TD N°6

LOGIQUE DES PREDICATS
ASPECT SEMANTIQUE :

Les Formes Standards (Pour Appliquer l'Algoritme de Résolution)

Quelques rappels utiles sur le transport des Quantificateurs:

Soit F et H des formules quelconques :

$\exists xF \equiv \neg\forall x \neg F$	$\forall xF \equiv \neg\exists x \neg F$
$\neg(\exists xF) \equiv \forall x \neg F$	$\neg(\forall xF) \equiv \exists x \neg F$
$\forall x\forall yF \equiv \forall y\forall xF$	$\exists x\exists yF \equiv \exists y\exists xF$
$\forall xF\wedge\forall xH \equiv \forall x(F\wedge H)$	$\exists xF\vee\exists xH \equiv \exists x(F\vee H)$

Si H ne contient aucune occurrence de x, alors:

$(\forall xF)\vee H \equiv \forall x(F\vee H)$	$\forall xH \equiv H$
$(\exists xF) \wedge H \equiv \exists x(F\wedge H)$	$\exists xH \equiv H$

Exercice1:
Mettre les formules suivantes sous Forme Normale Prénexe (FNP), **en utilisant un minimum de quantificateurs**:

1) $F1= \forall xP(x) \leftrightarrow \forall xQ(x)$
2) $F2= \forall x\exists y\forall t\ R(x,y,t) \rightarrow \exists x\forall y\exists t\ R(x,y,t)$
3) $F3= \forall x\exists y\forall t\ R(x,z,t) \rightarrow \exists x\forall y\exists t\ R(x,z,t)$
4) $F4= \forall x\forall y(\exists z (P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow \exists u\ Q(x,y,u))$
5) $F5= \forall x\exists y\exists z ((P(x,y) \wedge Q(x,z)) \vee R(x,y,z))$

Exercice2:
Mettre sous Forme Standard de Skolem (FSS) les formules de l'exercice1.

Exercice3:
Mettre sous Forme Clausale la formule suivante:
$F = \forall x\exists y\exists z ((P(x,y) \wedge Q(x,z)) \vee R(x,y,z))$

Par manque de temps, je donnerai uniquement une solution. Car des exemples avec solutions sont déjà vus dans le cours. Le principe reste le même pour toutes les formules :

1ère Solution de l'exercice 1 formule 1/ :

On cherche La Forme Clausale (FC), ou encore la FNC, de cette formule :

1) F1= $\forall xP(x) \leftrightarrow \forall xQ(x)$

A/Cherchons une FNP : Transport des Quantificateurs vers la gauche sous conditions !

F1= $(\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)) \wedge (\forall xQ(x) \rightarrow \forall xP(x))$ Elimination de $\leftrightarrow$

F1= $(\neg(\forall xP(x)) \vee \forall xQ(x)) \wedge (\neg(\forall xQ(x)) \vee \forall xP(x))$ Elimination de $\rightarrow$

F1= $((\exists x \neg P(x)) \vee \forall xQ(x)) \wedge ((\exists x \neg Q(x)) \vee \forall xP(x))$ Introduire la négation

F1= $((\exists x \neg P(x)) \vee \forall yQ(y)) \wedge ((\exists x \neg Q(x)) \vee \forall wP(w))$ Renommage de 2ème x par y:y/x et de 4ème x par w w/x

F1= $\exists x\forall y(P(x) \vee Q(y)) \wedge \exists x\forall w(\neg Q(x) \vee P(w))$ Transport des Quantificateurs des 2 parties vers la gauche

F1= $\exists x\forall y(P(x) \vee Q(y)) \wedge \exists z\forall w(\neg Q(z) \vee P(w))$ Renommage de 2ème x par z:z/x

F1= $\exists x\forall y\exists z\forall w ((P(x) \vee Q(y)) \wedge (\neg Q(z) \vee P(w)))$ Transport des Quantificateurs vers la gauche : Est Une FNP !

B/Cherchons une FSS : Elimination des Quantificateurs $\exists$ sous conditions !

