w))$

5. $\forall x P(x,y,z) \vee \forall t (P(t) \rightarrow R(x))$ renommage de z liée par t
 $\forall x P(x,y,z) \vee \forall t (P(t) \rightarrow R(x)) \{z/x\} = \forall x P(x,y,z) \vee \forall t (P(t) \rightarrow R(z))$, la 1^{ère} occurrence de x est liée !