

TD N°5 avec Solution

LOGIQUE DES PREDICATS ASPECT SEMANTIQUE : INTERPRETATION

REMARQUE :

Par manque de temps, SEULS des cas de l'Exercice 1 et l'Exercice 3 vont être résolus en TD

Exercice 1 : PRIORITE 1

Soit le langage prédicatif suivant : $\{a,b,c,d,e,x,y\}$, Ville(unaire), Personne(unaire), Habite(binaire) (où a,b,c,d,e sont des constantes, x,y des variables, Ville, Personne, Habite des prédicats). Et l'interprétation définie par : $D = \{ 'Amina', 'Ali', 'Batna', 'Guelma', 'Alger' \}$ et $I(a) = 'Ali'$, $I(b) = 'Amina'$, $I(c) = 'Batna'$, $I(d) = 'Alger'$, $I(e) = 'Guelma'$, $I(\text{Ville}) = \{ 'Batna', 'Guelma', 'Alger' \}$, $I(\text{Personne}) = \{ 'Amina', 'Ali' \}$, $I(\text{Habite}) = \{ \langle Amina, Guelma \rangle, \langle Ali, Batna \rangle \}$.

Interpréter les termes et les formules suivants :

b , $y[y \leftarrow \text{Alger}]$, $\text{Ville}(d)$, $\text{Habite}(a,d)$, $\exists x \text{Habite}(x,d)$, $\exists y \text{Habite}(x,y)_{x \leftarrow \text{Amina}}$, $\forall x \exists y \text{Habite}(x,y)$,
 $\exists y \forall x \text{Habite}(x,y)$, $\exists x \exists y \text{Habite}(x,y)$, $(\forall x \text{Personne}(x) \rightarrow \forall x \exists y \text{habite}(x,y))$,
 $(\forall x \text{Personne}(x) \rightarrow \exists y \text{habite}(x,y)_{x \leftarrow \text{Amina}})$, $\forall x (\text{ville}(x) \vee \text{personne}(x))$.

Solution Pour quelques cas :

1/ b est un terme, son interprétation c'est sa valeur donnée, $I(b) = \text{Amina}$

2/ $I(\text{Ville}(d))$? Vrai ou Faux ? car Ville est un Prédicat !

$I(\text{Ville}(d)) = I(\text{Ville}(I(d))) = I(\text{Ville}(\text{Alger}))$ et $\text{Alger} \in I(\text{Ville})$, donc $I(\text{Ville}(d)) = \text{Vrai}$

3/ $I(\exists x \text{Habite}(x,d))$?

$I(\exists x \text{Habite}(x,d)) = I(\exists x \text{Habite}(x,\text{Alger}))$

Est ce qu'il $\exists x \in D$ Tel que $(x,\text{Alger}) \in I(\text{Habite})$???

Non, c'est-à-dire en quelque sorte « personne n'habite à Alger ! »

4/ $I(\forall x \exists y \text{Habite}(x,y))$?

Est-ce que $\forall x \in D$, $\exists y \in D$, tels que $(x,y) \in I(\text{Habite})$???

Pour $x = 'Amina'$, $\exists y$? Oui $y = \text{Guelma}$

Pour $x = 'Ali'$, $\exists y$? Oui $y = \text{Batna}$

Pour $x = 'Batna'$, $\exists y$? Non

Pour $x = 'Guelma'$, $\exists y$? Non

Pour $x = 'Alger'$, $\exists y$? Non

Donc $I(\forall x \exists y \text{Habite}(x,y)) = \text{FAUX}$

5/ $I(\forall x (\text{ville}(x) \vee \text{personne}(x))) = \text{VRAI}$ car :

$\forall x \in D$, x est une ville OU une personne, en détails :

Pour $x = 'Amina'$, $I(\text{ville}(x)) = \text{Faux}$ mais $I(\text{personne}(x)) = \text{Vrai}$, $\text{Faux} \vee \text{Vrai} = \text{Vrai}$

Pour $x = 'Ali'$, $(\text{Faux} \vee \text{Vrai}) = \text{Vrai}$

Pour $x = 'Batna'$, $(\text{Vrai} \vee \text{Faux}) = \text{Vrai}$

Pour $x = 'Guelma'$, $(\text{Vrai} \vee \text{Faux}) = \text{Vrai}$

Pour $x = 'Alger'$, $(\text{Vrai} \vee \text{Faux}) = \text{Vrai}$

Exercice2 :

On considère un langage Prédicatif suivant :

a, b des symboles des constantes, f un symbole de fonction unaire et P un symbole de prédicat binaire.

Soit I une interprétation de ce langage définie par son domaine $D = \{1,2\}$ et par :

$I[a]=1$, $I[b]=2$, $I[f(1)]=2$, $I[f(2)]=1$, $I[P(u,v)]=V$ ou vrai si et seulement si $u=1$.

Etablir la valeur de vérité des formules suivantes :

- a) $P(a,f(a))$ b) $P(b,f(b))$ c) $\forall x \forall y P(x,y)$
d) $\forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow P(f(x),f(y)))$ e) $\exists x \forall y (P(x,y) \rightarrow P(f(x),f(y)))$

Exercice3: PRIORITE 2

Soit P un prédicat d'arité 2, on considère la formule F:

$$F = \forall x \exists y P(x,y)$$

1/ Déterminer la validité de F dans les structures a/ et b/ suivantes (N: ensemble des entiers naturels):

a/ $S1 = (D1, I1) : D1=N$ et $I1(p(x,y)) = \text{Vrai}$ ssi $x < y$

b/ $S2 = (D2, I2) : D2=N - \{0\}$ et $I2(P(x,y)) = \text{Vrai}$ ssi $x=y$ et x divise y.

2/ F est elle valide ?

Solution :

1/

a/ Vu au Cours, mais refaire...

$I(\forall x \exists y P(x,y)) = \text{VRAI}$ dans S1. **Solution vue dans le Cours !**

b/ $I(\forall x \exists y P(x,y)) = \text{VRAI}$ dans S2 car :

$\forall x \in D2, \exists y \in D2$ tels que

Pour $x=1, \exists y$? Il suffit de prendre $y=x$, ici, $y=1$, et 1 divise 1

Pour $x=2, \exists y$? Il suffit de prendre $y=x$, ici, $y=2$, et 2 divise 2

Pour $x=3, \exists y$? $y=3$

Pour $x=4, \exists y$? $y=4$

.....etc pour tous les $x \in D2$

.

Exercice4:

a/ Soit la formule $F1 = \forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists y P(y,y)$

Donner l'interprétation de F1 dans les structures suivantes:

$S1 = \{ D = \{\text{hommes}\}, P(x,y) : x \text{ est le père de } y \}$

$S2 = \{ D = \{\text{hommes}\}, P(x,y) : y \text{ est le père de } x \}$

F1 est elle valide?

b/ Soit la formule $F2 = \forall x \forall y [(P(x,y) \wedge P(y,x)) \leftrightarrow E(x,y)]$

Déterminer la consistance de F2 dans la structure $S = \{ D = N$ (entiers), $P(x,y)$ est vrai si $x \leq y$, $E(x,y)$ est vrai si $x=y$. S est elle un modèle pour F2 ? Expliquer?