F1= $\exists x\forall y\exists z\forall w ((P(x) \vee Q(y)) \wedge (\neg Q(z) \vee P(w)))$

Eliminer $\exists x$ et remplacer x par 1constante qui n'existe pas dans la formule, a: a/x car « Rien » avant $\exists x$

F1= $\forall y\exists z\forall w ((P(a) \vee Q(y)) \wedge (\neg Q(z) \vee P(w)))$

Eliminer $\exists z$ et remplacer z par 1 fonction qui n'existe pas dans la forme, f(y) : f(y)/z car « il y a $\forall y$ » avant $\exists z$

F1= $\forall y\forall w ((P(a) \vee Q(y)) \wedge (\neg Q(f(y)) \vee P(w)))$: Est Une FSS !

C/Cherchons une FC ou FNC :

Distributivité entre les « $\wedge$ » et les « $\vee$ » et « si nécessaire !!! », exactement comme vu pour les propositions

Ici, pas nécessaire car on a déjà une FNC : $((P(a) \vee Q(y)) \wedge (\neg Q(f(y)) \vee P(w)))$

F1= $\forall y\forall w ((P(a) \vee Q(y)) \wedge (\neg Q(f(y)) \vee P(w)))$: Est Une FC avec 2 clauses !

C1 : $(P(a) \vee Q(y))$

C2 : $(\neg Q(f(y)) \vee P(w))$

2ème Solution de l'exercice 1 formule 1/ :

On cherche La Forme Clausale (FC), ou encore la FNC, de cette formule :

A/Cherchons une FNP : Transport des Quantificateurs vers la gauche sous conditions !

F1= $(\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)) \wedge (\forall xQ(x) \rightarrow \forall xP(x))$ Elimination de $\leftrightarrow$

F1= $(\neg(\forall xP(x)) \vee \forall xQ(x)) \wedge (\neg(\forall xQ(x)) \vee \forall xP(x))$ Elimination de $\rightarrow$

F1= $((\exists x \neg P(x)) \vee \forall xQ(x)) \wedge ((\exists x \neg Q(x)) \vee \forall xP(x))$ Introduire la négation

F1= $((\exists y \neg P(y)) \vee \forall xQ(x)) \wedge ((\exists w \neg Q(w)) \vee \forall xP(x))$ **Renommage de 1er x par y:y/x et de 3ème x par w : w/x**

F1= $\exists y\forall x(P(x) \vee Q(y)) \wedge \exists w\forall x(\neg Q(w) \vee P(x))$ Transport des Quantificateurs des 2 parties vers la gauche

F1= $\exists y\forall x(P(x) \vee Q(y)) \wedge \exists w\forall x(\neg Q(w) \vee P(x))$ **Et ici,pas besoin de Renommage du 2ème x car « $\forall$ » avec « $\wedge$ »**

F1= $\exists y\exists w\forall x ((P(x) \vee Q(y)) \wedge (\neg Q(w) \vee P(x)))$ Transport des Quantificateurs vers la gauche : Est Une FNP !

B/Cherchons une FSS : Elimination des Quantificateurs $\exists$ sous conditions !

F1= $\exists y\exists w\forall x ((P(x) \vee Q(y)) \wedge (\neg Q(w) \vee P(x)))$

Eliminer $\exists y$ et remplacer y par 1constante qui n'existe pas dans la formule, a: a/y car « Rien » avant $\exists y$

F1= $\exists w\forall x ((P(x) \vee Q(a)) \wedge (\neg Q(w) \vee P(x)))$

Eliminer $\exists w$ et remplacer w par 1 constante qui n'existe pas dans la forme, b : b/w car « Rien» avant $\exists w$

F1= $\forall x\ ((P(x) \lor Q(a)) \land (\neg Q(b) \lor P(x)))$

F1= $\forall x\ ((P(x) \lor Q(a)) \land (\neg Q(b) \lor P(x)))$ Est Une FSS !

C/Cherchons une FC ou FNC :

Distributivité entre les « $\land$ » et les « $\lor$ » et « si nécessaire !!! », exactement comme vu pour les propositions
Ici, pas nécessaire car on a déjà une FNC : $((P(x) \lor Q(a)) \land (\neg Q(b) \lor P(x)))$

F1= $\forall x\ ((P(x) \lor Q(a)) \land (\neg Q(b) \lor P(x)))$ Est Une FC avec 2 clauses !
C1 : $(P(x) \lor Q(a))$
C2 : $(\neg Q(b)) \lor P(x))$