TD N°5 avec Solution

LOGIQUE DES PREDICATS
ASPECT SEMANTIQUE : INTERPRETATION

REMARQUE :
Par manque de temps, SEULS des cas de l'Exercice 1 et l'Exercice 3 vont être résolus en TD

Exercice1 : PRIORITE 1

Soit le langage prédicatif suivant : {a,b,c,d,e,x,y),Ville(unaire), Personne(unaire), Habite(binaire}(où a,b,c,d,e sont des constantes, x,y des variables, Ville, Personne, Habite des prédicats). Et I l'interprétation définie par : D = {'Amina', 'Ali', 'Batna', Guelma', 'Alger'} et I(a)='Ali', I(b)='Amina', I(c)='Batna', I(d)='Alger', I€='Guelma', I(Ville)= {'Batna','Guelma','Alger'}, I(Personne)={'Amina', 'Ali'}, I(Habite)={<Amina,Guelma>,<Ali,Batna>}.
Interpréter les termes et les formules suivants :

b, y[y $\leftarrow$Alger], Ville(d), Habite(a,d), $\exists$x Habite(x,d), $\exists$yHabite(x,y)$_{x \leftarrow \text{Amina}}$, $\forall$x$\exists$yHabite(x,y), $\exists$y$\forall$xHabite(x,y), $\exists$x$\exists$y Habite(x,y), ($\forall$x Personne(x) $\rightarrow$ $\forall$x$\exists$y habite(x,y)), ($\forall$x Personne(x) $\rightarrow$ $\exists$y habite(x,y) $_{x \leftarrow \text{Amina}}$), $\forall$x (ville(x) $\vee$ personne(x)).

Solution Pour quelques cas :

1/ b est un terme, son interprétation c'est sa valeur donnée, I(b)=Amina

2/ I(Ville(d)) ? Vrai ou Faux ? car Ville est un Prédicat !
I(Ville(d)) = I(Ville(I(d))) = I(Ville(Alger)) et Alger $\in$ I(Ville), donc I(Ville(d))= Vrai

3/ I($\exists$x Habite(x,d)) ?
I($\exists$x Habite(x,d)) = I($\exists$x Habite(x,Alger))
Est ce qu'il $\exists$x $\in$ D Tel que (x,Alger) $\in$ I(Habite) ???
Non, c'est-à-dire en quelque sorte « personne n'habite à Alger ! »

4/ I($\forall$x$\exists$yHabite(x,y)) ?
Est-ce que $\forall$x$\in$ D , $\exists$y$\in$ D, tels que (x,y) $\in$ I(Habite) ???
Pour x = 'Amina', $\exists$y ? Oui y= Guelma
Pour x = 'Ali', $\exists$y ? Oui y= Batna
Pour x ='Batna', $\exists$y ? Non
Pour x ='Guelma', $\exists$y ? Non
Pour x ='Alger', $\exists$y ? Non
Donc I($\forall$x$\exists$yHabite(x,y)) = FAUX

5/ I($\forall$x (ville(x) $\vee$ personne(x))) = VRAI car :
$\forall$x$\in$D, x est une ville OU une personne, en détails :
Pour x = 'Amina ', I(ville(x)= Faux mais I(personne(x))= Vrai , Faux $\vee$ Vrai = Vrai
Pour x = 'Ali', (Faux $\vee$ Vrai) = Vrai
Pour x ='Batna', (Vrai $\vee$ Faux) = Vrai
Pour x ='Guelma', (Vrai $\vee$ Faux) = Vrai
Pour x ='Alger', (Vrai $\vee$ Faux) = Vrai

Exercice2 :

On considère un langage Prédicatif suivant :

a, b des symboles des constantes, f un symbole de fonction unaire et P un symbole de prédicat binaire.

Soit I une interprétation de ce langage définie par son domaine D ={1,2} et par :

I[a]=1, I[b]=2, I[f(1)]=2, I[f(2)]=1, I[P(u,v)]=V ou vrai si et seulement si u=1.

Etablir la valeur de vérité des formules suivantes :

a) $P(a,f(a))$ b) $P(b,f(b))$ c) $\forall x\ \forall y\ P(x,y)$

d) $\forall x\ \forall y\ (P(x,y) \rightarrow P(f(x),f(y))$ e) $\exists x\ \forall y\ (P(x,y) \rightarrow P(f(x),f(y))$

Exercice3: PRIORITE 2

Soit P un prédicat d'arité 2, on considère la formule F:

F= $\forall x \exists y\ P(x,y)$

1/ Déterminer la validité de F dans les structures a/ et b/ suivantes (N: ensemble des entiers naturels):

a/ S1= (D1, I1) : D1=N et I1(p(x,y)) = Vrai ssi x < y

b/ S2= (D2, I2) : D2=N- {0} et I2(P(x,y))=Vrai ssi x=y et x divise y.

2/ F est elle valide ?

Solution :

1/

a/ Vu au Cours, mais refaire…

I($\forall x \exists y$ P(x,y)) = **VRAI** dans S1. **Solution vue dans le Cours !**

b/ I($\forall x \exists y$ P(x,y)) = VRAI dans S2 car :

$\forall x \in$ D2, $\exists y \in$ D2 tels que

Pour x= 1, $\exists$y ? Il suffit de prendre y=x, ici, y=1 , et 1 divise 1

Pour x= 2, $\exists$y ? ? Il suffit de prendre y=x, ici, y=2 , et 2 divise 2

Pour x= 3, $\exists$y ? y=3

Pour x= 4, $\exists$y ?y=4

…….etc pour tous les x $\in$ D2

.

Exercice4:

a/ Soit la formule **F1 = $\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists y P(y,y)$**

Donner l'interprétation de F1 dans les structures suivantes:

S1 = { D= {hommes}, P(x,y) : x est le père de y}

S2 = { D= {hommes}, P(x,y) : y est le père de x}

F1 est elle valide?

b/ Soit la formule **F2 = $\forall x \forall y$ [(P(x,y) $\wedge$ P(y,x)) $\leftrightarrow$ E(x,y)]**

Déterminer la consistance de F2 dans la structure S={ D= N (entiers), P(x,y) est vrai si x $\leq$y, E(x,y) est vrai si x=y}. S est elle un modèle pour F2 ? Expliquer?